译者序

巴西几何学家 M. P. do Carmo 所著的本书英文版出版于 1976 年。这是一本很好的大学高年级的微分几何教科书，内容丰富，行文清晰，对于有志于进一步学习微分几何的人是一本很好的入门书。

本书共有正文五章，以及“文献与评注”与习题的“提示与答案”。以下是各译者的承译章节。

姜国英：序言，使用说明，第 5 章 5.1～5.5，5.7～5.8；

潘养廉：第 1 章，第 5 章 5.6，第 5 章的附录，“文献与评注”，“提示与答案”；

忻元龙：第 2 章，第 5 章 5.9～5.11；

田　畴：第 3 章；

彭家贵：第 4 章。

本书由胡和生教授审校了全部译文，并由姜国英同志对全部译稿在文字上作了统一和修饰。

最后一点，就是原书对矢量并不都是用黑体来加以标记的，但这并不影响对原书的理解和阅读，因为读者根据上下文，很容易辨认一个字母所表示的是一个标量还是一个矢量。故我们在中文版中，矢量统统不用黑体来加以标记，希望读者在阅读时予以注意。

由于译者水平有限，误译之处在所难免，请读者批评、指正。

译　者

1987 年 3 月

序　言

本书是曲线和曲面局部微分几何学和整体微分几何学的一本引论。它的叙述方法与传统方式有如下不同：较广泛地应用了线性代数的基本知识；在一定程度上强调了基本的几何事实，并不把重点放在方法技巧或机遇性的细节上。

本书力求使每一章都能围绕着一个简单并且基本的思想而建立起来。第 2 章是围绕$\mathbb{R}^3$ 中正则曲面的概念展开的；当这个概念适当地展开时，就有可能成为微分流形最好的模型。第 3 章建立在 Gauss 的法线映照上，其中包括了$\mathbb{R}^3$ 中曲面局部几何学的大量内容。第 4 章以协变导数的概念为中心，统一了曲面的内蕴几何学；我们的目的仍然是使读者对 Riemann 几何中联络这一基本概念作好准备。最后在第 5 章中，我们用弧长的第一变分和第二变分导出了曲面的某些整体性质。在结束第 5 章之前(5.10)我们说明，曲面论的问题以及第 2、4 章中所得的经验是如何自然地导致微分流形与 Riemann 度量的。

为适当保持抽象概念和具体事实的均衡，我们给出了大量具详细计算的例子，并且适当地补充了习题。经典微分几何中的一些具体材料，则在这些习题中得到体现。打星号的习题则在本书末附有提示式答案。

阅读本书必须有线性代数和微积分的知识。对于线性代数，仅仅需要一些最基本的概念，有关的大学标准教程就完全够用了。至于微积分，则希望对多元微积分(包括隐函数存在定理的叙述)有一定程度的熟悉。为了方便读者，我们把参考资料仅限于 R. C. Buck 所著，1965 年在纽约由 McGraw-Hill 出版的 *Advanced Calculus* 一书(引用时记为 *Buck, Advanced Calculus*)。微分方程的知识是有用的，但我们并不要求事先具备。

本书是从用葡萄牙语出版的一本书及一套讲义意译出来的，并且添加了材料。要不是 Blaine Lawson 的热忱和大力协助，本书不会译成英语。译文的大部分是由 Leny Cavalcante 完成的。我还要感谢 IMPA[○] 中我的同事和学生对本书作的评注和支持。特别应提到，Elon Lima 阅读了葡萄牙语版的部分内容，并提出了宝贵的意见。

Robert Gardner，Jürgen Kern，Blaine Lawson 与 Nolan Wallach 一丝不苟地阅读了英语版的原稿，帮助我避免了一些英语和数学上的错误。Roy Ogawa 为书中的一些精美的插图(图 1-3，1-8，1-9，1-10，1-11，3-45 和 4-4)编制了计算机程序。Jerry Kazdan 慷慨地花了不少时间，为改进原稿逐字逐句地提了数百条建议。这本书能有如今的面貌，极大程度上是得益于他的意见。对上述各位，还有 Prentice-Hall 的数学编辑 Arthur Wester 以及在 IMPA 的 Wilson Góes，我谨表示由衷的感谢。

Manfredo P. do Carmo
里约热内卢

○ IMPA 是巴西里约热内卢纯粹和应用数学研究所的缩写。——译者注

关于使用本书的一些说明

书中内容的编排意图，是使本书能用于多种类型的微分几何课程。每章开头都有一个引言，说明该章所含的材料以及这些材料以后在书中有什么用处。为了方便读者，我们用脚注指出初次阅读时可略去的章节（或其中的部分内容）。

虽然本书有足够的材料可用于全学年的教程（或专题课程），但我们还是试图使这本书能适用于为具有一定线性代数和高等微积分知识的大学生而初次开设的微分几何课程。

对于一个季度的短期课程（10 周），建议选用下列材料：第 1 章：1.2，1.3，1.4，1.5 以及 1.7 中的一个专题——2 周。第 2 章：2.2 与 2.3（略去证明），2.4 与 2.5——3 周。第 3 章：3.2 与 3.3——2 周。第 4 章：4.2（略去共形映照及习题 4，13～18，20），4.3（只到 Gauss 绝妙的定理），4.4（只到命题 4；略去习题 12，13，16，18～21），4.5（只到局部的 Gauss-Bonnet 定理；包括应用(b)与(f)）——3 周。

上面的 10 周计划在时间安排上是有点偏紧的。较为宽裕的另一种安排是对头三章可再多花一些时间，然后在课程的最后一周，就测地线、Gauss 绝妙的定理以及 Gauss-Bonnet 定理（这时测地线可定义为其密切平面包含曲面法线的曲线）等内容作一些概述性的讲解。

在一学期的教程中，第一种安排的内容可教得更从容些，讲授者有可能加入一些其他材料（例如 5.2 与 5.10（部分），或者是 4.6，5.3 及 5.4）。

还请注意的是习题上的星号既不表示这道习题过于容易，也不表示这道习题比较困难，它仅说明在书后附有解答或提示。

目　录

译者序
序言
关于使用本书的一些说明
第 1 章　曲线 …… 1
1.1　引言 …… 1
1.2　参数曲线 …… 1
1.3　正则曲线；弧长 …… 4
1.4　$\mathbb{R}^3$ 中的向量积 …… 9
1.5　以弧长为参数的曲线的局部理论 …… 13
1.6　局部规范形式 …… 20
1.7　平面曲线的一些整体性质 …… 23
第 2 章　正则曲面 …… 39
2.1　引言 …… 39
2.2　正则曲面；正则值的原像 …… 39
2.3　参数变换；曲面上的可微函数 …… 52
2.4　切平面；映照的微分 …… 61
2.5　第一基本形式；面积 …… 68
2.6　曲面的定向 …… 75
2.7　紧致定向曲面的一个特征 …… 80
2.8　面积的几何定义 …… 83
附录　连续性和可微性简述 …… 85
第 3 章　Gauss 映照的几何学 …… 97
3.1　引言 …… 97
3.2　Gauss 映照的定义和基本性质 …… 97
3.3　局部坐标中的 Gauss 映照 …… 111
3.4　向量场 …… 128
3.5　直纹面和极小曲面 …… 137
附录　自伴随的线性映照和二次形式 …… 155
第 4 章　曲面的内蕴几何学 …… 159
4.1　引言 …… 159
4.2　等距对应；共形映照 …… 159
4.3　Gauss 定理和相容性方程 …… 169
4.4　平行移动；测地线 …… 173
4.5　Gauss-Bonnet 定理及其应用 …… 192
4.6　指数映照；测地极坐标 …… 207
4.7　测地线的一些进一步的性质；凸邻域 …… 217
附录　曲线和曲面局部理论基本定理的证明 …… 225
第 5 章　整体微分几何学 …… 231
5.1　引言 …… 231
5.2　球面的刚性 …… 232
5.3　完备曲面；Hopf-Rinow 定理 …… 238
5.4　弧长的第一变分和第二变分；Bonnet 定理 …… 248
5.5　Jacobi 场和共轭点 …… 261
5.6　覆盖空间；Hadamard 定理 …… 272
5.7　曲线的整体性定理；Fary-Milnor 定理 …… 285
5.8　Gauss 曲率为零的曲面 …… 299
5.9　Jacobi 定理 …… 304
5.10　抽象曲面及其进一步推广 …… 310
5.11　Hilbert 定理 …… 326
附录　欧氏空间的点集拓扑 …… 333
文献与评注 …… 344
提示与答案 …… 346

第1章 曲 线

1.1 引言

曲线和曲面的微分几何包括两个方面．其中一个方面是随着微积分的出现而开始的，这部分可以称为经典微分几何．粗略地说，经典微分几何是研究曲线和曲面的局部性质的．所谓局部性质，指的是仅取决于曲线或曲面在一点邻近的行为的那些性质．适合于研究这种性质的方法是微分学的方法．由于这一点，在微分几何中考虑的曲线和曲面将由一定阶数的可微函数来定义．

另一方面是称为整体微分几何的那部分．这部分研究局部性质对整个曲线或曲面的行为的影响．我们将在本书后面部分回到微分几何的这个方面．

也许经典微分几何最有趣和最有代表性的部分是对曲面的研究．然而，在研究曲面时，自然会出现曲线的某些局部性质．因此我们在第1章中将简要地论述一下曲线．

本章是以这样的方式组织的：那些主要对曲面感兴趣的读者，可以仅仅阅读1.2到1.5．1.2到1.4的内容基本上是介绍性材料(参数曲线、弧长、向量积)，这些材料在其他课程中可能也有，但为完整起见这里还是把它们包括进来了．1.5是本章的核心，它包含了研究曲面所需要的有关曲线的材料．为那些希望对曲线这个课题了解得更深一些的读者，我们编写了1.6和1.7．

1.2 参数曲线

我们记$\mathbb{R}^3$为三个实数(x, y, z)的集．我们的目标是刻划$\mathbb{R}^3$的某种子集(称为曲线)，它们在一定意义上是一维的，而且对它们可以采用微分学的方法．定义这种子集的一种自然的途径是用可微函数．单个实变量的实函数，如果在所有点具有任意阶的导数(它们自然是连续的)，那么我们说它是*可微的*(或*光滑的*)．下面是曲线的第一种定义，虽然它并不完全令人满意，但对本章的目的是完全合适的．

定义 从实直线$\mathbb{R}$的一个开区间$I=(a, b)$到$\mathbb{R}^3$中的一个可微映照$\alpha: I\to\mathbb{R}^3$称为一条*可微参数曲线*．

在这个定义中，*可微*的意思是指：α是一个对应，它将每个$t\in I$映照到点$\alpha(t)$[⊖]$=(x(t), y(t), z(t))\in\mathbb{R}^3$，而函数$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$都是可微函数．变量$t$称为曲线的*参数*．这里，区间是从广义的意义上说的．即包括$a=-\infty$，$b=+\infty$的情况．

如果我们记$x'(t)$为x在t点的一阶导数，并且对函数y和z采用类似的记号，则向量$(x'(t), y'(t), z'(t))=\alpha'(t)\in\mathbb{R}^3$称为曲线$\alpha$在$t$点的*切向量*(或*速度向量*)，象集$\alpha(I)\subset\mathbb{R}^3$称为$\alpha$的*轨迹*．正如下面的例5中所说明的那样，应该仔细地区分参数曲线和它的轨迹，前者是一个映照，后者是$\mathbb{R}^3$的一个子集．

⊖ 这里的$\alpha(t)$可以一眼看出是一个矢量，所以我们不用黑体来加以标记，希望读者阅读时予以注意．——译者注

关于术语的一个注意点：许多人采用“无限可微”这个词表示函数具有任意阶的导数，而“可微分”这个词则用来表示要求只存在一阶导数的情况．我们不采用这种说法．

例 1 可微参数曲线

$$\alpha(t)=(a\cos t,a\sin t,bt),\quad t\in\mathbb{R}$$

的轨迹是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上间距为 $2\pi b$ 的螺旋线．这里参数 t 是 x 轴与连接原点 O 和点 $\alpha(t)$ 在 xy 平面上的投影的直线的夹角(见图 1-1)．

例 2 映照

$$\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\alpha(t)=(t^3,t^2),\quad t\in\mathbb{R}$$

是可微参数曲线，它的轨迹如图 1-2 所示．注意：$\alpha'(0)=(0,0)$，即在 $t=0$，速度向量是零．

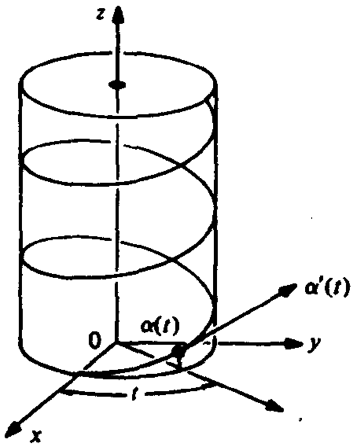


图 1-1

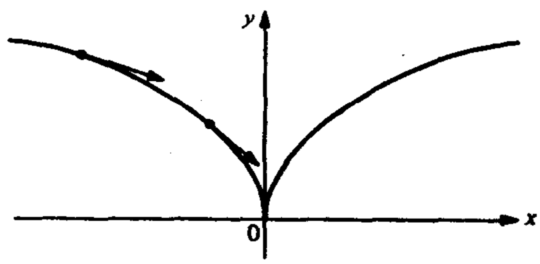


图 1-2

例 3 映照

$$\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad \alpha(t)=(t^3-4t,t^2-4),\quad t\in\mathbb{R}$$

是可微参数曲线(见图 1-3)．注意：$\alpha(2)=\alpha(-2)=(0,0)$，即映照 α 不是 1 对 1 的．

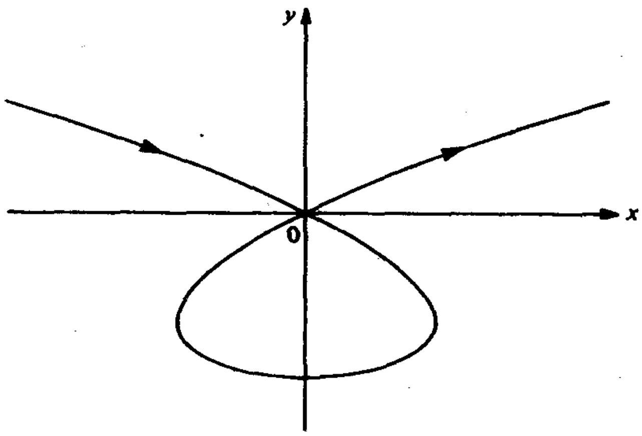


图 1-3

例 4 映照

$$\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad \alpha(t)=(t,|t|),\quad t\in\mathbb{R}$$

不是可微参数曲线，因为 $|t|$ 在 $t=0$ 不可微(图 1-4).

例 5　两条相异的参数曲线

$$\alpha(t)=(\cos t,\sin t)$$
$$\beta(t)=(\cos 2t,\sin 2t)$$

具有相同的轨迹，即圆周 $x^2+y^2=1$，这里 $t\in(0-\varepsilon,\ 2\pi+\varepsilon)$，$\varepsilon>0$. 注意：第二条曲线的速度向量是第一条曲线的速度向量的两倍(图 1-5).

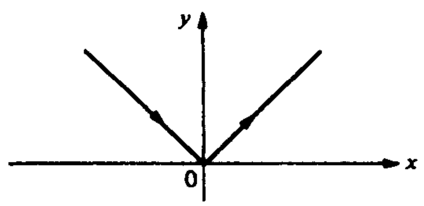


图　1-4

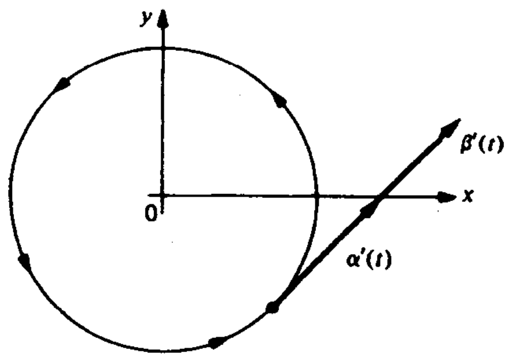


图　1-5

现在我们简要地回顾一下$\mathbb{R}^3$ 中向量内积(或点积)的某些性质. 设 $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)\in\mathbb{R}^3$，并定义它的范数(或长度)为

$$|u|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

$|u|$ 的几何意义是从点$(u_1,\ u_2,\ u_3)$到原点 $O=(0,\ 0,\ 0)$的距离. 现在设 $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$和 $v=(v_1,\ v_2,\ v_3)$属于$\mathbb{R}^3$，设 θ，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，是线段 Ou 和 Ov 形成的角. 内积 $u\cdot v$ 定义为(见图 1-6)

$$u\cdot v=|u||v|\cos\theta$$

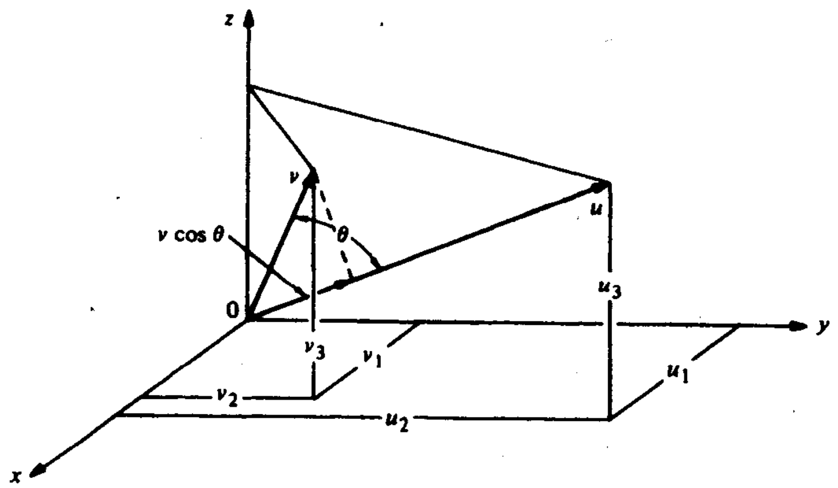


图　1-6

这时成立以下的性质：

1. 假设 u 和 v 是非零向量. 则当且仅当 u 与 v 正交时，$u\cdot v=0$.

2. $u \cdot v = v \cdot u$.

3. $\lambda(u \cdot v) = \lambda u \cdot v = u \cdot \lambda v$.

4. $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$.

下面我们给出内积的一个有用的表达式．设 $e_1=(1, 0, 0)$，$e_2=(0, 1, 0)$，$e_3=(0, 0, 1)$．容易证明，如果 $i=j$，则 $e_i \cdot e_j=1$，而如果 $i \neq j$，则 $e_i \cdot e_j=0$，这里 i，$j=1$，2，3．因此，若记

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, \quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

并运用性质 3 和 4，我们得到

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

从上面的表达式可知：如果 $u(t)$ 和 $v(t)$，$t \in I$，是可微曲线，则 $u(t) \cdot v(t)$ 是可微函数，且

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$$

习题

1. 求参数曲线 $\alpha(t)$，其轨迹为圆 $x^2+y^2=1$，并使 $\alpha(t)$ 沿着圆按顺时针方向运动，且 $\alpha(0)=(0, 1)$.

2. 设 $\alpha(t)$ 是不通过原点的参数曲线．如果 $\alpha(t_0)$ 是 α 的轨迹上距原点最近的点，且 $\alpha'(t_0) \neq 0$，证明位置向量 $\alpha(t_0)$ 正交于 $\alpha'(t_0)$.

3. 试描述二阶导数 $\alpha''(t)$ 恒等于零的参数曲线 $\alpha(t)$.

4. 设 α：$I \to \mathbb{R}^3$ 是参数曲线，并设 $v \in \mathbb{R}^3$ 是固定向量．假设对所有的 $t \in I$，$\alpha'(t)$ 正交于 v，且 $\alpha(0)$ 也正交于 v．证明：对所有的 $t \in I$，$\alpha(t)$ 正交于 v.

5. 设 α：$I \to \mathbb{R}^3$ 是参数曲线，对所有的 $t \in I$，$\alpha'(t) \neq 0$．证明：当且仅当对所有的 $t \in I$，$\alpha(t)$ 正交于 $\alpha'(t)$ 时，$|\alpha(t)|$ 是非零常数.

1.3 正则曲线；弧长

设 α：$I \to \mathbb{R}^3$ 为可微参数曲线．对每个 $t \in I$，若 $\alpha'(t) \neq 0$，可以定义一条包含点 $\alpha(t)$ 和向量 $\alpha'(t)$ 的直线．这条直线称为 α 在 t 点的切线．对曲线的微分几何研究，基本的一点是在每一点存在这样一条切线．因此我们称 $\alpha'(t)=0$ 的点 t 为 α 的奇点，而且我们只限于研究没有奇点的曲线．注意：在 1.2 的例 2 中，点 $t=0$ 是奇点.

定义 一条可微参数曲线 α：$I \to \mathbb{R}^3$ 称为是正则的，如果对所有的 $t \in I$，都有 $\alpha'(t) \neq 0$.

今后我们将只考虑正则的可微参数曲线（而且为方便起见通常省略可微二字）.

给定 $t \in I$，正则参数曲线 α：$I \to \mathbb{R}^3$ 从点 t_0 开始的弧长定义为

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| \, dt$$

这里

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

是向量 $\alpha'(t)$ 的长度. 因为 $\alpha'(t)\neq 0$，所以弧长 s 是 t 的可微函数，且 $ds/dt=|\alpha'(t)|$.

在习题 8 中，我们将对上述弧长定义的合理性给出一个几何论证.

可能出现这样的情况：参数 t 已经是从某点起计算的弧长. 在这种情况下 $ds/dt=1=|\alpha'(t)|$，即速度向量的长度总等于 1. 反之，如果 $|\alpha'(t)|\equiv 1$，则

$$s=\int_{t_0}^{t} dt = t-t_0$$

即 t 是 α 从某点起计算的弧长.

为简化叙述起见，我们以后都用弧长作参数来表示曲线. 后面我们将会看到(见 1.5)这个限制不是实质性的. 一般并不需要提到弧长 s 的起点，因为绝大部分概念是以 $\alpha(s)$ 的导数来定义的.

为方便计，我们再作一约定. 给定由弧长参数 $s\in(a, b)$ 表示的曲线 α，我们可以考虑另一条由 $\beta(-s)=\alpha(s)$ 定义于 $(-b, -a)$ 的曲线 β，曲线 β 与曲线 α 有相同的轨迹，但是按相反方向描绘. 这时，我们说这两条曲线相差一个定向的改变.

习题

1. 证明：正则参数曲线 $\alpha(t)=(3t, 2t^2, 3t^3)$ 的切线与直线 $y=0$，$z=x$ 的夹角是不变的.

2. 当 xy 平面上一个半径为 1 的圆盘沿着 x 轴无滑动地滚动时，圆盘的周线上一点画出的轨迹称为旋轮线(图 1-7).

*a. 求一参数曲线 $\alpha: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，其轨迹为此旋轮线，并求出它的奇点.

b. 计算相应于圆盘滚动一圈的旋轮线的弧长.

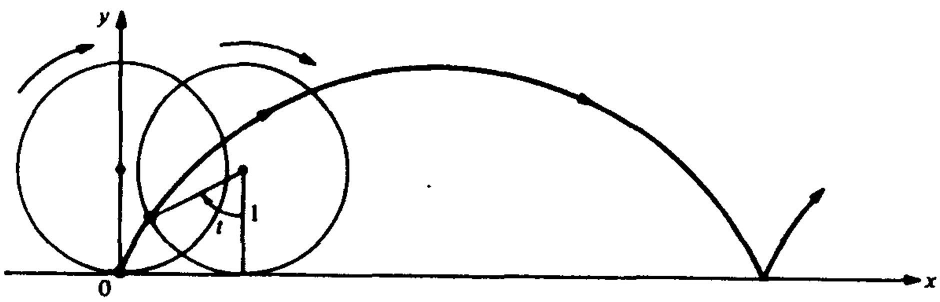


图 1-7　旋轮线

3. 设 $OA=2a$ 是圆 S^1 的直径，OY 和 AV 分别是圆 S^1 在 O 点和 A 点的切线. 从 O 点出发的半直线 r 与 S^1 相交于 C，与直线 AV 相交于 B. 在 OB 上截取线段 $Op=CB$. 如果我们以 O 点为轴心旋转 r，p 点描绘出来的曲线称为 Diocles 蔓叶线. 取 OA 为 x 轴，OB 为 y 轴，证明：

a. $\alpha(t)=\left(\dfrac{2at^2}{1+t^2}, \dfrac{2at^3}{1+t^2}\right)$，$t\in\mathbb{R}$，其轨迹是 Diocles 蔓叶线($t=\tan\theta$，见图 1-8).

b. 原点(0, 0)是此蔓叶线的一个奇点.

c. 当 $t\to\infty$ 时，$\alpha(t)$ 趋于直线 $x=2a$，且 $\alpha'(t)\to(2a, 0)$. 因此，当 $t\to\infty$ 时，蔓叶线及其

切线趋于直线 $x=2a$；我们说 $x=2a$ 是此蔓叶线的渐近线.

4. 设 α：$(0, \pi)\to\mathbb{R}^2$，由

$$\alpha(t)=\left(\cos t,\quad \cos t+\log\tan\frac{t}{2}\right)$$

给定，这里 t 是 y 轴和向量 $\alpha(t)$ 的夹角．则 α 的轨迹称为曳物线(见图 1-9)．证明：

a. α 是可微参数曲线，曲线上除了点 $t=\frac{\pi}{2}$ 以外都是正则点.

b. 此曳物线的切线上切点和 y 轴之间的线段的长度，总等于 1.

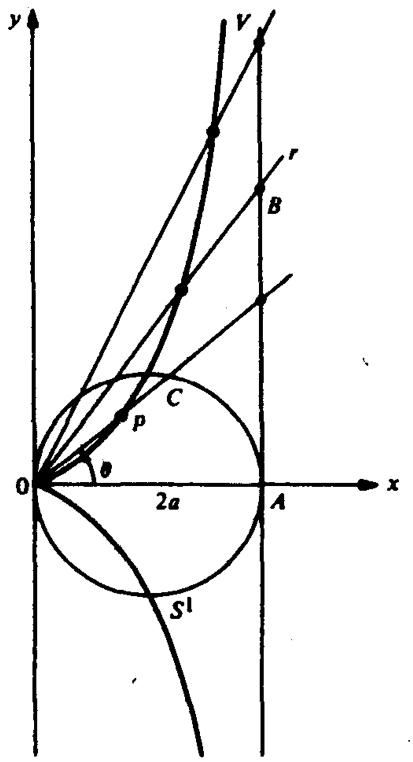


图 1-8 蔓叶线

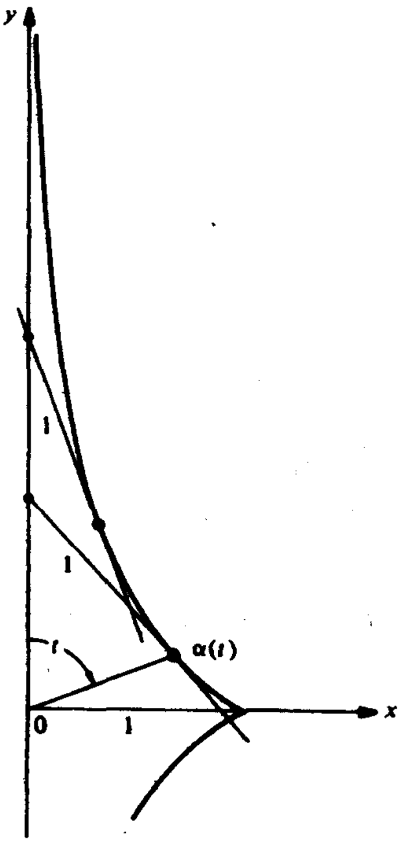


图 1-9 曳物线

5. 设 α：$(-1, +\infty)\to\mathbb{R}^2$ 由

$$\alpha(t)=\left(\frac{3at}{1+t^3},\quad \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$$

给定．证明：

a. 对 $t=0$，α 与 x 轴相切.

b. 当 $t\to+\infty$ 时，$\alpha(t)\to(0, 0)$，且 $\alpha'(t)\to(0, 0)$.

c. 取反向曲线．当 $t\to-1$ 时，曲线及其切线趋向于直线 $x+y+a=0$.

完整地画出 α 的轨迹，使它关于直线 $y=x$ 对称，这样得到的图形称为 Descartes 叶形线(见图 1-10).

6. 对参数曲线 $\alpha(t)=(ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$，$t\in\mathbb{R}$，$a$ 和 b 为常数，$a>0$，$b<0$，

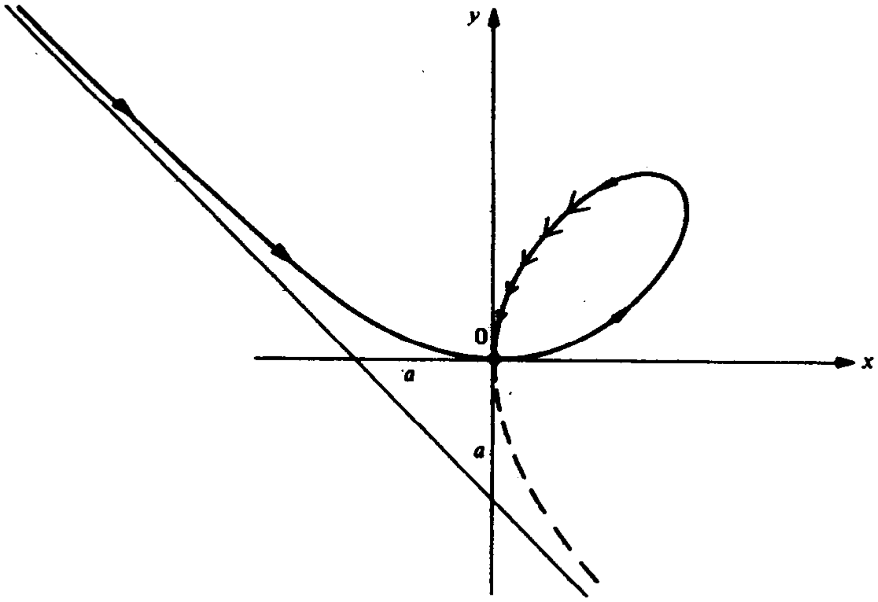


图 1-10　Descartes 叶形线

a. 证明：当 $t\to+\infty$ 时，$\alpha(t)$ 围绕原点 O 螺旋形地盘旋并趋于原点 O（正因为这样，α 的轨迹称为对数螺线.)(见图 1-11).

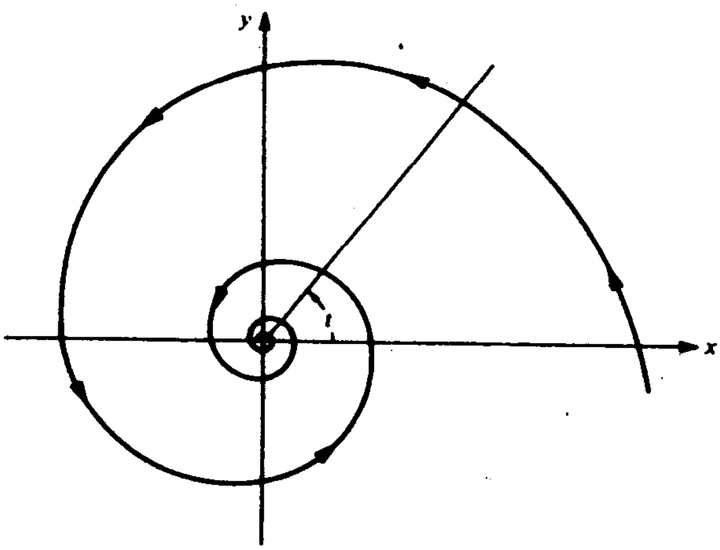


图 1-11　对数螺线

b. 证明：当 $t\to\infty$ 时，$\alpha'(t)\to(0,\ 0)$，且

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}|\alpha'(t)|\,dt$$

是有限的，即 α 在 $[t_0,\ \infty)$ 具有有限弧长.

7. 对一个映照 α：$I\to\mathbb{R}^3$，如果表达式 $\alpha(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ 中的每一个坐标函数具有直到 k 阶的连续导数，则称此映照为 C^k 类曲线. 如果 α 仅仅是连续的，我们说 α 是 C^0 类的.

如果映照 α 是 1 对 1 的，则称曲线 α 为简单曲线．因此 1.2 例 3 中的曲线不是简单曲线．

设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 是 C^0 类的简单曲线．如果由 $\alpha(t_0+h)$ 和 $\alpha(t_0)$ 决定的直线当 $h\to0$ 时有极限位置，则我们说 α 在 $t=t_0\in I$ 有弱切线．如果由 $\alpha(t_0+h)$ 和 $\alpha(t_0+k)$ 决定的直线当 h，$k\to0$ 时有极限位置，则我们说 α 在 $t=t_0$ 有强切线．证明：

a. $\alpha(t)=(t^3,\ t^2)$，$t\in\mathbb{R}$ 在 $t=0$ 有弱切线而没有强切线．

*b. 如果 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 属于 C^1 类，且在 $t=t_0$ 正则，则 α 在 $t=t_0$ 有强切线．

c. 已知属于 C^1 类而不属于 C^2 类的曲线

$$\alpha(t)=\begin{cases}(t^2,t^2), & \text{当 } t\geqslant 0\\ (t^2,-t^2), & \text{当 } t\leqslant 0\end{cases}$$

画出此曲线及其切向量的略图．

*8. 设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 为可微曲线，$[a,\ b]\subset I$ 为闭区间．对 $[a,\ b]$ 的每一分割

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

考虑和式 $\sum_{i=1}^{n}|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})|=l(\alpha,P)$，这里 P 代表给定的分割．分割 P 的范数 $|P|$ 定义为

$$|P|=\max(t_i-t_{i-1}),\quad i=1,\cdots,n$$

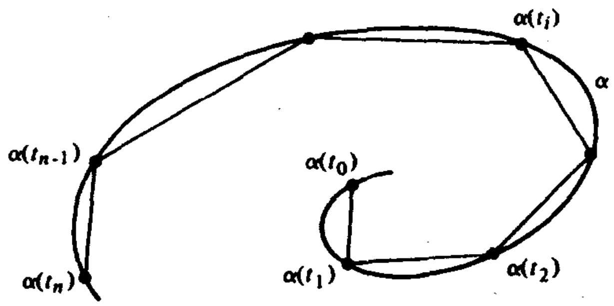


图 1-12

几何上，$l(\alpha,\ P)$ 是一内接于 $\alpha([a,\ b])$，顶点在 $\alpha(t_i)$ 的折线的长度（见图 1-12）．这个习题的要点是证明：$\alpha([a,\ b])$ 的弧长，在一定意义上是内接折线长度的极限．

证明：对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得若 $|P|<\delta$ 则

$$\left|\int_a^b|\alpha'(t)|\,dt-l(\alpha,P)\right|<\varepsilon$$

9. a. 设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 为一 C^0 类的曲线（参见题 7）．运用题 8 中描述的折线逼近，给出 α 的弧长的一个合理定义．

b.（不可求长的曲线．）下面的例子表明：对任何一个合理的定义，在一个闭区间中的 C^0 类曲线的弧长仍可能是无界的．给定曲线 α：$[0,\ 1]\to\mathbb{R}^2$，当 $t\neq0$ 时，$\alpha(t)=(t,\ t\sin(\pi/t))$，而 $\alpha(0)=(0,\ 0)$．从几何上证明，相应于 $1/(n+1)\leqslant t\leqslant 1/n$ 的这段曲线的弧长至少是 $2\Big/\left(n+\frac{1}{2}\right)$．由此再证明：曲线在区间 $1/N\leqslant t\leqslant1$ 的长度大于 $2\sum_{n=1}^{N}1/(n+1)$，因此当 $N\to\infty$ 时它趋向于无

穷大.

10.（直线为最短线）设 $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ 是一参数化曲线.

设 $[a, b]\subset I$，令 $\alpha(a)=p$，$\alpha(b)=q$.

a. 对任何常值向量 v，$|v|=1$，证明

$$(q-p)\cdot v=\int_a^b \alpha'(t)\cdot v dt\leqslant\int_a^b|\alpha'(t)|dt$$

b. 令

$$v=\frac{q-p}{|q-p|}$$

证明：

$$|\alpha(b)-\alpha(a)|\leqslant\int_a^b|\alpha'(t)|dt$$

即从 $\alpha(a)$ 到 $\alpha(b)$ 长度最短的曲线，是连接这两点的直线.

1.4 $\mathbb{R}^3$ 中的向量积

在这一节中我们将论述 $\mathbb{R}^3$ 中向量积的一些性质. 这些性质在今后研究曲线和曲面时是有用的.

首先我们回顾一下向量空间的定向的概念. 对 n 维向量空间 V 的两个有序基 $e=\{e_i\}$ 和 $f=\{f_i\}$，$i=1, \cdots, n$，如果基的变换矩阵的行列式是正的，则这两个有序基有相同定向. 我们记这种关系为 $e\sim f$. 从行列式的基本性质可知，$e\sim f$ 是一种等价关系，即它满足：

1. $e\sim e$.

2. 如果 $e\sim f$，则 $f\sim e$.

3. 如果 $e\sim f$，$f\sim g$，则 $e\sim g$.

因此，V 的所有有序基的集合被分解成等价类（一个给定类的各元素有～关系），根据性质 3，这些等价类是不相交的. 因为基变换的行列式不是正就是负，所以仅存在两个这样的等价类.

根据以上关系确定的每一个等价类，称为 V 的一个定向. 因此 V 有两个定向. 如果我们任意选定其中的一个定向，则另一个称为相反定向.

在 $V=\mathbb{R}^3$ 的情况，存在一个自然的有序基 $e_1=(1, 0, 0)$，$e_2=(0, 1, 0)$，$e_3=(0, 0, 1)$，我们称相应于这个基的定向为 $\mathbb{R}^3$ 的正定向，另一定向为负定向（当然，这点可同样适用于任何 $\mathbb{R}^n$）. 同样，当 $\mathbb{R}^3$ 的一个给定的有序基属于 $\mathbb{R}^3$ 的正定向（或负定向）时，我们称这个基是正基（或负基）. 因此有序基 e_1，e_3，e_2 是一个负基，因为变换这个基为 e_1，e_2，e_3 的矩阵的行列式等于 -1.

现在我们来谈谈向量积. 设 u，$v\in\mathbb{R}^3$. u 和 v（按这一次序）的向量积，是 $\mathbb{R}^3$ 中由下式唯一决定的向量 $u\wedge v$，

$$(u\wedge v)\cdot\omega=\det(u,v,\omega),\quad 对一切向量\ \omega\in\mathbb{R}^3$$

这里 $\det(u, v, \omega)$ 的意思是：如果 u，v，ω 关于自然基 $\{e_i\}$ 的表达式为

$$u = \sum u_i e_i, \quad v = \sum v_i e_i, \quad \omega = \sum \omega_i e_i, \quad i = 1,2,3$$

则

$$\det(u,v,\omega) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix}$$

$|a_{ij}|$ 表示矩阵(a_{ij})的行列式．由定义直接可得

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3 \tag{1}$$

注 $u \wedge v$ 也常常写作 $u \times v$，并把它称作*叉积*．

以下几个性质是很容易验证的(事实上它们正表达了行列式的一般性质)．

1. $u \wedge v = -v \wedge u$ （反交换律)．
2. $u \wedge v$ 关于 u，v 是线性的；即对任何实数 a，b，我们有
$$(au + b\omega) \wedge v = au \wedge v + b\omega \wedge v$$
3. 当且仅当 u 和 v 线性相关时，$u \wedge v = 0$．
4. $(u \wedge v) \cdot u = 0$，$(u \wedge v) \cdot v = 0$．

由性质 4 可知，向量积 $u \wedge v \neq 0$ 是 u 和 v 所组成的平面的法向．下面我们给出它的范数和方向的几何解释．

首先，我们看到$(u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = |u \wedge v|^2 > 0$．这意味着向量 u，v，$u \wedge v$ 的行列式是正的，即$\{u, v, u \wedge v\}$是一个正基．

其次，我们证明以下关系：

$$(u \wedge v) \cdot (x \wedge y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix}$$

这里 u，v，x，y 是任意的向量．这是容易证明的，因为我们注意到上式两边关于 u，v，x，y 都是线性的，因此只要验证下式就足够了

$$(e_i \wedge e_j) \cdot (e_k \wedge e_l) = \begin{vmatrix} e_i \cdot e_k & e_j \cdot e_k \\ e_i \cdot e_l & e_j \cdot e_l \end{vmatrix}, \quad i,j,k,l = 1,2,3$$

这是直截了当的．

于是，可以得到

$$|u \wedge v|^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2\theta) = A^2$$

这是 θ 是 u 和 v 的夹角，A 是由 u 和 v 组成的平行四边形的面积．

简单地说，u 和 v 的向量积是一个垂直于 u 和 v 生成的平面的向量，这个向量的范数等于由 u 和 v 组成的平行四边形的面积，这个向量的方向取得使$\{u, v, u \wedge v\}$是一个正基(图 1-13)．

向量积是不可结合的．事实上，我们有以下的恒等式：

$$(u \wedge v) \wedge \omega = (u \cdot \omega)v - (v \cdot \omega)u \tag{2}$$

式(2)可以证明如下．首先我们看到，等式的两边都关于 u，v，ω 线性，因此，只要对所有的

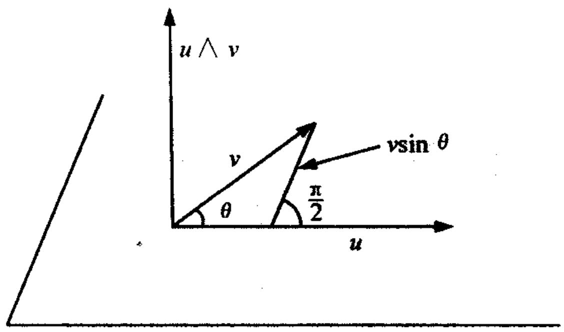


图　1-13

基向量式(2)成立，则此恒等式便是正确的．而对所有的基向量式(2)成立这一点是可以直截了当地证明的，例如

$$(e_1 \wedge e_2) \wedge e_1 = e_2 = (e_1 \cdot e_1)e_2 - (e_2 \cdot e_1)e_1$$

最后，设 $u(t)=(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ 和 $v(t)=(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ 是从区间 (a, b) 到 $\mathbb{R}^3$ 的可微映照，$t\in(a, b)$．由式(1)直接可知 $u(t)\wedge v(t)$ 也是可微的，且

$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge v(t)) = \frac{du}{dt} \wedge v(t) + u(t) \wedge \frac{dv}{dt}$$

向量积出现在许多几何结构中是很自然的．事实上，$\mathbb{R}^3$ 中平面和直线的几何学的绝大部分，能够清楚地用向量积和行列式来表达．在下面的习题中，我们将复习一下这方面的部分内容．

习题

1．验证下列的基是否为正基：

a．$\mathbb{R}^2$ 中的基{(1，3)，(4，2)}．

b．$\mathbb{R}^3$ 中的基{(1，3，5)，(2，3，7)，(4，8，3)}．

*2．包含于 $\mathbb{R}^3$ 中的平面 P 由方程 $ax+by+cz+d=0$ 给定．证明：向量 $v=(a, b, c)$ 垂直于平面 P，且平面 P 到原点(0，0，0)的距离为 $|d|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$．

*3．求平面 $5x+3y+2z-4=0$ 与平面 $3x+4y-7z=0$ 的交角．

*4．已知两个平面 $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$，$i=1, 2$，证明：这两个平面平行的充要条件是

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

这里约定：如果分母是零，则相应的分子也是零(如果两个平面或者重合或者不相交，则我们称这两个平面是平行的)．

5．证明：通过不共线的三点 $p_1=(x_1, y_1, z_1)$，$p_2=(x_2, y_2, z_2)$，$p_3=(x_3, y_3, z_3)$ 的平面，由方程

$$(p - p_1) \wedge (p - p_2) \cdot (p - p_3) = 0$$

给定，这里 $p=(x, y, z)$ 是平面上任意的一点，而 $p-p_1$ 表示向量 $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$，余类推．

*6. 已知两个不平行的平面 $a_ix+b_iy+c_iz+d=0$，$i=1$，2，证明：

这两个平面的交线可以用参数表示为

$$x-x_0=u_1t,\quad y-y_0=u_2t,\quad z-z_0=u_3t$$

这里 (x_0, y_0, z_0) 属于交线，$u=(u_1, u_2, u_3)$ 是向量积 $u=v_1\wedge v_2$，$v_i=(a_i, b_i, c_i)$，$i=1$，2.

*7. 证明：平面

$$ax+by+cz+d=0$$

与直线

$$x-x_0=u_1t,\quad y-y_0=u_2t,\quad z-z_0=u_3t$$

平行的充要条件是

$$au_1+bu_2+cu_3=0$$

*8. 证明：两条不平行的直线

$$x-x_0=u_1t,\quad y-y_0=u_2t,\quad z-z_0=u_3t$$

$$x-x_1=v_1t,\quad y-y_1=v_2t,\quad z-z_1=v_3t$$

之间的距离 ρ 由下式给定

$$\rho=\frac{|(u\wedge v)\cdot r|}{|u\wedge v|}$$

这里 $u=(u_1, u_2, u_3)$，$v=(v_1, v_2, v_3)$，$r=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$.

9. 求平面 $3x+4y+7z+8=0$ 和直线 $x-2=3t$，$y-3=5t$，$z-5=9t$ 的交角.

10. $\mathbb{R}^2$ 的自然定向，使我们可能对两个线性无关的向量 u，$v\in\mathbb{R}^2$ 所组成的平行四边形的面积 A，给定一个符号. 为此，设 $\{e_i\}$，$i=1$，2，是 $\mathbb{R}^2$ 的自然有序基，并记 $u=u_1e_1+u_2e_2$，$v=v_1e_1+v_2e_2$. 观察下列矩阵关系

$$\begin{pmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

结果得到

$$A^2=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2$$

由于最后一个行列式与基 $\{u, v\}$ 同号，我们可以按 $\{u, v\}$ 的定向是正或负来说 A 是正的或负的. 这称为 $\mathbb{R}^2$ 中的**定向面积**.

11. a. 证明：由三个线性无关的向量 u，v，$\omega\in\mathbb{R}^3$ 组成的平行六面体的体积 $V=|(u\wedge v)\cdot\omega|$，并论述 $\mathbb{R}^3$ 中的**定向体积**的意义.

b. 证明

$$V^2=\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v & u\cdot\omega \\ v\cdot u & v\cdot v & v\cdot\omega \\ \omega\cdot u & \omega\cdot v & \omega\cdot\omega \end{vmatrix}$$

12. 已知向量 $v\neq0$ 和向量 ω，证明：当且仅当 v 垂直于 ω 时，存在一个向量 u，使 $u\wedge v=\omega$. 这个向量 u 是不是唯一的？如果不是的话，那么最一般的解是什么？

13. 设 $u(t)=(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ 和 $v(t)=(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ 是从区间 (a, b) 到 $\mathbb{R}^3$

的可微映照. 如果导数 $u'(t)$和 $v'(t)$满足条件

$$u'(t)=au(t)+bv(t),\quad v'(t)=cu(t)-av(t)$$

这里 a, b 和 c 是常数，证明 $u(t)\wedge v(t)$是常向量.

14. 求出所有与向量(2, 2, 1)垂直并与点(0, 0, 0), (1, −2, 1), (−1, 1, 1)所决定的平面平行的单位向量.

1.5 以弧长为参数的曲线的局部理论

这一节的内容，包含本书后面部分要用到的关于曲线的主要结果.

设 α: $I=(a, b)\to\mathbb{R}^3$ 是一条以弧长为参数的曲线. 由于切向量 $\alpha'(s)$具有单位长度，从而二阶导数的范数 $|\alpha''(s)|$，度量了邻近切线与 s 点切线的交角的变化率. 因此 $|\alpha''(s)|$ 表示在 s 的一个邻域中，曲线以怎样的速率离开 s 点的切线(见图 1-14). 这可以启发我们作出以下的定义：

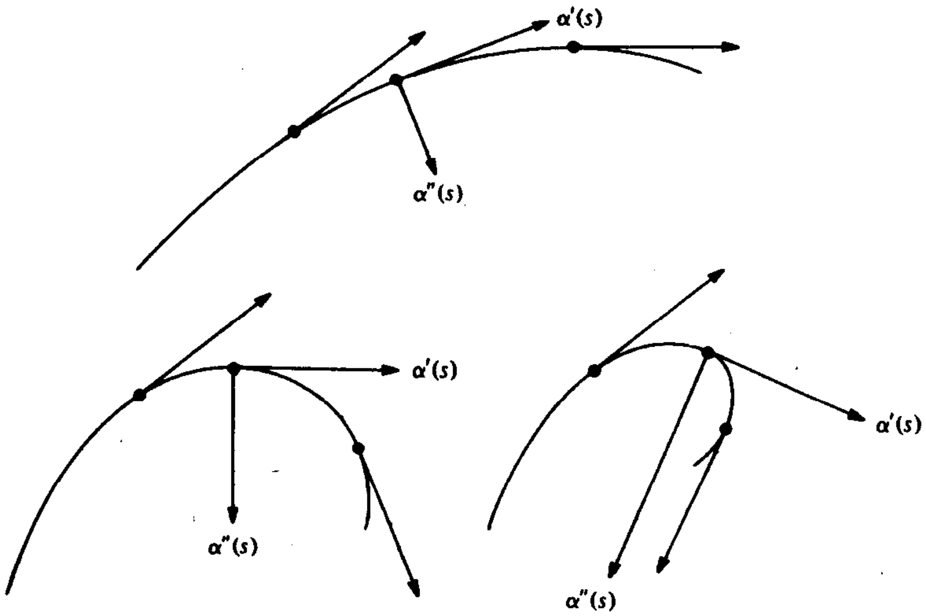


图 1-14

定义 设 α: $I\to\mathbb{R}^3$ 是以弧长为参数的曲线，$s\in I$，则数 $|\alpha''(s)|=k(s)$称为 α 在点 s 的曲率.

如果 α 为直线，$\alpha(s)=us+v$，其中 u 与 v 是常向量($|u|=1$)，则 $k\equiv 0$. 反之，如果 $k=|\alpha''(s)|\equiv 0$，积分后则有 $\alpha(s)=us+v$，所以这曲线是直线.

注意，当定向改变时切线的方向也改变，即如果 $\beta(-s)=\alpha(s)$，则

$$\frac{d\beta}{d(-s)}(-s)=-\frac{d\alpha}{ds}(s)$$

因此改变定向时 $\alpha''(s)$和曲率保持不变.

在 $k(s)\neq 0$ 的点，可由方程 $\alpha''(s)=k(s)n(s)$定义与 $\alpha''(s)$同方向的单位向量 $n(s)$. 而且，微分 $\alpha'(s)\cdot\alpha'(s)=1$，可得 $\alpha''(s)\cdot\alpha'(s)=0$，即 $\alpha''(s)$与 $\alpha'(s)$正交. 因此 $n(s)$与 $\alpha'(s)$正交，

称 $n(s)$ 为在 s 点的主法向量. 由单位切向量 $\alpha'(s)$ 与主法向量 $n(s)$ 决定的平面，称为在 s 点的密切平面(见图 1-15).

在 $k(s)=0$ 的点，主法向量(因此密切平面也)没有定义(参见习题 10). 为对曲线进行局部分析，密切平面对我们来说是不可少的. 因此为方便起见，我们采用以下的说法，即如果 $\alpha''(s)=0$，则我们说 $s\in I$ 是一阶奇点($\alpha'(s)=0$ 的点称为零阶奇点).

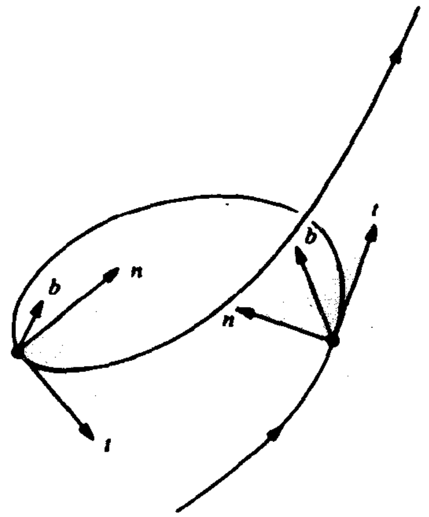


图 1-15

以下我们将只考虑没有一阶奇点的，以弧长为参数的曲线. 我们用 $t(s)=\alpha'(s)$ 表示 α 在 s 点的单位切向量. 因此 $t'(s)=k(s)n(s)$.

单位向量 $b(s)=t(s)\wedge n(s)$ 是与密切平面正交的，称为在 s 点的从法向量. 由于 $b(s)$ 是一单位向量，因此长度 $|b'(s)|$ 是邻近的密切平面与 s 点的密切平面的变化率的度量，即 $b'(s)$ 度量了在 s 的一个邻域中，曲线以怎样的速率离开 s 点的密切平面(见图 1-15).

为计算 $b'(s)$，我们注意，一方面 $b'(s)$ 垂直于 $b(s)$，另一方面

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s)$$

即 $b'(s)$ 也垂直于 $t(s)$. 因此 $b'(s)$ 平行于 $n(s)$，我们可以用某个函数 $\tau(s)$ 来记

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

(注意：有许多作者用 $-\tau(s)$ 表示我们这里的 $\tau(s)$.)

定义 设 $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ 是一条以弧长 s 为参数的曲线，$s\in I$，且 $\alpha''(s)\neq 0$. 则由 $b'(s)=\tau(s)n(s)$ 定义的数 $\tau(s)$ 称为 α 在 s 的**挠率**.

如果 α 是一平面曲线(即 $\alpha(I)$ 包含在一个平面中)，则此曲线所在的平面与密切平面一致，因此 $\tau\equiv 0$. 反之，如果 $\tau\equiv 0$(且 $k\neq 0$)，我们有 $b(s)=b_0=$常数，因此

$$(\alpha(s)\cdot b_0)' = \alpha'(s)\cdot b_0 = 0$$

可见 $\alpha(s)\cdot b_0=$常数，因而 $\alpha(s)$ 包含在垂直于 b_0 的平面中. 这里，k 处处不等于零的条件是实质性的. 在习题 10 中我们将给出个例子，例中 τ 能定义为恒等于零，但曲线不是平面曲线.

挠率与曲率不同，它可以是正的，也可以是负的，挠率的符号具有几何意义，这点将在以后论述(见 1.6).

注意：当改变定向时，由于 $b=t\wedge n$，从法向量的符号也跟着改变. 由此推得 $b'(s)$，以及挠率在改变定向时是不变的.

让我们总结一下我们的观点. 对参数 s 的每个值，我们给定三个正交单位向量 $t(s)$，$n(s)$，$b(s)$. 它们形成的三面体称为在 s 的 Frenet 标架. 当向量 $t(s)$ 和 $b(s)$ 的导数 $t'(s)=kn$，$b'(s)=\tau n$ 用基 $\{t, n, b\}$ 表达时，产生了一些几何的量(曲率 k 和挠率 τ)，这些量使我们了解 α 在 s 的一个邻域中的行为.

对其他的局部几何量的探索，引导我们去计算 $n'(s)$. 然而，由于 $n=b\wedge t$，我们有

$$n'(s)=b'(s)\wedge t(s)+b(s)\wedge t'(s)=-\tau b-kt$$

我们又得到曲率和挠率.

为以后的应用，我们将称下列方程

$$\begin{cases}t'=kn\\n'=-kt-\tau b\\b'=\tau n\end{cases}$$

为 Frenet 公式(为方便起见，我们省去了参数 s). 在这一部分，以下几个专门名词是常用的. tb 平面称为从切平面，而 nb 平面称为法平面. 包含 $n(s)$ 且通过 $\alpha(s)$ 的直线称为主法线，包含 $b(s)$ 且通过 $\alpha(s)$ 的直线称为从法线. 曲率的倒数 $R=1/k$ 称为在 s 点的曲率半径. 当然，很容易证明：一个半径为 r 的圆的曲率半径是 r.

实际上，我们可以认为，$\mathbb{R}^3$ 中的曲线是从一根直线通过弯曲(曲率)和扭转(挠率)而得到的. 从这种解释去思考，我们就会去推测以下的结论，粗略地说，这个结论表明 k 和 τ 能完全描述曲线的局部行为.

曲线局部理论的基本定理　给定可微函数 $k(s)>0$ 和 $\tau(s)$，$s\in I$，则存在一正则参数曲线 α：$I\to\mathbb{R}^3$，使 s 为 α 的弧长，$k(s)$ 为 α 的曲率，$\tau(s)$ 为 α 的挠率. 而且，满足同样条件的其他任何曲线 $\bar{\alpha}$ 与 α 只相差一个刚体运动，即存在 $\mathbb{R}^3$ 的一个具有正的行列式的正交线性映照 ρ 和一个向量 c，使 $\bar{\alpha}=\rho\circ\alpha+c$.

以上的结论是正确的. 完整的证明涉及常微分方程的解的存在和唯一性定理，将在第 4 章的附录中给出. 然而，具有同样的 s，$k(s)$ 和 $\tau(s)$ 的两曲线之间只差一个刚体运动的唯一性的证明却是简单的，可以在这里给出.

基本定理的唯一性部分的证明　我们首先注意到，在刚体运动下弧长、曲率和挠率是不变的；这意味着，举个例子来说，如果 M：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是一刚体运动，且 $\alpha=\alpha(t)$ 是一参数曲线，则

$$\int_a^b\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|dt=\int_a^b\left|\frac{d(M\circ\alpha)}{dt}\right|dt$$

这似乎是合理的，因为这些概念是使用某些导数的内积或向量积来定义的. (这些导数在平移时是不变的，而内积和向量积是以向量的长度和角度来表达的，因此在刚体运动时也是不变的.)仔细的验证留作习题(见习题 6).

现在，假设两条曲线 $\alpha=\alpha(s)$ 和 $\bar{\alpha}=\bar{\alpha}(s)$ 满足条件 $k(s)=\bar{k}(s)$ 和 $\tau(s)=\bar{\tau}(s)$，$s\in I$. 设 t_0，n_0，b_0 和 $\bar{t}_0$，$\bar{n}_0$，$\bar{b}_0$ 分别为 α 和 $\bar{\alpha}$ 在 $s=s_0\in I$ 的 Frenet 标架. 显然，存在一个使 $\bar{\alpha}(s_0)$ 到 $\alpha(s_0)$，使 $\bar{t}_0$，$\bar{n}_0$，$\bar{b}_0$ 到 t_0，n_0，b_0 的刚体运动. 因此，对 $\bar{\alpha}$ 作此刚性运动后，我们有 $\bar{\alpha}(s_0)=\alpha(s_0)$，并且 α 的 Frenet 标架 $t(s)$，$n(s)$，$b(s)$ 和 $\bar{\alpha}$ 的 Frenet 标架 $\bar{t}(s)$，$\bar{n}(s)$，$\bar{b}(s)$ 分别满足 Frenet 方程：

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{ds}=kn\\[2mm]\dfrac{dn}{ds}=-kt-\tau b\\[2mm]\dfrac{db}{ds}=\tau n\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\dfrac{d\bar{t}}{ds}=k\bar{n}\\[2mm]\dfrac{d\bar{n}}{ds}=-k\bar{t}-\tau\bar{b}\\[2mm]\dfrac{d\bar{b}}{ds}=\tau\bar{n}\end{cases}$$

而 $t(s_0)=\bar{t}(s_0)$，$n(s_0)=\bar{n}(s_0)$，$b(s_0)=\bar{b}(s_0)$.

现在，利用 Frenet 方程，我们看到对所有的 $s\in I$，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\{|t-\bar{t}|^2+|n-\bar{n}|^2+|b-\bar{b}|^2\}\\&=\langle t-\bar{t},t'-\bar{t}'\rangle+\langle b-\bar{b},b'-\bar{b}'\rangle+\langle n-\bar{n},n'-\bar{n}'\rangle\\&=k\langle t-\bar{t},n-\bar{n}\rangle+\tau\langle b-\bar{b},n-\bar{n}\rangle-k\langle n-\bar{n},t-\bar{t}\rangle-\tau\langle n-\bar{n},b-\bar{b}\rangle\\&=0\end{aligned}$$

因此大括号中的表达式是常数，而且因为对 $s=s_0$ 它是零，所以它恒等于零，从而对所有的 $s\in I$，我们有 $t(s)=\bar{t}(s)$，$n(s)=\bar{n}(s)$，$b(s)=\bar{b}(s)$. 由于

$$\frac{d\alpha}{ds}=t=\bar{t}=\frac{d\bar{\alpha}}{ds}$$

我们得到 $(d/ds)(\alpha-\bar{\alpha})=0$. 因此 $\alpha(s)=\bar{\alpha}(s)+a$，这里 a 是一常向量. 由于 $\alpha(s_0)=\bar{\alpha}(s_0)$，我们有 $a=0$；因此，对所有的 $s\in I$，我们有 $\alpha(s)=\bar{\alpha}(s)$. 证毕.

注 1 在曲线为平面曲线 $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$ 的特殊情况，有可能给曲率 k 一个符号. 为此，设 $\{e_1, e_2\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的自然基(见 1.4)，并定义法向量 $n(s)$，$s\in I$，使基 $\{t(s), n(s)\}$ 与基 $\{e_1, e_2\}$ 有相同的定向，则曲率 k 由下式定义：

$$\frac{dt}{ds}=kn$$

k 可能是正的，也可能是负的. 显然，$|k|$ 符合前面的定义，而且当我们改变 α 的定向，或改变 $\mathbb{R}^2$ 的定向时，k 的符号都要改变(图 1-16).

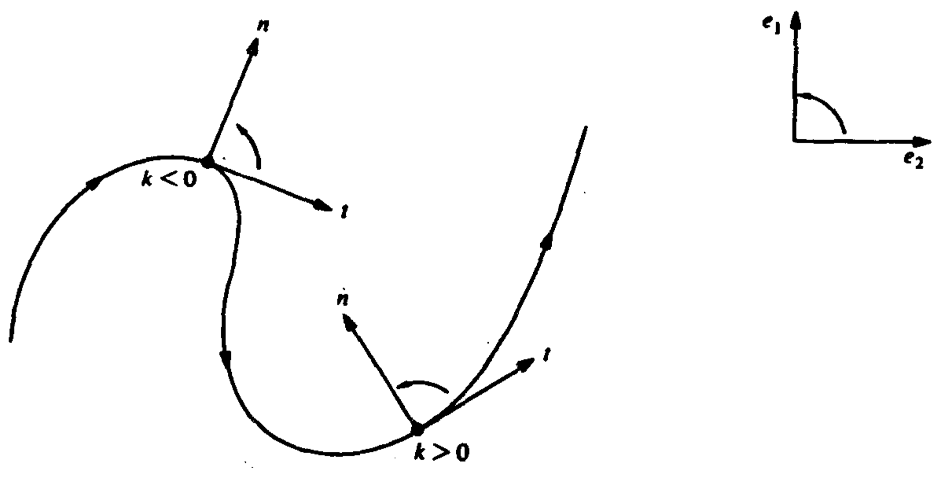


图 1-16

还应该注意到的是：在平面曲线的情况($\tau\equiv 0$). 上述基本定理的证明事实上是很简单的(见习题 9).

注 2 给定一正则的参数曲线 $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$(不一定以弧长为参数)，有可能得到一条以弧长为参数的曲线 $\beta: J\to\mathbb{R}^3$，它与 α 的轨迹相同. 事实上，设

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt, t, t_0 \in I$$

由于 $ds/dt = |\alpha'(t)| \neq 0$，所以函数 $s = s(t)$ 具有可微的反函数 $t = t(s)$，$s \in s(I) = J$，这里，用一种有些混淆的记法，t 也就是 s 的反函数 s^{-1}. 现在设 $\beta = \alpha \circ t$; $J \to \mathbb{R}^3$，显然 $\beta(J) = \alpha(I)$，且 $|\beta'(s)| = |\alpha'(t) \cdot (dt/ds)| = 1$. 这表示 β 具有与 α 相同的轨迹，而且 β 是以弧长为参数的. 通常说 β 是 $\alpha(I)$ 的**用弧长的再参数化**.

这个事实使我们能够将前面定义的所有局部概念扩充到具任意参数的正则曲线. 因此，我们说 α: $I \to \mathbb{R}^3$ 在 $t \in I$ 的曲率 $k(t)$，是 $\alpha(I)$ 用弧长的再参数化 β: $J \to \mathbb{R}^3$ 在相应的点 $s = s(t)$ 的曲率. 这显然是与 β 的选择无关的，它表明了在 1.3 结尾部分所作的仅考虑以弧长为参数的曲线的限制不是实质性的.

在应用时，如果能有一些使用任意参数来表示几何量的明确公式，往往是方便的，我们将在习题 12 中给出一些这类公式.

习题

如果没有明确说明，这里 α: $I \to \mathbb{R}^3$ 总表示一条以弧长为参数的曲线，且对所有的 $s \in I$，曲线 $k(s) \neq 0$.

1. 已知参数曲线(螺旋线)

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right), \quad s \in \mathbb{R}$$

这里 $c^2 = a^2 + b^2$，

a. 证明参数 s 是弧长.

b. 求 α 的曲率和挠率.

c. 求 α 的密切平面.

d. 证明：包含 $n(s)$ 并通过 $\alpha(s)$ 的直线与 z 轴的交角总等于 $\pi/2$.

e. 证明：α 的切线与 z 轴的交角是不变的.

*2. 证明：α 的挠率是

$$\tau(s) = -\frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s)}{|k(s)|^2}$$

3. 假设 $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$（即 α 是平面曲线），并按上文所述给 k 定一个符号. 将向量 $t(s)$ 平行移动，使得 $t(s)$ 的出发点和 $\mathbb{R}^2$ 的原点重合，则 $t(s)$ 的端点描画出的参数曲线 $s \to t(s)$ 称为 α 的**切线的指标线**. 设 $\theta(s)$ 是按 $\mathbb{R}^2$ 的定向从 e_1 到 $t(s)$ 的夹角. 证明(a)和(b)(注意我们假设 $k \neq 0$).

a. 切线的指标线是正则参数曲线.

b. $dt/ds = (d\theta/ds)n$，即 $k = d\theta/ds$.

*4. 假设一参数曲线的所有法线通过一个固定点. 证明：此曲线的轨迹包含在一个圆周中.

5. 设正则参数曲线 α 具有如下性质：它的所有的切线通过一固定点.

a. 证明：α 的轨迹是一条直线(或一条直线段).

b. 如果 α 不是正则的，a 中的这个结论是否仍然正确？

6. $\mathbb{R}^3$ 中由向量 v 确定的平移是指映照 A：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，$A(p)=p+v$，$p\in\mathbb{R}^3$. 如果对所有的向量 u，$v\in\mathbb{R}^3$ 都有 $\rho u\cdot\rho v=u\cdot v$，则线性映照 ρ：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 称为正交变换. $\mathbb{R}^3$ 上的一个刚体运动，是一个平移和一个具有正的行列式的正交变换合成的结果(把具有正的行列式作为条件，是因为我们希望刚体运动保持定向).

a. 证明：在具有正的行列式的正交变换下，向量的范数和两个向量的夹角 θ，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，是不变的.

b. 证明：在具有正的行列式的正交变换下，两个向量的向量积是不变的. 如果我们去掉关于行列式的条件，此结论是否仍然正确？

c. 证明：一条参数曲线的弧长、曲率和挠率(只要有定义时)在刚体运动下是不变的.

*7. 设 α：$I\to\mathbb{R}^2$ 是一条平面正则的参数曲线(任意参数)，并按注 1 定义 $n=n(t)$ 和 $k=k(t)$. 假设 $k(t)\neq 0$，$t\in I$. 在这种情况下，下列曲线称为 α 的渐屈线(图 1-17).

$$\beta(t)=\alpha(t)+\frac{1}{k(t)}n(t),\quad t\in I$$

a. 证明：α 的渐屈线在 t 点的切线，是 α 在 t 点的法线.

b. 考虑 α 上两个相邻点 t_1，t_2，$t_1\neq t_2$ 的法线. 令 t_1 趋近 t_2，证明：两根法线的交点收敛于 α 的渐屈线轨迹上的一点.

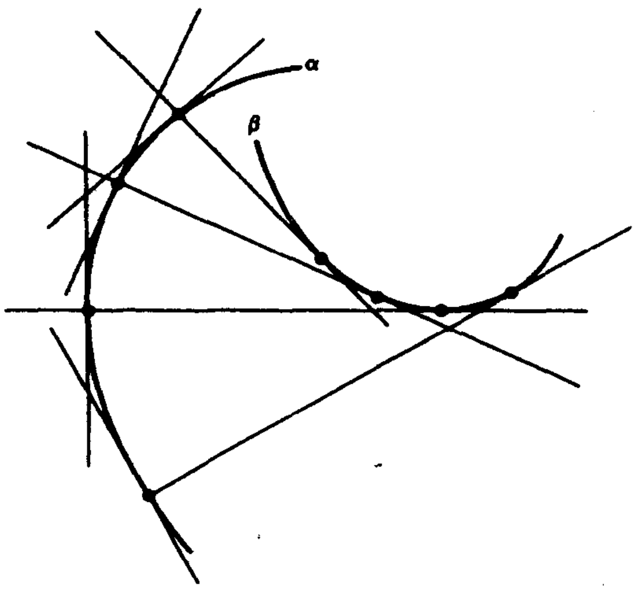


图 1-17

8. 参数曲线(任意参数)

$$\alpha(t)=(t,\cosh t),\quad t\in\mathbb{R}$$

的轨迹称为悬链线.

a. 证明此悬链线的带符号的曲率(参见注 1)是

$$k(t)=\frac{1}{\cosh^2 t}$$

b. 证明此悬链线的渐屈线(参见习题 7)是

$$\beta(t)=(t-\sinh t\cosh t, 2\cosh t)$$

9. 已知可微函数 $k(s)$，$s\in I$. 证明：以 $k(s)=k$ 为曲率的平面参数曲线由下式给定

$$\alpha(s)=\left(\int\cos\theta(s)ds+a,\int\sin\theta(s)ds+b\right),\quad \theta(s)=\int k(s)ds+\varphi$$

而且此曲线除了向量(a, b)的一个平移和角 φ 的一个旋转外是完全确定的.

10. 已知映照

$$\alpha(t)=\begin{cases}(t,0,e^{-1/t^2}), & 当\ t>0\\ (t,e^{-1/t^2},0), & 当\ t<0\\ (0,0,0), & 当\ t=0\end{cases}$$

a. 证明 α 是可微曲线.

b. 证明：对所有的 t，α 是正则的；且当 $t\neq0$，$t\neq\pm\sqrt{2/3}$时曲率 $k(t)\neq0$，而 $k(0)=0$.

c. 证明：当 $t\to0$，$t>0$ 时的密切平面的极限是平面 $y=0$，而当 $t\to0$，$t<0$ 时的密切平面的极限是平面 $z=0$(这暗示法向量在 $t=0$ 处不连续，并说明了为什么我们要将 $k=0$ 的点排除在外).

d. 证明：即使 α 不是平面曲线，能够定义 τ 使 $\tau\equiv0$.

11. 平面曲线常常用极坐标 $\rho=\rho(\theta)$，$a\leqslant\theta\leqslant b$ 给出.

a. 证明：弧长是

$$\int_a^b\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\theta$$

这里符号“′”表示对 θ 的导数.

b. 证明：曲率是

$$k(\theta)=\frac{2(\rho')^2-\rho\rho''+\rho^2}{[(\rho')^2+\rho^2]^{3/2}}$$

12. 设 α：$I\to R^3$ 是一条正则参数曲线(不一定以弧长为参数). 设 β：$J\to\mathbb{R}^3$ 是 $\alpha(I)$用由 $t_0\in I$ 开始计算的弧长 $s=s(t)$的再参数化(见注 2). 设 $t=t(s)$是 s 的反函数，并令 $d\alpha/dt=\alpha'$，$d^2\alpha/dt^2=\alpha''$，余类推. 证明：

a. $dt/ds=1/|\alpha'|$，$d^2t/ds^2=-(\alpha'\cdot\alpha''/|\alpha'|^4)$.

b. α 在 $t\in I$ 的曲率是

$$k(t)=\frac{|\alpha'\wedge\alpha''|}{|\alpha'|^3}$$

c. α 在 $t\in I$ 的挠率是

$$\tau(t)=-\frac{(\alpha'\wedge\alpha'')\cdot\alpha'''}{|\alpha'\wedge\alpha''|^2}$$

d. 如果 α：$I\to\mathbb{R}^2$ 是一平面曲线 $\alpha(t)=(x(t), y(t))$，则 α 在 t 点的带符号的曲率(见注 1)是

$$k(t)=\frac{x'y''-x''y'}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}$$

*13. 假设对所有的 $s\in I$，有 $\tau(s)\neq 0$ 和 $k'(s)\neq 0$. 证明：$\alpha(I)$落在球面上的充要条件是

$$R^2+(R')^2T^2=\text{常数}$$

这里 $R=1/k$，$T=1/\tau$，R'是 R 关于 s 的导数.

14. 设 α：$(a,b)\to\mathbb{R}^2$ 是一条正则的平面参数曲线. 假设存在 t_0，$a<t_0<b$，使从原点到 α 的轨迹的距离 $|\alpha(t)|$ 在 t_0 点最大. 证明：α 在 t_0 的曲率满足 $|k(t_0)|\geqslant 1/|\alpha(t_0)|$.

*15. 设曲线 α 处处具有非零挠率. 证明：α 的向量函数 $b=b(s)$（从法向量）决定了 α 的曲率$k(s)$的值和挠率 $\tau(s)$的绝对值.

*16. 设曲线 α 处处具有非零挠率：证明：α 的向量函数 $n=n(s)$（主法向量）决定了 α 的曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$的值.

17. 一般来说，当曲线 α 的切线与一固定的方向形成一个不变的角时，称 α 为螺旋线. 假设$\tau(s)\neq 0$，$s\in I$. 证明：

*a. 当且仅当 $k/\tau=$常数时，α 是一条螺旋线.

*b. 当且仅当包含 $n(s)$并通过 $\alpha(s)$的直线平行于一固定平面时，α 是一条螺旋线.

*c. 当且仅当包含 $b(s)$并通过 $\alpha(s)$的直线与一固定方向形成一常数角时，α 是一条螺旋线.

d. 曲线

$$\alpha(s)=\left(\frac{a}{c}\int\sin\theta(s)ds,\frac{a}{c}\int\cos\theta(s)ds,\frac{b}{c}s\right),a^2=b^2+c^2$$

是螺旋线，且 $k/\tau=b/a$.

*18. 设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 是正则参数曲线（不一定以弧长为参数），$k(t)\neq 0$，$\tau(t)\neq 0$，$t\in I$. 如果存在曲线 $\bar{\alpha}$：$I\to\mathbb{R}^3$，使 α 和 $\bar{\alpha}$ 在 $t\in I$ 的主法线相同，则曲线 α 称为 Bertrand 曲线. 此时，曲线 $\bar{\alpha}$ 称为 α 的 Bertrand 侣线，且我们有

$$\bar{\alpha}(t)=\alpha(t)+rn(t)$$

证明：

a. r 是常数.

b. 当且仅当存在线性关系

$$Ak(t)+B\tau(t)=1,\quad t\in I$$

时，α 是 Bertrand 曲线，这里 A，B 是非零常数，k 和 τ 分别是 α 的曲率和挠率.

c. 如果 α 有多于一条的 Bertrand 侣线，则它有无限多条 Bertrand 侣线. 当且仅当 α 是一圆柱螺旋线时才出现这种情况.

1.6 局部规范形式[⊖]

几何学中最有效的解题方法之一，是找出适合这个问题的坐标系统. 研究曲线在 s 点的邻域中的局部性质时，我们有一个自然的坐标系统，即在 s 点的 Frenet 标架. 因此把曲线参照于这个标架是方便的.

设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 是一条没有一阶奇点的，以弧长为参数的曲线. 我们将标架 $t(s_0)$，$n(s_0)$，

⊖ 初次阅读时本节可以略去.

$b(s_0)$作为$\mathbb{R}^3$的基，来写出此曲线在s_0的一个邻域中的方程．不失一般性，我们可以假设$s_0=0$，并考虑（有限的）Taylor展开式

$$\alpha(s)=\alpha(0)+s\alpha'(0)+\frac{s^2}{2}\alpha''(0)+\frac{s^3}{6}\alpha'''(0)+R$$

这里$\lim_{s\to 0}R/s^3=0$，由于$\alpha'(0)=t$，$\alpha''(0)=kn$及

$$\alpha'''(0)=(kn)'=k'n+kn'=k'n-k^2t-k\tau b$$

我们得到

$$\alpha(s)-\alpha(0)=\left(s-\frac{k^2s^3}{3!}\right)t+\left(\frac{s^2k}{2}+\frac{s^3k'}{3!}\right)n-\frac{s^3}{3!}k\tau b+R$$

这里所有的项都是在$s=0$处计算的．

现在让我们这样来取坐标系O_{xyz}：使原点O和$\alpha(0)$重合，且$t=(1,0,0)$，$n=(0,1,0)$，$b=(0,0,1)$．在这些条件下，$\alpha(s)=(x(s),y(s),z(s))$由下式给定：

$$\begin{aligned}x(s)&=s-\frac{k^2s^3}{6}+R_x\\ y(s)&=\frac{k}{2}s^2+\frac{k's^3}{6}+R_y\\ z(s)&=-\frac{k\tau}{6}s^3+R_z\end{aligned}\tag{1}$$

这里$R=(R_x,R_y,R_z)$．表达式(1)称为α在$s=0$的一个邻域中的局部规范形式．在图1-18中描绘的是对较小的s，α的轨迹在tn，tb和nb平面上的投影的略图．

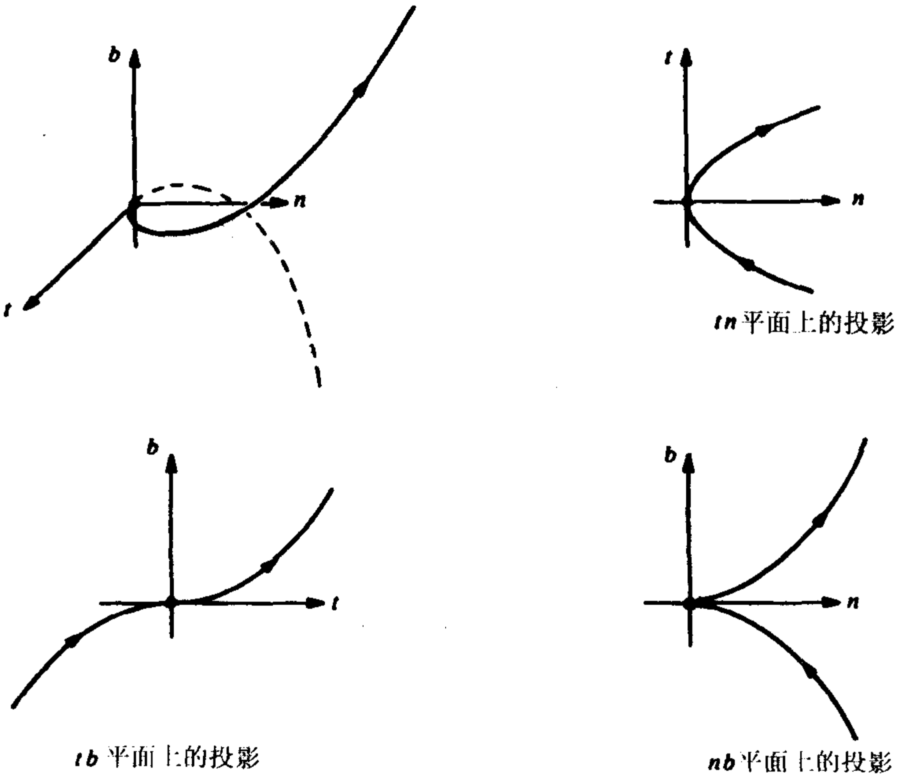


图 1-18

下面我们将叙述局部规范形式的一些几何应用．在习题中可找到更进一步的应用．

第一个应用，是以下关于挠率符号的说明，从(1)的第三个方程可知，如果 $\tau<0$ 且 s 充分小，则 $z(s)$ 随 s 而递增．让我们约定，称 b 所指的一面为密切平面的"正面"．则由于 $z(0)=0$，当我们沿弧长增加的方向描绘曲线时，曲线将在 $s=0$ 处穿过密切平面，指向正面(见图 1-19)．相反，如果 $\tau>0$，曲线(沿弧长增加的方向描绘)将穿过密切平面，指向与正面相反的一面．

1.5 中习题 1 的螺旋线具有负挠率．螺旋线

$$\alpha(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},a\sin\frac{s}{c},-b\frac{s}{c}\right)$$

是具有正挠率的曲线的一个例子，它是由第一条螺旋线关于 xz 平面反射而得到的(见图 1-19)．



图 1-19

注 以 $b'=-\tau n$ 来定义挠率也是很普遍的．若采用这种定义，习题 1 中的螺旋线的挠率就变成正的了．

规范形式的另一个推论是：存在 $s=0$ 的一个邻域 $J\subset I$，使 $\alpha(J)$ 完全包含在从切平面上向量 n 所指的一面(见图 1-18)．事实上，由于 $k>0$，我们得到：对充分小的 s，$y(s)\geqslant0$；当且仅当 $s=0$ 时，$y(s)=0$．这证明了我们的断言．

作为规范形式的最后一个应用，我们提及密切平面的下述性质：在 s 点的密切平面，是由 s 点的切线和点 $\alpha(s+h)$ 所决定的平面当 $h\to0$ 时的极限位置．为证明这点，让我们假设 $s=0$．则包含 $s=0$ 处的切线的每一个平面是 $z=cy$ 或 $y=0$ 的形式．平面 $y=0$ 是从切平面，如上所见它不包含 $\alpha(0)$ 附近的点(除了 $\alpha(0)$ 本身)，所以我们可以不予考虑．平面 $z=cy$ 经过 $s+h$ 的条件是($s=0$)

$$c=\frac{z(h)}{y(h)}=\frac{-\frac{k}{6}\tau h^3+\cdots}{\frac{k}{2}h^2+\frac{k^2}{6}h^3+\cdots}$$

令 $h\to0$，则我们看到 $c\to0$．因此，平面 $z(s)=c(h)y(s)$ 的极限位置是平面 $z=0$，即密切平面．这正是我们想证明的．

习题

*1. 设以弧长为参数的曲线 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 的曲率 $k(s)\neq0$，$s\in I$．

设 P 为满足以下两个条件的平面：

(1) P 包含 s 点的切线．

(2)对 s 的任何给定的邻域 $J\subset I$，在 P 的两边总都存在 $\alpha(J)$ 的点.

证明：P 是 α 在 s 的密切平面.

2. 设以弧长为参数的曲线 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 的曲率 $k(s)\neq0$，$s\in I$. 证明：

a. 在 s 点的密切平面，是通过 $\alpha(s)$，$\alpha(s+h_1)$，$\alpha(s+h_2)$ 的平面当 h_1，$h_2\to0$ 时的极限位置.

b. 通过 $\alpha(s)$，$\alpha(s+h_1)$，$\alpha(s+h_2)$ 的圆当 h_1，$h_2\to0$ 时的极限位置是在 s 点的密切平面上的一个圆；其圆心在包含 $n(s)$ 的直线上，其半径是曲率半径 $1/k(s)$. 这个圆称为在 s 点的密切圆.

3. 证明：正则参数曲线 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 的曲率 $k(t)\neq0$ 是平面曲线 $\pi\circ\alpha$ 在 t 点的曲率，这里 π 是 α 在 t 点的密切平面上的垂直投影.

1.7　平面曲线的一些整体性质㊀

在这一节中，我们想叙述曲线的整体微分几何的一些结果. 甚至在平面曲线的简单情况，这个课题已经提供了一些不平凡的定理和有趣的问题和例子. 这里，为了叙述这部分材料，我们必须不加证明地接受一些能够理解的事实. 我们将尽可能仔细地精确说明这些事实. 虽然我们要在以后以更系统的方式回过来论述整体微分几何(第 5 章)，但我们相信，早一点提出这方面内容能增进兴趣和启发思想.

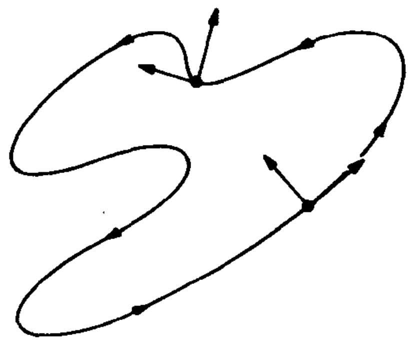
本节将由浅入深地介绍以下三个课题：(A)等周不等式，(B)四顶点定理，(C)Cauchy-Crofton 公式. 这些课题是完全独立的，初次阅读时可以略过其中某一部分或全部内容.

在闭区间 $[a, b]$ 中的一个可微函数是定义在一个包含 $[a, b]$ 的开区间的可微函数的限制.

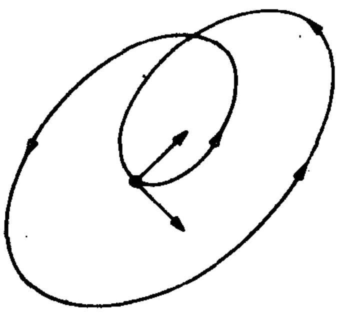
一条正则参数曲线 α：$[a, b]\to\mathbb{R}^2$，如果 α 以及它的所有导数在 a 点和 b 点的值相同，即

$$\alpha(a)=\alpha(b),\quad \alpha'(a)=\alpha'(b),\quad \alpha''(a)=\alpha''(b),\cdots$$

则称为平面闭曲线；如果曲线 α 此外不再自身相交，则 α 称为简单闭曲线，即如果 t_1，$t_2\in[a, b)$，$t_1\neq t_2$，则 $\alpha(t_1)\neq\alpha(t_2)$(图 1-20).



(a)简单闭曲线



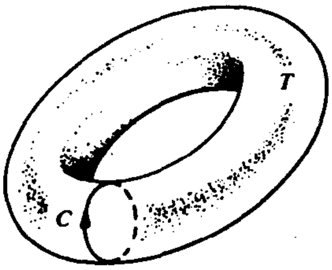
(b)(非简单)闭曲线

图　1-20

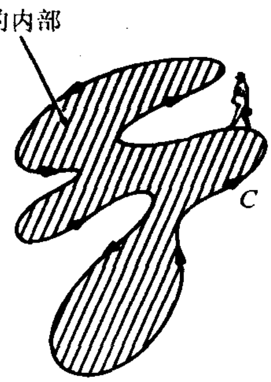
㊀　初次阅读时本节可以略去.

我们通常考虑以弧长 s 为参数的曲线 α：$[0, l]\to\mathbb{R}^2$，因此 l 是 α 的长度. 有时候我们提到简单闭曲线 c，是指这种曲线的轨迹. 如同 1.5 的注 1 中所述，α 的曲率将附带一个符号(见图 1-20).

我们假设：平面上任意一条简单闭曲线 C 总围成平面上的一个称为 C 的**内部**的区域. 这是所谓 Jordan 曲线定理的一部分(证明见 5.6 定理 1)，这个定理对诸如环面(炸面饼圈的表面，见图 1-21(a))上的简单闭曲线并不成立. 无论什么时候我们谈到简单闭曲线 C 所包围的面积，都意味着 C 的内部的面积. 我们进一步假设简单闭曲线的参数能这样地选择，以致当沿着曲线按参数增加的方向前进时，曲线的内部始终在左边(图 1-21(b)). 这样的曲线称为**正定向的**.



(a)环面 T 上的简单闭曲线 C：C 在 T 上并不围成区域



(b)C 是正定向的

图 1-21

A. 等周不等式

这也许是微分几何中最古老的整体性定理，它与下面的(等周)问题有关. 在平面上所有长度为 l 的简单闭曲线中，哪一条所包围的面积最大? 等周问题的这种形式，希腊人早已所知，他们也知道答案是圆. 然而，关于圆是等周问题的答案的令人满意的证明，却在很久以后才出现. 主要的原因似乎是最早的一些证明都假设了解的存在性. 直到 1870 年才由 K. Weierstrass 指出，许多类似的问题并没有解，他给出了等周问题解的存在性的完全的证明. Weierstrass 的证明有点难懂，这是他本人发展的求某种积分的最大值(或最小值)的理论的一个推论(这个理论称为变分学，等周问题是用这个理论处理的问题中的一个典型例子). 以后，人们找到了更直接的证明. 我们将要叙述的简单证明是 E. Schmidt 提出的(1939). 另一种直接的证明和关于这部分内容的更进一步的参考文献，请参看参考书目中的[10].

我们将运用以下的公式，来求一条正定向简单闭曲线 $\alpha(t)=(x(t), y(t))$ 所围的面积 A，这里 $t\in[a, b]$ 是任意的参数：

$$A=-\int_a^b y(t)x'(t)dt=\int_a^b x(t)y'(t)dt=\frac{1}{2}\int_a^b (xy'-yx')dt \tag{1}$$

注意，第二个公式是由第一个公式结合下面的观察而得到的：由于曲线是封闭的，

$$\int_a^b xy'dt = \int_a^b (xy)'dt - \int_a^b x'ydt$$
$$= [xy(b) - xy(a)] - \int_a^b x'ydt$$
$$= -\int_a^b x'ydt$$

第三个公式是由前两个公式直接得到的.

为证明式(1)中的第一个公式，我们首先考虑图 1-22 的情况．图 1-22 中曲线由两条平行于 y 轴的直线段和能写成形式

$$y = f_1(x) \text{ 与 } y = f_2(x) \qquad x \in [x_0, x_1], f_1 > f_2$$

的两段弧组成．显然，此曲线包围的面积是

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$$

由于此曲线是正定向的，按图 1-22 的记法，我们有

$$A = -\int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt$$
$$= -\int_a^b y(t)x'(t)dt$$

这是因为沿着平行于 y 轴的线段 $x'(t)=0$．这样，我们证明了这种情况下的式(1).

要证明一般的情况，必须证明有可能把曲线所围的区域分成有限个上述类型的区域．这显然是可能的(图 1-23)，只要在此平面上存在一条直线 E，使 $\alpha(t)$ 到这条直线的距离 $\rho(t)$ 是一个具有有限多个临界点的函数(临界点是 $\rho'(t)=0$ 的点)，而这后一个断言是正确的，但我们不准备证明．然而我们要提到，式(1)也能够利用平面上的 Stokes 定理(Green 定理)得到(见习题 15).

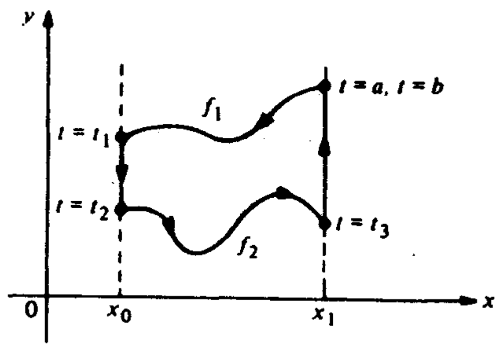


图　1-22

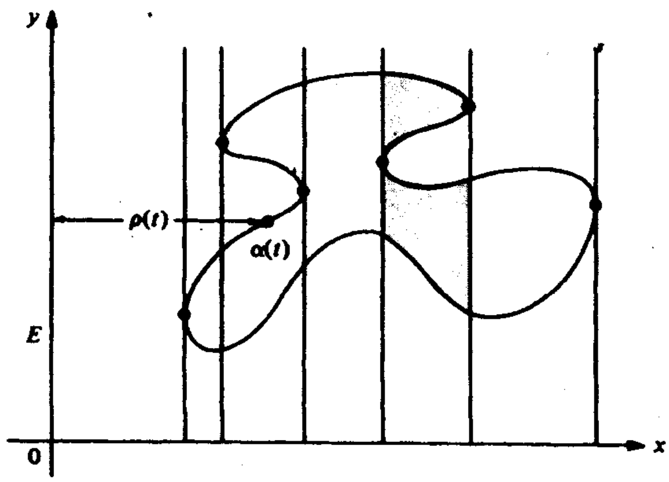


图　1-23

定理 1(等周不等式)　设 C 是一条长度为 l 的简单平面闭曲线，A 是 C 所围区域的面积，则

$$l^2 - 4\pi A \geqslant 0 \tag{2}$$

当且仅当 C 是一个圆时等式成立.

证明 设 E 和 E' 是与闭曲线 C 不接触的两条平行直线，移动这两根平行直线直到它们第一次与 C 相遇，这样我们得到 C 的两根平行的切线 L 和 L'，使曲线 C 全部包含在 L 和 L' 所确定的长条中．考虑一个与 L 和 L' 均相切且与 C 不相遇的圆 S^1．设 O 是 S^1 的圆心，以 O 为原点取一坐标系，使 x 轴垂直于 L 和 L'(图 1-24)．以弧长为参数表示 C，$\alpha(s)=(x(s),\ y(s))$，使得它是正定向的，而且 L 和 L' 的切点分别是 $s=0$ 和 $s=s_1$.

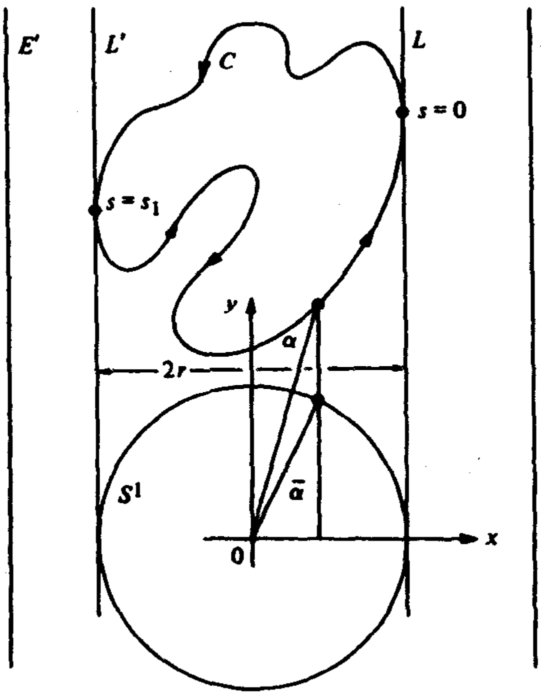


图 1-24

我们可假设 S^1 的方程为

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), \quad s \in [0, l]$$

这里 $2r$ 是 L 和 L' 之间的距离．利用式(1)，并用 $\bar{A}$ 表示 S^1 所围的面积，我们有

$$A = \int_0^l xy'ds, \quad \bar{A} = \pi r^2 = -\int_0^l \bar{y}x'ds$$

于是

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l (xy' - \bar{y}x')ds \leqslant \int_0^l \sqrt{(xy' - \bar{y}x')^2}ds \\ &\leqslant \int_0^l \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)}ds \\ &= \int_0^l \sqrt{x^2 + \bar{y}^2}ds = lr \end{aligned} \tag{3}$$

我们现在注意这个事实：两个正数的几何平均值小于或等于它们的算术平均值，并且当且仅当它们相等时等式成立．因此

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2}\leqslant\frac{1}{2}(A+\pi r^2)\leqslant\frac{1}{2}lr \tag{4}$$

即 $4\pi Ar^2\leqslant l^2r^2$，所以式(2)成立．

现在假设式(2)中的等号成立．则式(3)和(4)中的等号一定处处成立．由式(4)中的等式可知 $A=\pi r^2$．于是 $l=2\alpha r$，并且 r 与 L 的方向无关．此外，式(3)中的等式蕴涵

$$(xy'-\bar{y}x')^2=(x^2+\bar{y}^2)((x')^2+(y')^2)$$

或

$$(xx'+\bar{y}y')^2=0$$

即

$$\frac{x}{y'}=\frac{\bar{y}}{x'}=\frac{\sqrt{x^2+\bar{y}^2}}{\sqrt{(y')^2+(x')^2}}=\pm r$$

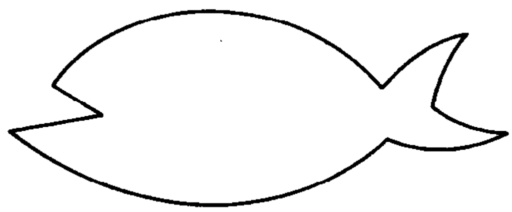
因此 $x=\pm ry'$．由于 r 与 L 的方向选择无关，我们可以在最后一个关系式中将 x 与 y 互换，得到 $y=\pm rx'$．因此

$$x^2+y^2=r^2((x')^2+(y')^2)=r^2$$

C 是一个圆，这正是我们要证明的．证毕．

注 1　很容易验证以上的证明能应用于 C^1 曲线，即对曲线 $\alpha(t)=(x(t),\ y(t))$，$t\in[a,\ b]$，我们仅要求函数 $x(t)$，$y(t)$ 有连续的一阶导数(当然，如果曲线是闭曲线，则 a 点和 b 点的导数相等)．

注 2　等周不等式对一大类曲线均成立．对所考虑的曲线，只要我们能定义弧长和面积，都已经找到行得通的直接证明．为应用的方便，我们指出此定理对分段 C^1 曲线也成立，分段 C^1 曲线即由有限多段 C^1 弧组成的连续曲线．这类曲线可以具有有限多个角点，在角点切线是不连续的(图 1-25)．



分段 C^1 曲线

图　1-25

B. 四顶点定理

我们将需要有关平面闭曲线的更一般的事实．

设 α：$[0,\ l]\to\mathbb{R}^2$ 为由 $\alpha(s)=(x(s),\ y(s))$ 给定的平面闭曲线．由于 s 是弧长，故切向量 $t(s)=(x'(s),\ y'(s))$ 具有单位长度．引入由 $t(s)=(x'(s),\ y'(s))$ 给定的切线指标线 t：$[0,\ l]\to\mathbb{R}^2$ 是较方便的，这是一可微曲线，其轨迹包含在一个半径为 1 的圆上(图 1-26)．注意，此切线指标线的速度向量是

$$\frac{dt}{ds}=(x''(s),y''(s))=\alpha''(s)=kn$$

这里 n 是法向量，按 1.5 的注 2 取定向，k 是 α 的曲率．

设 $\theta(s)$，$0<\theta(s)<2\pi$，是 $t(s)$ 与 x 轴的夹角，即 $x'(t)=\cos\theta(s)$，$y'(s)=\sin\theta(s)$．由于

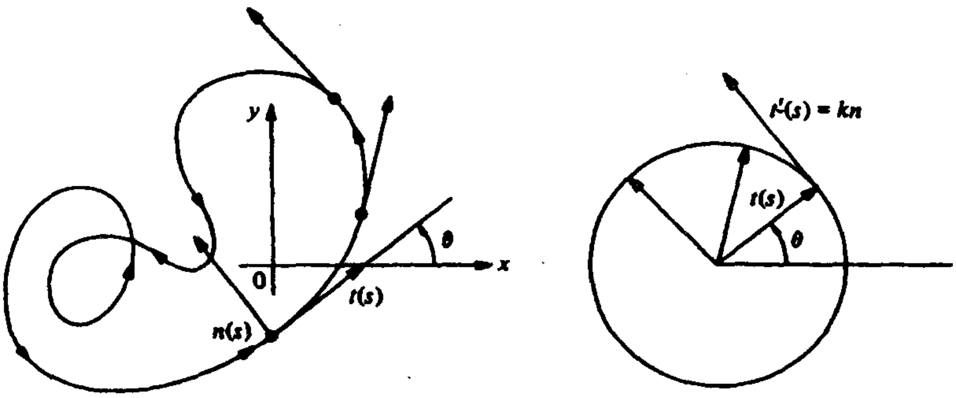


图 1-26

$$\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)}$$

因此，$\theta=\theta(s)$作为可微函数是局部地有定义的(即关于每个 s 在一个小区间内有定义)且

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}(\cos\theta, \sin\theta) = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta) = \theta' n$$

这意味着 $\theta'(s)=k(s)$，并启发我们用

$$\theta(s) = \int_0^s k(s)ds$$

来定义一整体的可微函数 θ：$[0, l]\to\mathbb{R}$. 由于

$$\theta' = k = x'y'' - x''y' = \left(\arctan \frac{y'}{x'}\right)'$$

这个整体函数和前面局部定义的 θ 只差一个常数. 直观上，$\theta(s)$度量了切向量的总的旋转角度，即当我们在曲线 α 上从 0 前进到 s 时，切线指标线上的点 $t(s)$描绘的总的角度. 由于 α 是闭曲线，这个角是 2π 的整数倍 I，即

$$\int_0^l k(s)ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I$$

整数 I 称为曲线 α 的*旋转指标*.

图 1-27 给出了一些曲线及其旋转指标的例子. 注意，当我们改变曲线的定向时，旋转指标改变符号. 而且，所给的定义使得正定向的简单闭曲线的旋转指标总是正的.

下面的定理给出了关于旋转指标的一个重要的整体性质，此定理将在本书的后面部分证明(5.6 定理 2).

切线回转定理 简单闭曲线的旋转指标是±1，这里的符号决定于曲线的定向.

设有正则平面曲线(不一定是闭曲线)α：$[a, b]\to\mathbb{R}^2$，如果对所有的 $t\in[a, b]$，α 的轨迹 $\alpha([a, b])$全部位于由 t 处的切线决定的闭半平面的一边，则称 α 是*凸的*(图 1-28).

正则平面曲线 α：$[a, b]\to\mathbb{R}^2$ 的*顶点*是使 $k'(t)=0$ 的点 $t\in[a, b]$. 例如，不等轴的椭圆恰有四个顶点，即轴与椭圆相遇的点(见习题 3). 一个有趣的整体事实是，这个数正是一切凸闭曲线所具有的最少的顶点数.

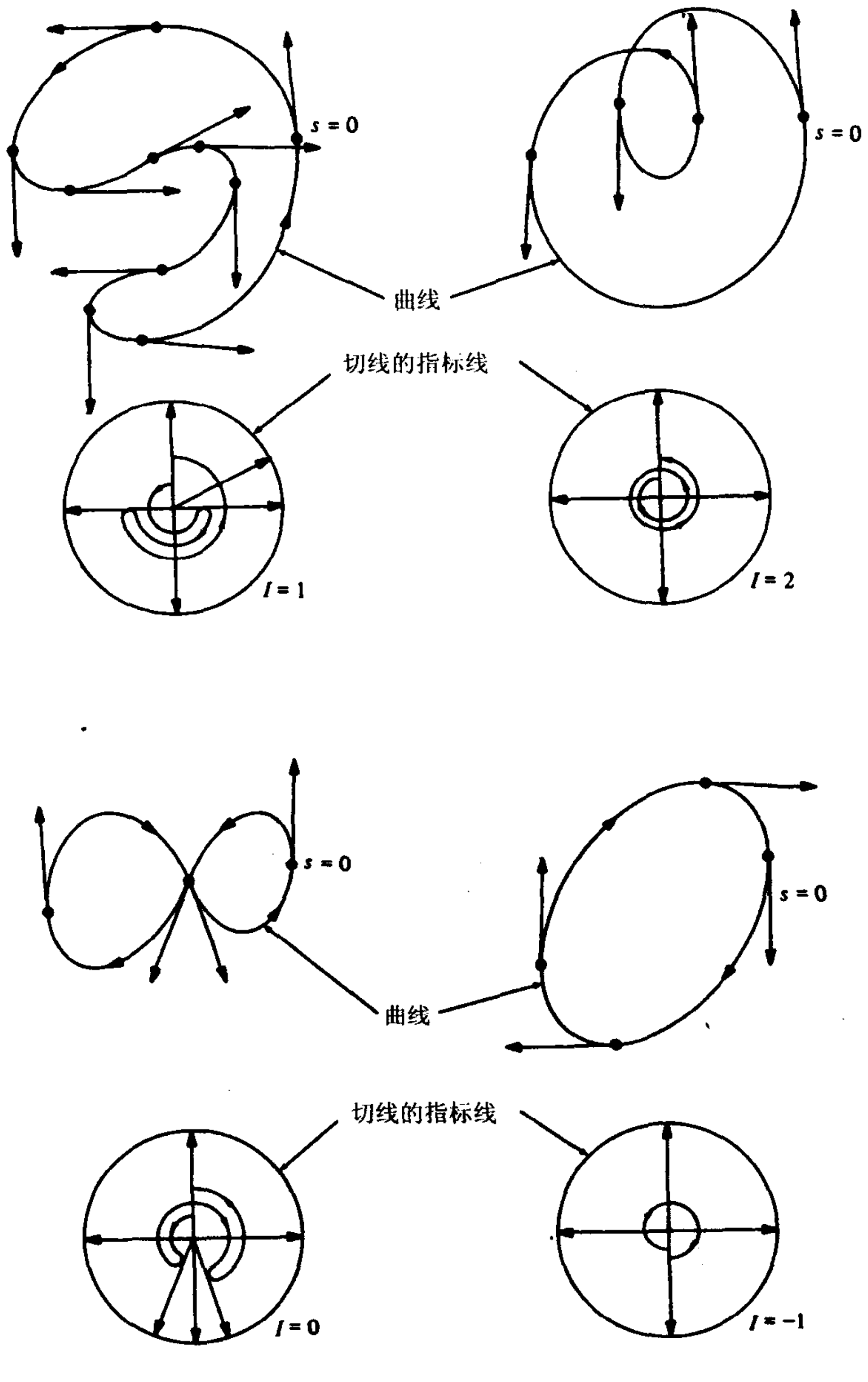


图　1-27

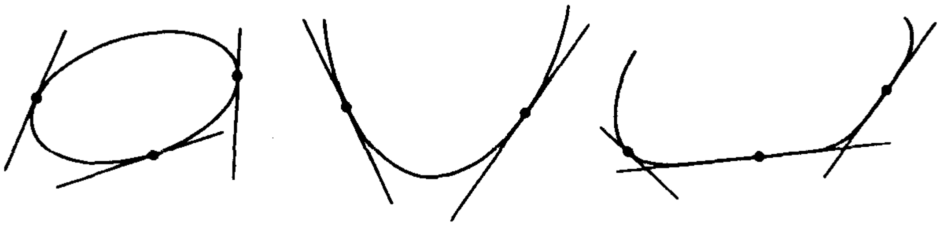
定理 2(四顶点定理)　简单凸闭曲线至少有四个顶点.

在开始证明之前我们需要一个引理.

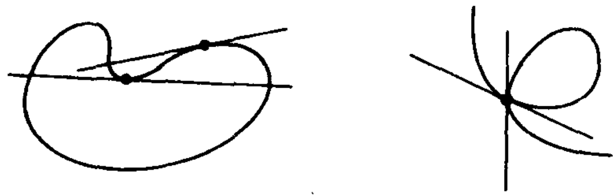
引理　设 α: $[0, l] \to \mathbb{R}^2$ 为以弧长为参数的平面闭曲线，并设 A，B，C 为任意实数. 则

$$\int_0^l (Ax + By + C) \frac{dk}{ds} ds = 0 \tag{5}$$

这里函数 $x=x(s)$，$y=y(s)$由 $\alpha(s)=(x(s),\ y(s))$给定，k 是 α 的曲率.



凸曲线



非凸曲线

图 1-28

引理的证明 由前可知存在一可微函数 θ：$[0,\ l]\to\mathbb{R}$ 使 $x'(s)=\cos\theta$，$y'(s)=\sin\theta$. 故 $k(s)=\theta'(s)$并且

$$x''=-ky',y''=kx'$$

从而，由于涉及的函数在 0 和 l 取值一致，

$$\int_0^l k'ds=0$$

$$\int_0^l xk'ds=-\int_0^l kx'dx=-\int_0^l y''ds=0$$

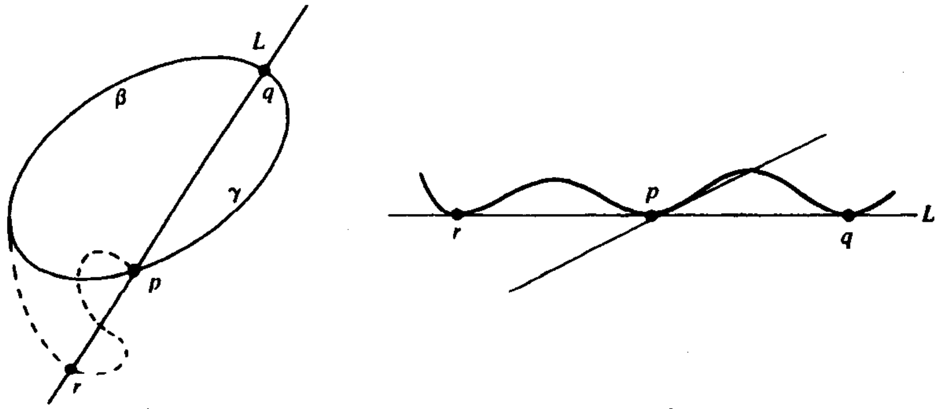
$$\int_0^l yk'ds=-\int_0^l ky'ds=\int_0^l x''ds=0$$

证毕.

定理的证明 以弧长为参数表示曲线 α：$[0,\ l]\to\mathbb{R}^2$. 由于 $k=k(s)$是闭区间$[0,\ l]$上的连续函数，它在$[0,\ l]$上达到最大值和最小值(这是实函数中的一个基本事实，它的证明，例如可参见第 5 章附录中的命题 10)，因此，α 至少具有两个顶点：$\alpha(s_1)=p$ 和 $\alpha(s_2)=q$. 设 L 是通过 p 和 q 的直线，β 和 γ 是由点 p 和 q 决定的 C 的两段弧.

我们可以肯定，这两段弧中的第一段位于 L 的确定的一边. 否则就会意味着这段弧与 L 在不同于 p 和 q 的一点 r 相交(图 1-29(a)). 由于凸性以及 p，q，r 是 C 上不同的点，因此在中间点(比如说 p)的切线与 L 重合. 再者，由于凸性，这就说明 L 在 p，q 和 r 三点与 C 相切. 可是另一方面，除非 L 上整个线段 rq 属于 C，否则 q 和 r 总落在邻近 p(中间点)的点的切线的不同的两边(图 1-29(b)). 这意味着在 p 和 q 点 $k=0$. 由于这些点是 k 的最大值点和最小值点，在 C 上 $k\equiv 0$，故矛盾.

设 L 的方程式为 $Ax+By+C=0$. 如果没有更多的顶点，则 $k'(s)$的符号在弧 β 及弧 γ 上都保持不变. 这样我们能够安排系数 A，B，C 的符号使式(5)中的积分是正的. 这个矛盾显示



(a)　　　　(b)

图　1-29

存在第三个顶点，且 $k'(s)$ 在 β 或 γ 上改变符号(比如设在 β 上)．由于 p 和 q 是最大值和最小值点，$k'(s)$ 在 β 上改变两次符号．因此就存在第四个顶点．证毕．

四顶点定理已经成为许多研究工作者的课题．这定理对简单闭曲线(不一定是凸的)也成立，但更难证明．有关这个课题的进一步的文献见参考书目[10]．

以后(5.6 命题 1)我们将会证明：当且仅当一条平面闭曲线是简单曲线，并且能够被定向得使其曲率为正或零时，这条平面闭曲线才是凸的．由这点和上面的证明看出，我们能改写四顶点定理如下：凸闭曲线的曲率函数(是非负的)或者是常数，或者至少具有两个极大值和两个极小值．自然我们要问：这样的曲率函数是否确实表示了凸曲线的特性？更精确地说，我们可以提出以下的问题：设 k：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 是一可微非负函数，k 及其所有的导数在 a 和 b 都相等．假设 k 或者是常数或者至少具有两个极大值和两个极小值，那么是否存在一简单闭曲线 α：$[a, b]\to\mathbb{R}^2$ 使 α 在 t 的曲率为 $k(t)$？

在 $k(t)$ 严格为正的情况，H. Gluck 对以上问题的回答是肯定．(见 H. Gluck "The Converse to the Four Vertex Theorem", L'Enseignement Mathématique T. XVII, fasc. 3～4 (1971), 295～309.)但是他的方法不适用于 $k\geqslant 0$ 的情况．

C. Cauchy-Crofton 公式

本节的最后一个课题，粗略地说，是要找到一条定理描述以下的情况．设 C 是平面上的一条正则曲线．我们观察此平面上所有与 C 相交的直线，并对每一条这样的直线，将它与 C 的交点的个数作为它的重数(图 1-30)．

我们首先要找到一个方法对平面上给定的直线子集给出一个测度．说这是可能的并不太令人吃惊．因为毕竟我们对平面上点的子集能指定一个测度(面积)．一旦我们认识到一条直线能由两个参数(例如图 1-31 中的 ρ 和 θ)来决定，我们就能把此平面上的这些直线，想象成在某一平面上的一定区域中的点．因此，我们要做的是找到一个在这样一个平面上度量"面积"的"合理的"方法．

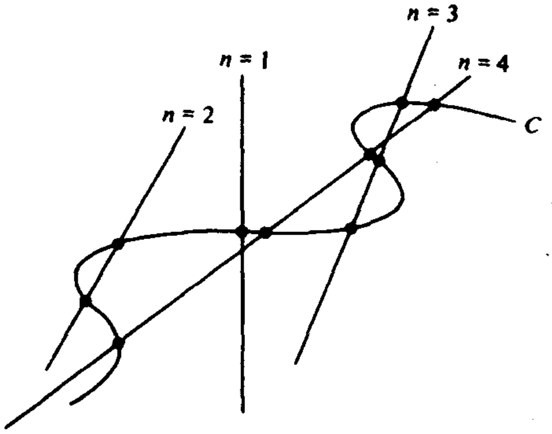


图 1-30 n 是对应直线的重数

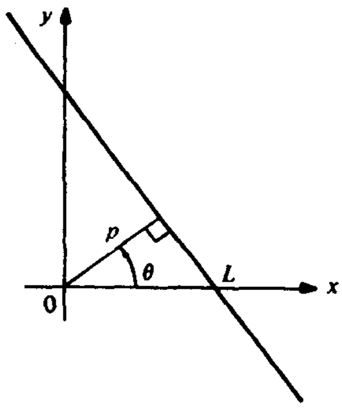


图 1-31 L 由 p 和 θ 决定

选择好这个测度，我们就要应用它找到与 C 相交的直线集合(将重数计算在内)的测度. 结果是相当有趣的，它可叙述如下.

定理 3(Cauchy-Crofton 公式) 设 C 是长度为 l 的正则平面曲线. 与 C 相交的直线的集合(将重数计算在内)的测度等于 $2l$.

在进行证明之前，我们必须定义什么是平面上直线集合的合理的测度. 首先，让我们为这种集合选择一个方便的坐标系统. 平面上的直线 L，由从 L 到坐标原点 O 的距离 $p\geqslant 0$，以及从原点出发垂直于 L 的半直线与 x 轴的夹角 θ，$0\leqslant\theta<2\pi$，所决定(图 1-31). 很容易看到，以这两个参数表示的 L 的方程式是

$$x\cos\theta + y\sin\theta = p$$

因此，我们能用下面的集合来代替此平面上所有直线的集合

$$\mathscr{L} = \{(p,\theta) \in \mathbb{R}^2 ; p \geqslant 0, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$$

我们将证明，除去单位的选择外，在这个集合中只有一个合理的测度.

为确定我们所说的“合理的”这个词的含义，让我们更进一步地考察$\mathbb{R}^2$ 上通常的面积测度. 我们需要一个定义.

$\mathbb{R}^2$ 上的一个刚体运动是一个由$(\bar{x}, \bar{y})\to(x, y)$ 给定的映照 F: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，这里(图 1-32)

$$\begin{cases} x = a + \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi \\ y = b + \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi \end{cases} \tag{6}$$

现在，为定义集合 $S\subset\mathbb{R}^2$ 的面积，我们考虑重积分

$$\iint_S dxdy$$

即我们在 S 上对“面积元素”$dxdy$ 进行积分. 当这个积分在某种意义上存在时，我们说 S 是可测的，并把 S 的面积定义为上面的积分值. 今后我们将假定，讨论中涉及的所有积分都存在.

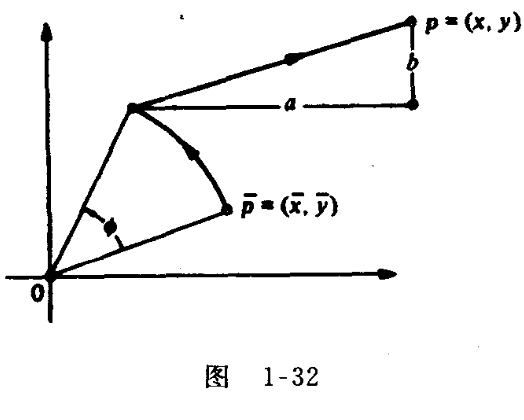


图 1-32

注意，我们也可以选择其他的面积元素，比如说 xy^2dxdy. 选择 $dxdy$ 的原因在于，它是仅有的(最多相差一个因子)，在刚体运动下不变的面积元素. 更精确地，我们有下面的命题.

命题 1　设 $f(x, y)$是定义在$\mathbb{R}^2$ 上的连续函数. 对任何集合 $S\subset\mathbb{R}^2$，定义 S 的面积 A 为

$$A(S)=\iint_S f(x,y)dxdy$$

(当然，我们只考虑那些使上面的积分存在的集合). 假设 A 在刚体运动下是不变的，即如果 S 是任何集合，$\bar{S}=F^{-1}(S)$，这里 F 是刚体运动(6)，我们有

$$A(\bar{S})=\iint_{\bar{S}} f(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y}=\iint_S f(x,y)dxdy=A(S)$$

则 $f(x, y)$=常数.

证明　我们回顾重积分中变量变换的公式(Buck，Advanced Calculus，P. 301，或本节的习题 15)：

$$\iint_S f(x,y)dxdy=\iint_{\bar{S}} f(x(\bar{x},\bar{y}),y(\bar{x},\bar{y}))\frac{\partial(x,y)}{\partial(\bar{x},\bar{y})}d\bar{x}d\bar{y} \tag{7}$$

这里 $x=x(\bar{x}, \bar{y})$，$y=y(\bar{x}, \bar{y})$是定义变量变换 T：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，$\bar{S}=T^{-1}(S)$的具有连续偏导数的函数，且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\bar{x},\bar{y})}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\bar{x}} & \dfrac{\partial x}{\partial\bar{y}}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial\bar{x}} & \dfrac{\partial y}{\partial\bar{y}}\end{vmatrix}$$

是变换 T 的 Jacobi 行列式. 在我们的特殊情况，变换是刚体运动(6)，雅可比行列式是

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\bar{x},\bar{y})}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}=1$$

利用这个事实和式(7)，我们得到

$$\iint_S f(x(\bar{x},\bar{y}),y(\bar{x},\bar{y}))d\bar{x}d\bar{y}=\iint_{\bar{S}} f(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y}$$

由于这对所有的 S 都是正确的，我们有

$$f(x(\bar{x},\bar{y}),y(\bar{x},\bar{y}))=f(\bar{x},\bar{y})$$

现在我们利用这个事实：对$\mathbb{R}^2$ 上任意两个点(x, y)，$(\bar{x}, \bar{y})$，存在一刚体运动 F，使 $F(\bar{x}, \bar{y})=(x, y)$. 因此

$$f(x,y)=(f\circ F)(\bar{x},\bar{y})=f(\bar{x},\bar{y})$$

从而，$f(x, y)$=常数. 这正是我们所期望的. 证毕.

注 3　以上的证明依据两个事实：第一、刚体运动的雅可比行列式是 1；第二、刚体运动对平面上的点是可迁的，即对平面上两个任意给定的点，存在一个刚体运动把一个点变到另一个点.

做了这些准备工作之后，我们最终已能定义集合 $\mathscr{L}$ 上的测度. 我们首先注意到，刚体运动(6)诱导了 $\mathscr{L}$ 上的一个变换. 事实上，式(6)将直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ 映照到直线

$$\bar{x}\cos(\theta-\varphi)+\bar{y}\sin(\theta-\varphi)=p-a\cos\theta-b\sin\theta$$

这意味着在 $\mathscr{L}$ 上由式(6)诱导的变换是

$$\begin{cases}\bar{p}=p-a\cos\theta-b\sin\theta\\ \bar{\theta}=\theta-\varphi\end{cases}$$

很容易验证，以上变换的 Jacobi 行列式是 1，而且这个变换对平面上的直线的集合也是可迁的. 因此我们定义集合 $\varphi\subset\mathscr{L}$ 的测度为

$$\iint_{\varphi}dpd\theta$$

用证明命题 1 的同样方法，我们可以证明，在相差一个常数因子的范围内这是关于 $\mathscr{L}$ 的在刚体运动下不变的唯一的测度. 因此，这个测度是合理的.

现在我们能概要地叙述定理 3 的证明.

定理 3 的证明概要 首先假设曲线 C 是长度为 l 的直线段. 由于我们的测度在刚体运动下是不变的，我们能够假设坐标系统的原点 O 在 C 的中点，x 轴位于 C 的方向. 则与 C 相交的直线的集合的测度是(图 1-33)

$$\iint dpd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{|\cos\theta|(l/2)}dp\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{l}{2}\,|\cos\theta|\,d\theta=2l$$

其次，设 C 为由有限段长度为 $l_i(\sum l_i=l)$ 的线段组成的折线. 设 $n=n(p,\theta)$ 是直线(p,θ)与 C 的交点数. 这时，对每一线段算出结果然后求和，我们得到

$$\iint nd pd\theta=2\sum_i l_i=2l \tag{8}$$

这是折线的 Cauchy-Crofton 公式.

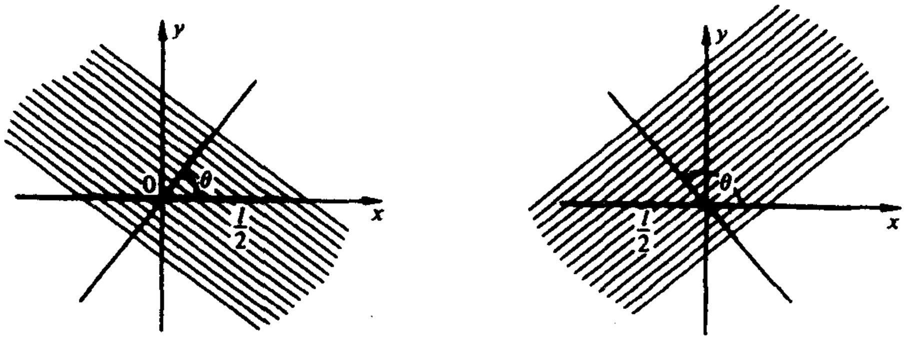


图 1-33

最后，通过求极限，就可以把上述公式推广到任何正则曲线，这也就证明了定理 3. 证毕.

值得注意的是，这个课题的总的思想属于几何学中称为积分几何的分支，积分几何的概述可参看 L. A. Santaló, "Integral Geometry," in Studies in Global Geometry and Analysis, edited by S. S. Chern, The Mathematical Association of America, 1967, 147～193.

Cauchy-Crofton 公式能应用于许多方面．例如，当曲线是不可求长的(见 1.3 习题 9)但式(8)的左边有意义时，可利用它来定义这种曲线的“长度”．式(8)也可用来得到估计曲线长度的有效方法．实际上，下面给出的是对式(8)中的积分的一个很好的近似[○]．考虑一族平行直线，其相邻直线间的距离为 r．将此平行直线族旋转角度 $\frac{\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}$，就得到四个直线族，设 n 为所有这些直线与曲线 C 的交点数．则

$$\frac{1}{2}nr\frac{\pi}{4}$$

是积分

$$\frac{1}{2}\iint n d p d\theta = C \text{ 的长度}$$

的一个近似值，由此给出了 C 的长度的估计．为了知道这个估计的准确程度，让我们做个例题．

例　图 1-34 中的曲线是电子显微镜下的环状 DNA 分子．我们要估计它的长度．在图上画出四个直线族，直线间的距离为 7 毫米，夹角为 $\frac{\pi}{4}$(一个更实用的方法是将这直线族一劳永逸地画在透明纸上)．数出交点数为 153．则

$$\frac{1}{2}n\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}153\frac{3.14}{4} \sim 60$$

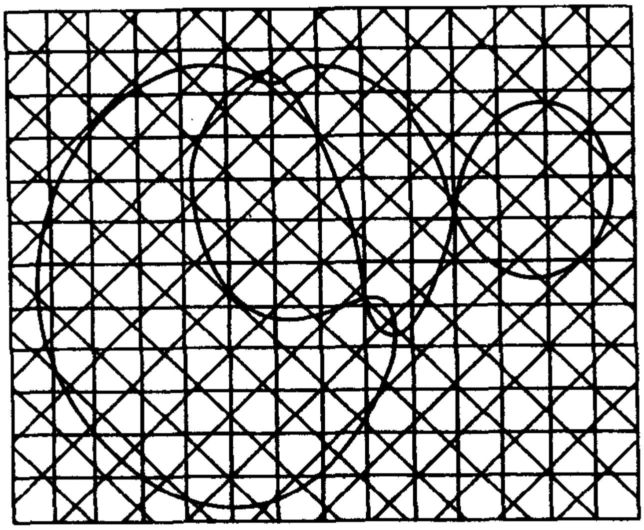


图　1-34

由于图中的参考线代表 1 微米($=10^{-6}$ 米)，而按我们的尺度量下来是 25 毫米，$r=\frac{25}{7}$，因此，从我们得到的值计算出此 DNA 分子的长度近似为

$$60\left(\frac{25}{7}\right) \sim 16.6 \text{ 微米}$$

○　感谢 Robert Gardner 建议我采纳这个应用及下面的例子．

正确的值是 16.3 微米.

习题

*1. 是否存在平面简单闭曲线，全长为 6 英尺，所围的面积为 3 平方英尺？

*2. 设$\overline{AB}$是直线段，$l>AB$ 的长度. 证明：连接 A，B 的长度为 l 的曲线 C 与$\overline{AB}$所围面积最大时，C 是通过 A，B 的圆弧(图 1-35).

3. 计算椭圆

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad t \in [0,2\pi],\quad a \neq b$$

的曲率，并证明此椭圆有四个顶点：$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，$(0,\ b)$，$(0,\ -b)$.

*4. 设 C 为平面曲线，T 为在点 $p\in C$ 的切线. 画出与 p 点的法线平行且与 p 点距离为 d 的直线 L(图 1-36). 设 h 是 L 上由 C 和 T 截得线段的长度(因此 h 是 C 相对于 T 的“高度”). 证明：

$$|k(p)| = \lim_{d\to 0}\frac{2h}{d^2}$$

这里 $k(p)$是 C 在 p 的曲率.

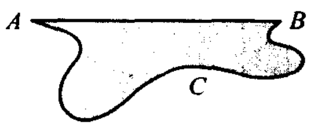


图 1-35

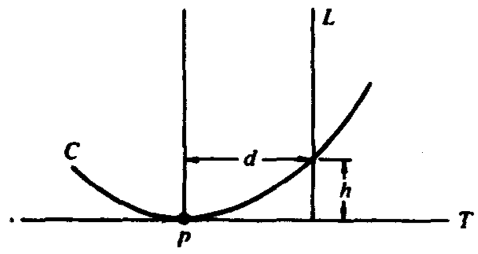


图 1-36

*5. 如果平面闭曲线 C 包含在半径为 r 的圆盘中，证明：存在一点 $p\in C$，使 C 在 p 的曲率满足 $|k|\geq\frac{1}{r}$.

6. 设 $\alpha(s)$，$s\in[0,\ l]$是正定向的平面凸闭曲线. 曲线

$$\beta(s) = \alpha(s) - rn(s)$$

称为 α 的平行曲线(图 1-37)，这里 r 是正的常数，n 是法向量. 证明：

a. β 的长度$=\alpha$ 的长度$+2\pi r$.

b. $A(\beta)=A(\alpha)+rl+\pi r^2$.

c. $k_\beta(s)=k_\alpha(s)/(1+rk_\alpha(s))$.

对$(a)\sim(c)$，$A(\quad)$表示相应的曲线所围的面积，k_α，k_β 分别是 α 和 β 的曲率.

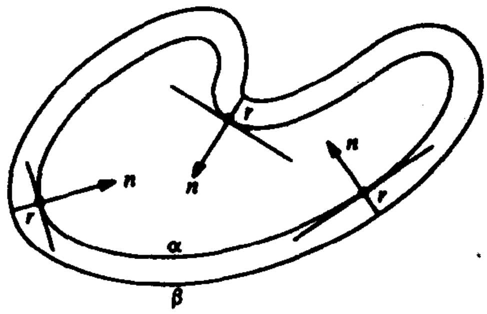


图 1-37

7. 设 α：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 是定义在整条实直线$\mathbb{R}$ 上的平面曲线. 假设 α 不通过原点 $O=(0,\ 0)$，且

$$\lim_{t\to+\infty}|\alpha(t)| = \infty \text{ 和 } \lim_{t\to-\infty}|\alpha(t)| = \infty$$

a. 证明：存在点 $t_0\in\mathbb{R}$，使对所有的 $t\in\mathbb{R}$ 有 $|\alpha(t_0)|\leqslant|\alpha(t)|$.

b. 用一个例子证明：如果不假设 $\lim\limits_{t\to+\infty}|\alpha(t)|=\infty$ 和 $\lim\limits_{t\to-\infty}|\alpha(t)|=\infty$，则 a 中的论断是错误的.

8. *a. 设 $\alpha(s)$，$s\in[0,l]$为简单平面闭曲线. 假设曲率 $k(s)$满足 $0<k(s)\leqslant C$，这里 C 是常数(因此，α 不如半径为 $1/C$ 的圆弯曲得厉害). 证明：

$$\alpha\text{ 的长度}\geqslant\frac{2\pi}{C}$$

b. 把 a 的假设中的"简单"改为"α 有旋转指标 N". 证明：

$$\alpha\text{ 的长度}\geqslant\frac{2\pi N}{C}$$

*9. 对集合 $K\subset\mathbb{R}^2$，如果任意给定两点 p，$q\in K$，直线段$\overline{pq}$包含在 K 中，则称 K 是凸集(图 1-38). 证明：简单凸闭曲线围成一个凸集.

10. 设 C 为平面凸曲线. 用几何方法证明 C 不会自己相交.

*11. 对给定的非凸简单平面闭曲线 C，我们可考虑它的凸包 H(图 1-39)，即包含 C 的内部的最小的凸集的边界. 曲线 H 由 C 的弧和 C 的跨过"非凸间隙"的切线段组成(图 1-39). 可以证明 H 是 C^1 凸闭曲线. 利用这个证明在等周问题中我们仅需考虑凸曲线的情况.

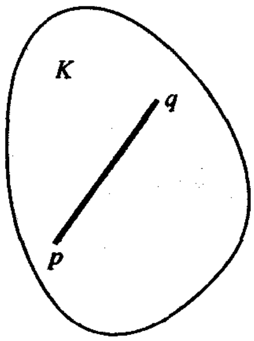


图 1-38

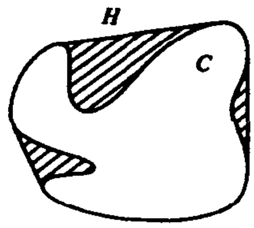


图 1-39

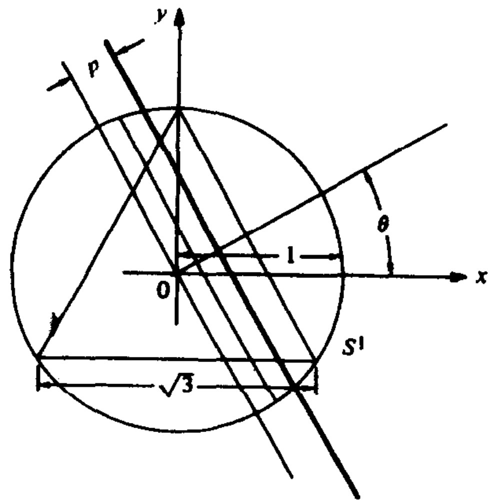


图 1-40

*12. 考虑平面上的单位圆 S^1. 证明比 $M_1/M_2=1/3$，这里 M_2 是此平面上与 S^1 相交的直线集合的测度，M_1 是所有与 S^1 交成的弦长$>\sqrt{3}$的直线的测度. 直观上，这个比是一条与 S^1 相交的直线，能与 S^1 交成长度大于 S^1 的内接等边三角形的边长的弦的概率(图 1-40).

13. 设 C 为曲率 $k>0$ 的定向平面闭曲线. 假设 C 至少有一个自相交点 p. 证明：

a. 存在一个点 $p'\in C$，使 p'点的切线 T'平行于 p 点的某条切线.

b. 在 C 的由 $pp'p$ 组成的正弧上，切线的旋转角$>\pi$(图 1-41).

c. C 的旋转指标$\geqslant 2$.

14. a. 证明：若直线 L 与闭凸曲线 C 相遇，则 L 或者是 C 的切线，或者恰与 C 相交于两点.

b. 利用 a 证明：与 C 相遇的直线集合（不计重数）的测度等于 C 的长度.

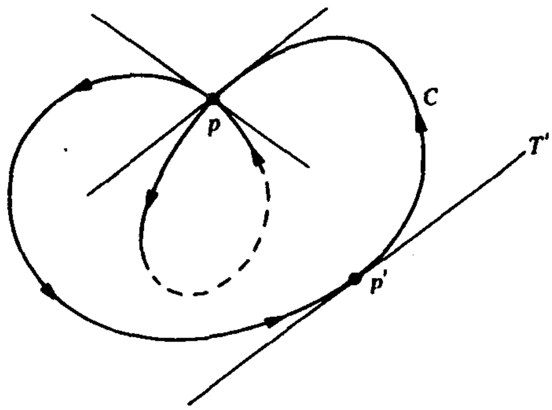


图 1-41

15. 平面上的 Green 定理是微积分的一个基本事实，它可以叙述如下. 设 $\alpha(t)=(x(t), y(t))$, $t\in[a, b]$为一简单平面闭曲线. 假设 α 正定向，C 为它的轨迹，R 为 C 的内部. 又设 $p=p(x, y)$, $q=q(x, y)$为具有连续偏导数 p_x, p_y, q_x, q_y 的实函数. 则

$$\int_R (q_x - p_y)dxdy = \int_C \left(p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}\right)dt \tag{9}$$

这里第二个积分中函数 p 和 q 是限制在 α 上的，且积分是在上下限 $t=a$ 和 $t=b$ 之间进行的. 在下面的 a 和 b 中，我们打算由 Green 定理推导 R 的面积公式和重积分中变量变换公式（参见本节式(1)和(7)）.

a. 式(9)中令 $q=x$, $p=-y$. 则

$$A(R) = \iint_R dxdy = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x(t)\frac{dy}{dt} - y(t)\frac{dx}{dt}\right)dt$$

b. 设 $f(x, y)$为具有连续偏导数的实函数，T：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为由具有连续偏导数的函数 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$给定的坐标变换. 在式(9)中选择 $p=0$ 和 q，使 $q_x=f$. 相继地运用 Green 定理，映照 T 并再次运用 Green 定理就得到

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_C q dy = \iint_{T^{-1}(C)} (q\circ T)(y_u u'(t) + y_v v'(t))dt$$

$$= \iint_{T^{-1}(R)} \left\{\frac{\partial}{\partial u}((q\circ T)y_v) - \frac{\partial}{\partial v}((q\circ T)y_u)\right\}dudv$$

证明：

$$\frac{\partial}{\partial u}(q(x(u,v),y(u,v))y_v) - \frac{\partial}{\partial v}(q(x(u,v),y(u,v))y_u)$$

$$= f(x(u,v),y(u,v))(x_u y_v - x_v y_u) = f\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

将其与上式结合就得到重积分的变换公式：

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_{T^{-1}(R)} f(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

第2章 正则曲面

2.1 引言

在这一章，我们将开始对曲面的研究．不像在第 1 章中我们主要应用单变量的初等微积分，而现在我们需要一些多元微积分的知识．特别地，我们需要知道$\mathbb{R}^2$ 和$\mathbb{R}^3$ 中函数和映照连续性及可微性的一些事实．所需的预备知识在任何一本高等微积分的标准教科书中能找到，如 Buck，Advanced Calculus；在本章附录中我们给出了这方面某些材料的梗概．

在 2.2，我们将导入$\mathbb{R}^3$ 中正则曲面的基本概念．相对于第 1 章中曲线的处理，正则曲面定义为集合而不是映照．2.2 的目标，是描述某些判别$\mathbb{R}^3$ 中的一个给定集合是否为正则曲面的有用准则．

在 2.3，将说明对正则曲面上的一个函数，可定义它的可微性，在 2.4 我们将说明，在$\mathbb{R}^2$ 中通常的微分概念对这种函数能被推广．这样，在$\mathbb{R}^3$ 中的正则曲面提供了二维微积分的自然框架．

当然，曲线也能用相同观点来处理，也就是把它定义成$\mathbb{R}^3$ 中的子集，从而就为一维微积分提供了自然的框架．这我们将在 2.3 概要地提及．

2.2 和 2.3 对这本书的其余部分是要紧的．初学者也许发觉那些节中的证明多少有点困难．如碰到这种情况，在初次阅读时可略去这些证明．

在 2.5，我们将引进第一基本形式，它是处理正则曲面上度量问题(曲线的长度、区域的面积等等)的一个自然工具．这将成为第 4 章的一个非常重要的问题．

2.6 到 2.8，初读时是供选择的．在 2.6 中，将处理正则曲面的定向概念．它在第 3、第 4 这两章中将是需要的．但是，为了那些跳过这一节的人方便起见，在第 3 章开始处我们将回顾定向的概念．

2.2 正则曲面；正则值的原像[⊖]

这里要引进$\mathbb{R}^3$ 中正则曲面的概念．粗糙地说，$\mathbb{R}^3$ 中的一张正则曲面是取一些平面片，通过变形和适当安排而得，使所产生的图形没有尖点，没有边也不自身相交，以致图形的每一点上切平面是有意义的．想法是定义一个二维的集合，它足够光滑以致通常的微积分概念能在它上面推广．在 2.4 末将完全清楚下列定义是满足要求的．

定义 1 子集 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是一张正则曲面，如果对每点 $p\in S$ 存在一个邻域 $V\subset\mathbb{R}^3$ 和一个开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 到 $V\cap S\subset\mathbb{R}^3$ 上的映照 X：$U\rightarrow V\cap S$ 满足下列条件(图 2-1)：

1. X 是可微的．这意味着如果映照 X 表示成

⊖ 本节中的证明在初读时可略去．

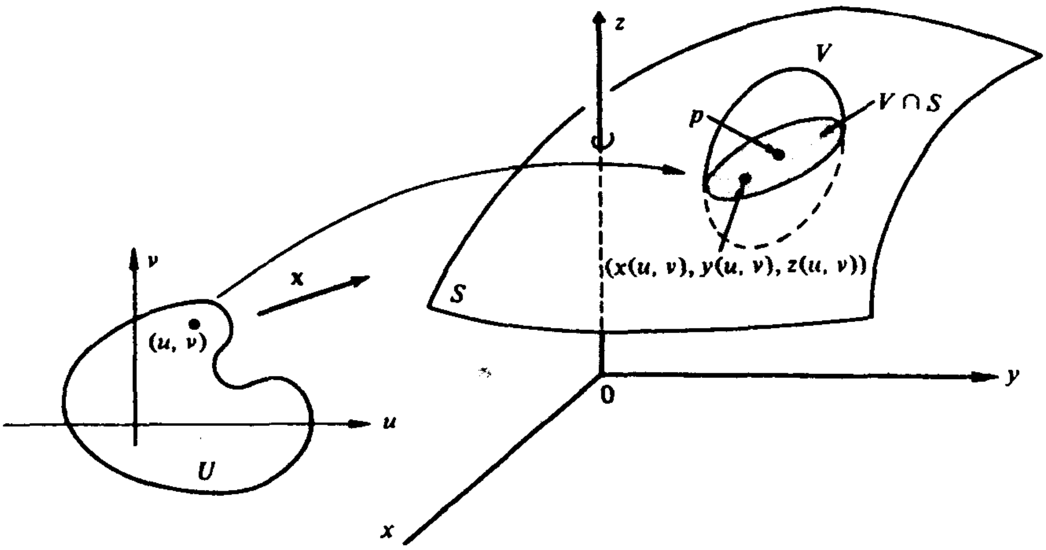


图 2-1

$$X(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))^{\ominus},(u,v)\in U$$

那么函数 $x(u, v)$，$y(u, v)$，$z(u, v)$在 U 中具有所有阶的连续偏导数.

2. X 是同胚映照. 从条件 1，X 是连续的，所以同胚意味着 X 有连续逆映照 $X^{-1}: V\cap S \to U$，即 X^{-1}是定义在包含 $V\cap S$ 的开集 W 上连续映照 F：$W\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 的限制.

3.（正则性条件）对任何 $q\in V$，微分映照 dX_q：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是 1 对 1 的.

以下我们将对条件 3 作出解释.

映照 X 称为 p 点附近的一个参数表示或(局部)坐标系. p 点在 S 中的邻域 $V\cap S$ 称为坐标邻域.

为了给条件 3 一个更熟悉的形式，让我们在$\mathbb{R}^2$ 的规范基 $e_1=(1, 0)$，$e_2=(0, 1)$及坐标(u, v)和$\mathbb{R}^3$ 的规范基 $f_1=(1, 0, 0)$，$f_2=(0, 1, 0)$，$f_3=(0, 0, 1)$及坐标(x, y, z)下计算线性映照 dX_q 的矩阵.

设 $q=(u_0, v_0)$. 向量 e_1 是曲线 $u\to(u, v_0)$的切向量，这条曲线在映照 X 下的象是曲线

$$u\to(x(u,v_0),y(u,v_0),z(u,v_0))$$

这条象曲线(称为 $v=v_0$ 的坐标曲线)在 S 上，且在 $X(q)$的切向量是(图 2-2)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial X}{\partial u}$$

其中导数在(u_0, v_0)点计算，而向量是以它在基$\{f_1, f_2, f_3\}$下的分量表示的. 从微分的定义(第 2 章附录的定义 1)

⊖ 一眼可以看出，这个等式左端的 $X(u, v)$，是矢量，而等式右端的 $x(u, v)$，$y(u, v)$和 $z(u, v)$均为标量. 我们在本书中，对矢量统统不用黑体加以标记；正如在此场合中一样，只要联系上下文一起来进行阅读，就不会引起混乱. ——译者注

$$dX_q(e_1)=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial X}{\partial u}$$

类似地，利用坐标曲线 $u=u_0$（曲线 $v\to(u_0, v)$在映照 X 下的象），我们得到

$$dX_q(e_2)=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial X}{\partial v}$$

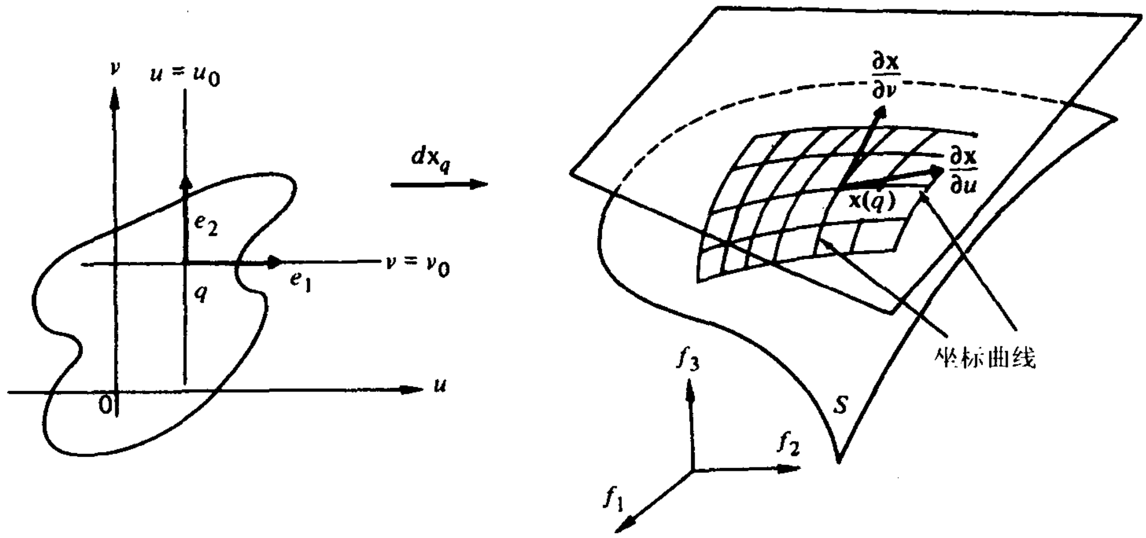


图 2-2

这样，线性映照 dX_q 在前面所示的基下的矩阵是

$$dX_q=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}$$

那么，定义 1 的条件 3 可表示为上列矩阵的二列向量是线性独立的，或向量积$\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}\neq 0$，或 dX_q 的矩阵的二阶子式之一在 q 点不等于零，即下列 Jacobi 行列式之一

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$$

在 q 点不等于零．

注 1 对定义 1 还要做些评述．首先，对照第 1 章曲线的处理，曲面被定义为$\mathbb{R}^3$ 中的一个子集，而不是一个映照．这是通过满足条件 1，2 和 3 的坐标邻域覆盖 S 而做到的．

如果我们期望在 S 上建立微分几何，条件 1 是很自然的．条件 2 中的 1 对 1 性的目的，在于避免正则曲面的自身相交．这对于我们打算引进曲面上一点 $p\in S$ 的切平面概念，显然是必要的(见图 2-3(a))．在条件 2 中逆映照的连续性有一个更深入的目的，它只有在下一节才能被

完全理解．暂时，我们将指出对证明某些以参数表示定义的对象不依赖于这个参数表示而依赖于曲面 S 本身，这个条件是必须的．最后，正像 2.4 所示，条件 3 将保证曲面 S 的所有点上切平面的存在性(见图 2-3(b))．

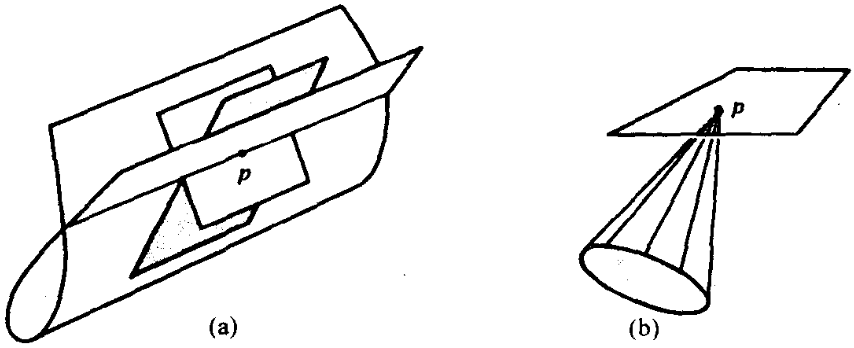


图 2-3　在正则曲面定义中回避的某些位置

例 1　让我们说明单位球面

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2+y^2+z^2=1\}$$

是一张正则曲面．

我们首先验证如下映照 $X_1: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$X_1(x,y) = (x,y,+\sqrt{1-(x^2+y^2)}),\quad (x,y) \in U$$

是 S^2 的一个参数表示，其中$\mathbb{R}^2=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3;\ z=0\}$，$U=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$．注意到 $X_1(U)$是 xy 平面以上的 S^2 的一个开子集．

因 $x^2+y^2<1$，则函数$+\sqrt{1-(x^2+y^2)}$具有所有阶的连续偏导数．因此，X_1 是可微的，满足条件 1．

因
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} \equiv 1$$
条件 3 也成立．

为了验证条件 2，我们注意到 X_1 是 1 对 1 的，且 X_1^{-1} 是(连续)投影 $\pi(x,\ y,\ z)=(x,\ y)$ 在集合 $X_1(U)$上的限制．这样，X_1^{-1} 在 $X_1(U)$上是连续的．

下面，我们以类似的参数表示来覆盖整个球面．以

$$X_2(x,y) = (x,y,-\sqrt{1-(x^2+y^2)})$$

来定义 $X_2: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，易证它是一个参数表示．我们看到，$X_1(U)$和 $X_2(U)$覆盖了 S^2 除去赤道

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2=1, z=0\}$$

然后，利用 xz 平面及 zy 平面，定义参数表示

$$X_3(x,z) = (x,\sqrt{1-(x^2+z^2)},z)$$

$$X_4(x,z) = (x,-\sqrt{1-(x^2+z^2)},z)$$

$$X_5(y,z) = (\sqrt{1-(y^2+z^2)},y,z)$$

$$X_6(y,z) = (-\sqrt{1-(y^2+z^2)},y,z)$$

它们和 X_1 及 X_2 一起完全地覆盖了 S^2(图 2-4). 这就是说明了 S^2 是一张正则曲面.

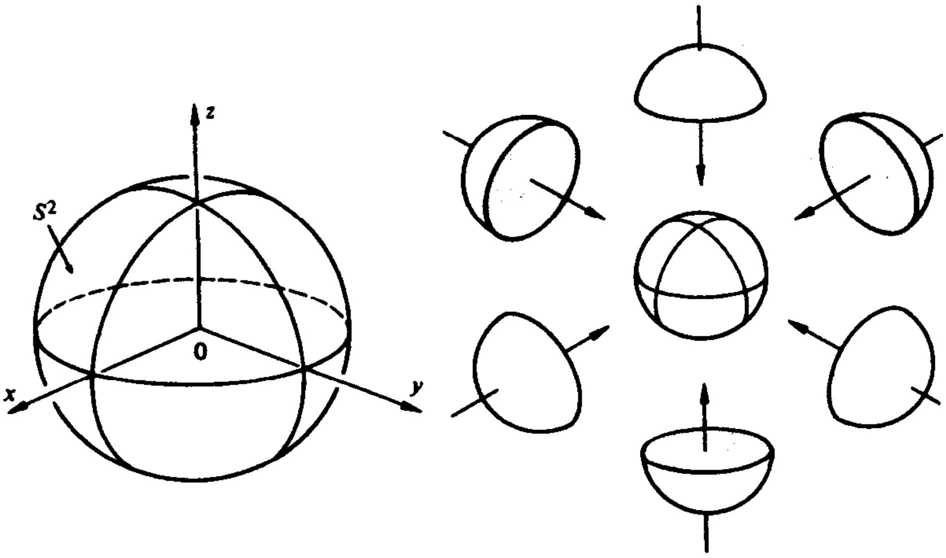


图 2-4

对大多数应用，在 S^2 上导入地理坐标系是方便的. 设 $V=\{(\theta,\ \phi);\ 0<\theta<\pi,\ 0<\phi<2\pi\}$，$X$：$V\to\mathbb{R}^3$ 为

$$X(\theta,\phi)=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$$

显然，$X(V)\subset S^2$. 我们将证明 X 是 S^2 的一个参数表示. θ 通常称为余纬度(纬度的余角)而 ϕ 称为经度(图 2-5).

显然，函数 $\sin\theta\cos\phi$，$\sin\theta\sin\phi$，$\cos\theta$ 有各阶连续偏导数；所以，X 是可微的. 而且为了 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)}=\cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)}=\sin^2\theta\cos\phi$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(\theta,\phi)}=\sin^2\theta\sin\phi$$

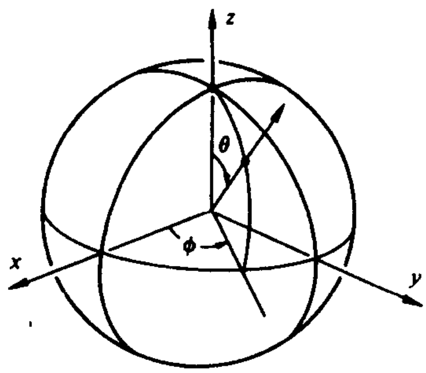


图 2-5

同时为零，必须有

$$\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\cos^2\phi+\sin^4\theta\sin^2\phi=\sin^2\theta=0$$

这在 V 中不可能发生，所以定义 1 的条件 1 和条件 3 被满足.

其次，我们观察到一旦给定$(x,\ y,\ z)\in S^2-C$，其中 C 是半圆周

$$C=\{(x,y,z)\in S^2;\quad y=0;\quad x\geqslant 0\}$$

θ 就被 $\theta=\cos^{-1}z$ 所唯一确定，因为 $0<\theta<\pi$. 有了 θ，从 $x=\sin\theta\cos\phi$，$y=\sin\theta\sin\phi$ 就知道 $\sin\phi$ 和 $\cos\phi$，这就唯一地确定 $\phi(0<\phi<2\pi)$. 从而 X 有它的逆 X^{-1}. 为了完成条件 2 的验证，我们应证明 X^{-1} 是连续的. 但因为我们很快将证明(命题 4)，只要我们已经知道集合 S 是一张正则曲面，这个验证是不必要的. 这里就不证了.

我们指出 $X(V)$ 仅略去了 S^2 的一个半圆周(包括两个极点)且 S^2 能被两个这种类型的坐标

邻域所覆盖.

在习题 16 中我们将表明如何用另一个有用的坐标邻域系来覆盖 S^2.

例 1 说明，从定义出发来判断$\mathbb{R}^3$ 的一个给定子集是否为一张正则曲面，可能是乏味的. 在研究进一步的例子之前，我们给出两个命题，它们将简化上述乏味的手续. 命题 1 说明了一张正则曲面的定义和函数 $z=f(x, y)$的图之间的关系. 命题 2 应用了反函数定理并且将正则曲面的定义与 $f(x, y, z)=$常数形式的子集联系了起来.

命题 1 如果 $f: U\to\mathbb{R}$ 是在$\mathbb{R}^2$ 的开集 U 中的一个可微函数，那么 f 的图，即$\mathbb{R}^3$ 中由$(x, y, f(x, y))$，$(x, y)\in U$，给定的子集是正则曲面.

证明 只要证明由

$$X(u,v) = (u,v,f(u,v))$$

给定的映照 $X: U\to\mathbb{R}^3$ 是图的一个参数表示，它的坐标邻域覆盖了该图的每一点. 条件 1 显然是满足的，而条件 3 验证毫无困难，因 $\partial(x, y)/\partial(u, v)\equiv 1$. 最后，该图的每一点$(x, y, z)$是唯一的点$(u, v)=(x, y)\in U$ 在 X 下的象. 所以，X 是 1 对 1 的，且因 X^{-1}是$\mathbb{R}^3$ 到 xy 平面的(连续)投影在 f 的图上的限制，X^{-1}是连续的. 证毕.

在叙述命题 2 之前，将需要一个定义.

定义 2 对定义在$\mathbb{R}^n$ 的开集 U 中的一个可微映照 $F: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，我们称 $p\in U$ 是 F 的一个*临界点*，如果微分映照 dF_p: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 不是满映照(或到上映照). 临界点的象 $F(p)\in\mathbb{R}^m$ 称为 F 的一个*临界值*. 而$\mathbb{R}^m$ 中非临界值的点称为 F 的*正则值*.

这些术语显然来自一个特殊情形：这时 $f: U\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个实变量的实值函数. 如果 $f'(x_0)=0$，即微分映照 df_{x_0} 将$\mathbb{R}$ 中的所有向量映照到零向量，则点 $x_0\in U$ 是临界点(见图 2-6). 注意，任何点 $a\notin f(U)$是 f 的平凡正则值.

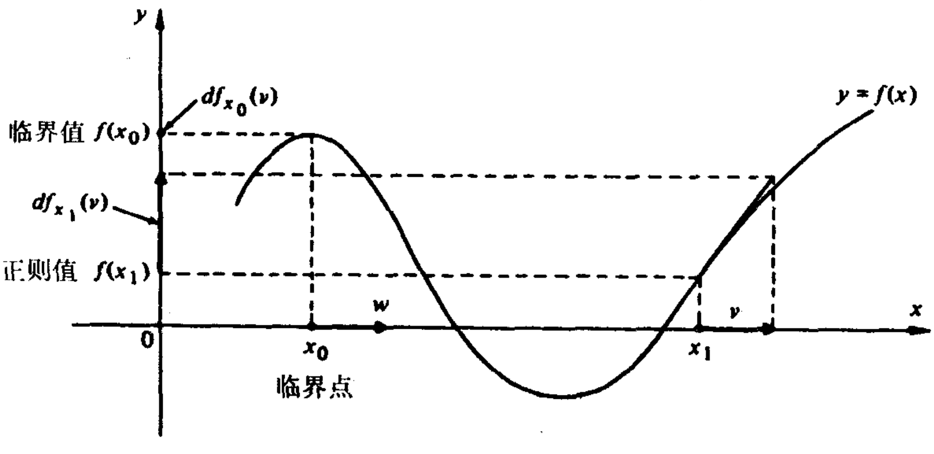


图 2-6

如果 $f: U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是可微函数，那么 df_p 作用于向量(1, 0, 0)的值可从计算曲线

$$x\to f(x,y_0,z_0)$$

在 $f(p)$的切向量得到，从而

$$df_p(1,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = f_x$$

类似地

$$df_p(0,1,0) = f_y, df_p(0,0,1) = f_z$$

我们断言 df_p 在基(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)下的矩阵由

$$df_p = (f_x, f_y, f_z)$$

所给出.

注意到在这种情形下, df_p 不是满映照, 即在 p 点有 $f_x = f_y = f_z = 0$, 所以 $a \in f(U)$ 是 f: $U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 的正则值的充要条件是 f_x, f_y, f_z 在其原象

$$f^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in U : f(x,y,z) = a\}$$

的任一点不同时为零.

命题 2 如果 f: $U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是可微函数, 且 $a \in f(U)$ 是 f 的正则值, 那么 $f^{-1}(a)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的正则曲面.

证明 设 $p = (x_0, y_0, z_0)$ 是 $f^{-1}(a)$ 的一点. 因 a 是 f 的正则值, 则在适当选取坐标轴后总能假定在 p 点 $f_z \neq 0$. 我们定义映照 F: $U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 为

$$F(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z))$$

且以 (u, v, t) 表示 $\mathbb{R}^3$ 中 F 值域上点的坐标. F 在 p 点的微分映照为

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

那么

$$\det(dF_p) = f_z \neq 0$$

所以我们能应用反函数定理(见第 2 章附录), 它确保存在 p 点及 $F(p)$ 的邻域 V 和 W, 使 F: $V \to W$ 是可逆的, 且逆映照 F^{-1}: $W \to V$ 是可微的(图 2-7). 从而 F^{-1} 的坐标函数

$$x = u, y = v, z = g(u,v,t), (u,v,t) \in W$$

均是可微的. 特别地, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ 是定义在 V 到 xy 平面上投影区域中的可微函数. 从

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u,v,t); t = a\}$$

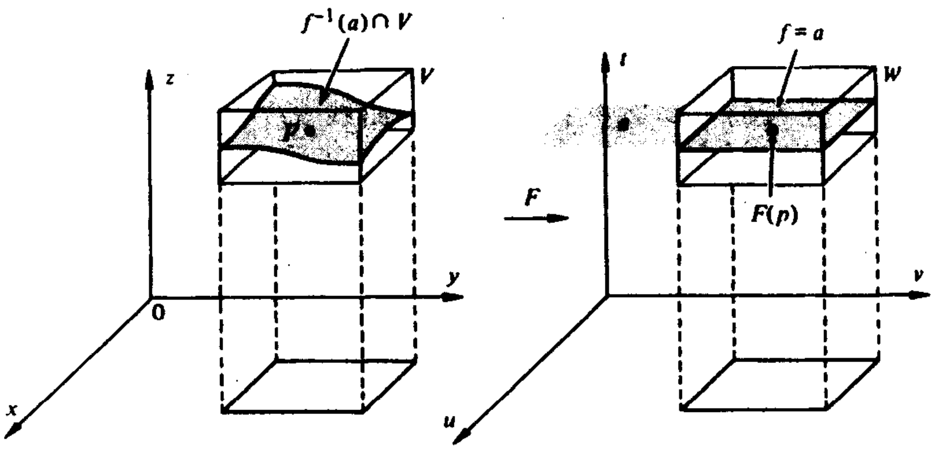


图 2-7

我们知道 h 的图是 $f^{-1}(a)\cap V$. 据命题 1，$f^{-1}(a)\cap V$ 是 p 的一个坐标邻域. 所以，每个 $p\in f^{-1}(a)$能被一个坐标邻域所覆盖，这样 $f^{-1}(a)$是正则曲面. 证毕.

注 2 证明实质上利用了反函数定理，在方程 $f(x, y, z)=a$ 中解出 z，这在 $f_z(p)\neq 0$ 时在 p 点的某一邻域中可以做到. 这个事实是一般隐函数定理的特殊情况，而隐函数定理从反函数定理得到，所以二者是等价的.

例 2 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

是正则曲面. 事实上，它是集合 $f^{-1}(0)$，其中

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

是一个可微函数，0 是 f 的正则值，这是因为偏导数 $f_x=\frac{2x}{a^2}$，$f_y=\frac{2y}{b^2}$，$f_z=\frac{2z}{c^2}$仅在(0，0，0)点同时为零，而(0，0，0)不属于 $f^{-1}(0)$. 这个例子包括球面作为特例($a=b=c=1$).

迄今所给的正则曲面的例子，全是$\mathbb{R}^3$ 中的连通子集. 如果曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 中的任何两点均能用 S 中的连续曲线所连结，那么 S 称为是连通的. 在正则曲面的定义中，我们对曲面的连通性没有限制，而下列的例子说明，由命题 2 所给的正则曲面可以不是连通的.

例 3 双叶双曲面 $-x^2-y^2+z^2=1$ 是正则曲面，因为它是 $S=f^{-1}(0)$，其中 0 是 $f(x, y, z)=-x^2-y^2+z^2-1$ (图 2-8)的正则值. 注意，曲面 S 不是连通的，即对给定在不同叶中的两点($z>0$ 和 $z<0$)，不可能用一条在曲面中的连续曲线 $\alpha(t)=(x(t), y(t), z(t))$连结它们，否则 z 将变号，且在某点 t_0，我们有 $z(t_0)=0$，这意味着 $\alpha(t_0)\notin S$.

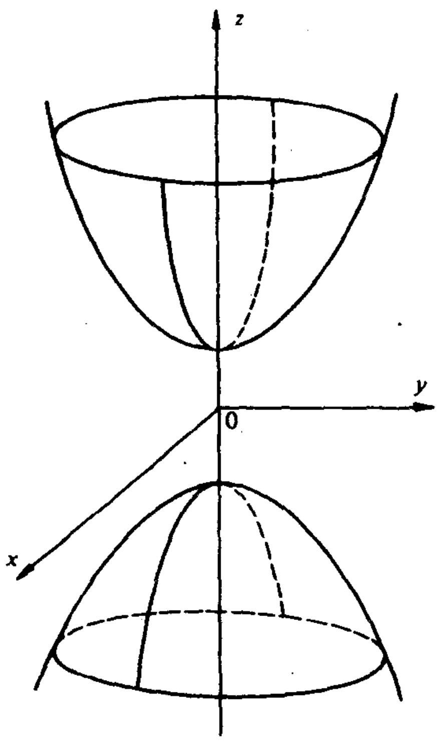


图 2-8 不连通曲面 $-y^2-x^2+z^2=1$

例 3 的讨论，顺便可用来证明我们将反复应用的连通曲面的一个性质. 如果 f: $S\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是定义在连通曲面 S 上的非零连续函数，那么 f 在 S 上不变号.

为证明这个性质，我们利用介值定理(第 2 章附录，命题 4). 用反证法，假定 f 变号，即有 $p, q\in S$ 使 $f(p)>0$ 和 $f(q)<0$. 因 S 是连通的，那么存在一条连续曲线 α: $[a, b]\to S$，使 $\alpha(a)=p$，$\alpha(b)=q$. 对连续函数 $f\circ\alpha$: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 应用介值定理，我们发现存在 $C\in[a, b]$，使 $f\circ\alpha(C)=0$，即 f 在 $\alpha(C)$为零，故矛盾.

例 4 环面 T 是一个半径为 r 的圆周 S^1 关于离圆中心 $a>r$ 处的直线(属于圆周所在的平面)旋转所得(图 2-9).

设 S^1 是 yz 平面中以(0，a，0)为中心的圆. 那么 S^1 由方程$(y-a)^2+z^2=r^2$ 给出，而将 S^1 绕 z 轴旋转就得到环面 T 上的点，它满足方程

$$z^2=r^2-(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2$$

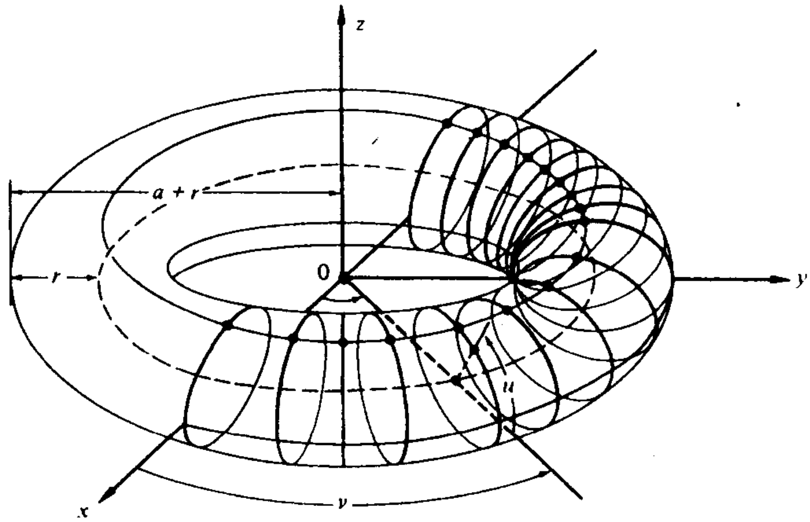


图 2-9

所以，T 是函数

$$f(x,y,z)=z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2$$

值为 r^2 的原象．函数 f 在 $(x, y)\neq(0, 0)$ 是可微的，因

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y(\sqrt{x^2+y^2}-a)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x(\sqrt{x^2+y^2}-a)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

r^2 是 f 的正则值，这样环面 T 是正则曲面．

命题 1 说明可微函数的图是正则曲面．下列命题提供了它的部分逆定理，即任何正则曲面局部是一个可微函数的图．

命题 3 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是正则曲面．那么对任何 $p\in S$ 存在 p 在 S 中的一个邻域 V，使得 V 是可微函数的图，它有下列其中之一的形式：$z=f(x, y)$，$y=g(x, z)$，$x=h(y, z)$．

证明 设 X：$U\subset\mathbb{R}^2\to S$ 是 S 在 p 点附近的一个参数表示，记 $X(u, v)=(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$，$(u, v)\in U$．从定义 1 的条件 3，下列 Jacobi 行列式之一在 $X^{-1}(p)=q$ 非零：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

首先假定 $(\partial(x, y)/\partial(u, v))(q)\neq0$，且考虑映照 $\pi\circ X$：$U\to\mathbb{R}^2$，其中 π 是投影映照 $\pi(x, y, z)=(x, y)$．那么 $\pi\circ x(u, v)=(x(u, v), y(u, v))$，且因 $(\partial(x, y)/\partial(u, v))(q)\neq0$，利用反函数定理，我们一定有 q 的邻域 V_1 及 $\pi\circ X(q)$ 的邻域 V_2，使 $\pi\circ X$ 将 V_1 微分同胚地映照到 V_2 上(图 2-10)．由此，π 限制于 $X(V_1)=V$ 是 1 对 1 的，且有可微逆映照 $(\pi\circ X)^{-1}$：$V_2\to V_1$．注意到 X 是同胚，V 是 p 在 S 中的领域．现在，如果我们将映照 $(\pi\circ X)^{-1}$：$(x, y)\to(u(x, y), v(x, y))$ 与函数 $(u, v)\to z(u, v)$ 复合，我们发现 V 是可微函数 $z=z(u(x, y), v(x, y))=f(x, y)$ 的图，这就解决了第一种情形．

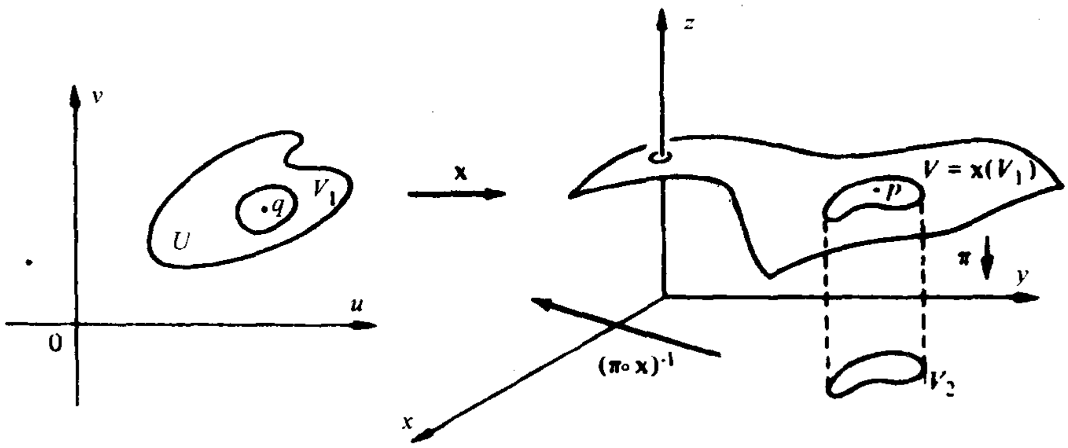


图 2-10

余下情况可用同样方式处理，得到 $x=h(y, z)$ 及 $y=g(x, z)$. 证毕.

下面一个命题说，如果我们早就知道 S 是正则曲面，如想取参数表示 X，我们就不必检验 X^{-1} 是连续的，只要其他条件成立就可以了，这个附注在例 1 中已被用过.

命题 4 设 $p\in S$ 是正则曲面 S 的一点，映照 $X: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 满足 $p\in X(U)$ 及定义 1 的条件 1 和条件 3. 假定 X 是 1 对 1 的，那么 X^{-1} 是连续的.

证明 证明的第一部分类似于命题 3 的证明. 记 $X(u, v)=(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$，$(u, v)\in U$，且设 $q\in U$. 据条件 1 和条件 3 我们可以假定 $(\partial(x, y)/\partial(u, v))(q)\neq 0$，如果必要可交换 $\mathbb{R}^3$ 的坐标轴. 设 $\pi: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 是投影映照 $\pi(x, y, z)=(x, y)$. 从反函数定理，我们得到 q 在 U 中的邻域 V_1 及 $\pi\circ X(q)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的邻域 V_2，使 $\pi\circ X$ 将 V_1 微分同胚地映照到 V_2 上.

假定 X 是 1 对 1 的. 那么，限制于 $X(V_1)$，

$$X^{-1}=(\pi\circ X)^{-1}\circ\pi$$

(见图 2-10). 因此，x^{-1} 作为连续映照的复合是连续的，从 q 的任意性知 x^{-1} 在 $x(U)$ 中是连续的. 证毕.

例 5 单叶锥面 C

$$z=+\sqrt{x^2+y^2},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

不是正则曲面. 注意，我们不能只从"自然"的参数表示

$$(x,y)\to(x,y,+\sqrt{x^2+y^2})$$

不可微分得到所要的结论；可能有满足定义 1 的其他参数表示.

为了说明不会有这种情况，我们应用命题 3. 如果 C 是正则曲面，它在 $(0, 0, 0)\in C$ 的一个邻域中是可微函数 $y=h(x, z)$，$x=g(y, z)$，$z=f(x, y)$ 之一的图. 显然头两种形式立即因 C 在 xz 平面及 yz 平面投影的非 1 对 1 性而抛弃. 最后一种形式在 $(0, 0, 0)$ 的某一邻域中应该和 $z=+\sqrt{x^2+y^2}$ 相一致. 因 $z=+\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0, 0)$ 不可微，这是不可能的.

例 6 例 4 中环面 T(图 2-9)的一个参数表示，能由下列方程给出：

$$X(u,v)=((r\cos u+a)\cos v,(r\cos u+a)\sin v,r\sin u)$$

其中 $0<u<2\pi$，$0<v<2\pi$.

定义 1 的条件 1 容易被验证，而条件 3 化为直接的计算，这留作为习题. 因我们知道 T 是正则曲面，根据命题 4 条件 2 等价于 X 是 1 对 1 的事实.

为证明 X 是 1 对 1 的，我们首先注意到 $\sin u=\frac{z}{r}$；若$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant a$，那么 $\pi/2\leqslant u\leqslant 3\pi/2$，若$\sqrt{x^2+y^2}\geqslant a$ 那么或者 $0<u\leqslant\frac{\pi}{2}$，或者 $3\pi/2\leqslant u<2\pi$. 这样，给定了(x, y, z)，就唯一确定了 u，$0<u<2\pi$. 知道了 u，x 和 y，我们便得到 $\cos v$ 及 $\sin v$，这就唯一地确定了 v，$0<v<2\pi$. 因此，X 是 1 对 1 的.

容易看到，环面能被 3 个这样的坐标邻域所覆盖.

习题

1. 说明柱面$\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2=1\}$是正则曲面，并且找出覆盖它的坐标邻域系.

2. 集合$\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3;\ z=0$ 和 $x^2+y^2\leqslant 1\}$是正则曲面吗？集合$\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3;\ z=0$ 和 $x^2+y^2<1\}$是正则曲面吗？

3. 说明以原点为顶点的双叶锥面，即集合$\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2-z^2=0\}$不是正则曲面.

4. 设 $f(x, y, z)=z^2$. 证明 0 不是 f 的正则值而 $f^{-1}(0)$是正则曲面.

*5. 设 $P=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3;\ x=y\}$(平面)且设 x：$U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 由下式所定义

$$x(u,v)=(u+v,u+v,uv)$$

其中 $U=\{(u, v)\in\mathbb{R}^2;\ u>v\}$. 显然，$x(U)\subset P$. X 是 P 的一个参数表示吗？

6. 利用命题 2 于 $h(x, y, z)=f(x, y)-z$ 的情形，给出命题 1 的另一个证明.

7. 设 $f(x, y, z)=(x+y+z-1)^2$.

a. 确定 f 的临界点和临界值.

b. 对 C 的什么值 $f(x, y, z)=C$ 是正则曲面？

c. 对函数 $f(x, y, z)=xyz^2$ 回答上述问题 a 和 b.

8. 设 $x(u, v)$如定义 1. 验证 dX_q：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是 1 对 1 的充要条件是

$$\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}\neq 0$$

9. 设 V 是 xy 平面中的开集. 说明集合

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad z=0\text{ 且}(x,y)\in V\}$$

是正则曲面.

10. 设 C 是 xy 平面中的“8”字形，且设 S 是 C 上的柱面(图 2-11)；即

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad(x,y)\in C\}$$

S 是正则曲面吗？

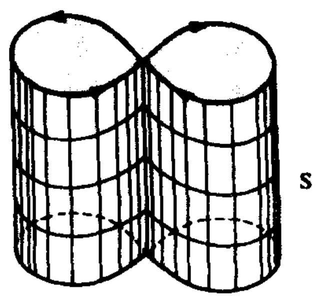


图 2-11

11. 说明集合 $S=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3;\quad z=x^2-y^2\}$是正则曲面且验证下列 a 和 b 是 S 的参数表示：

a. $X(u, v)=(u+v, u-v, 4uv), \quad (u, v)\in\mathbb{R}^2$.

* b. $X(u, v)=(u\cosh v, u\sinh v, u^2), \quad (u, v)\in\mathbb{R}^2, u\neq 0$.

它们覆盖了 S 的哪一部分？

12. 说明由

$$X(u,v) = (a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos u), a, b, c \neq 0$$

所定义的 $X: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的一个参数表示，基中 $0<u<\pi$，$0<v<2\pi$. 描述椭球面上 $u=$常数的曲线的几何意义.

* 13. 求双叶双曲面$\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3; -x^2-y^2+z^2=1\}$的参数表示.

14. 半直线$[0, \infty)$垂直于直线 E 且从某一给定的初始位置绕 E 旋转，同时其原点 O 移 E 运动. 当$[0, \infty)$转过角 θ 时原点移动了距离 $d=\sin^2(\theta/2)$. 验证旋转线的像除去直线 E 是正则曲面. 如果移动距离为 $d=\sin(\theta/2)$；此外还需要除去什么才是正则曲面？

* 15. 设两点 $p(t)$和 $q(t)$以相同速度运动，p 自$(0, 0, 0)$开始沿 z 轴而 q 自$(a, 0, 0)$，$a\neq 0$ 开始沿平行于 y 轴直线运动. 说明连结 $p(t)$，$q(t)$的直线描出了$\mathbb{R}^3$ 中由方程 $y(x-a)+zx=0$ 给出的一个集合. 这是正则曲面吗？

16. 对由方程 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 给定的球面 S^2，定义它坐标系的一种方法是考虑所谓球极投影 π: $S^2-\{N\}\to\mathbb{R}^2$，它把 S^2 上除去北极 $N=(0, 0, 2)$的点 $p=(x, y, z)$映照到 xy 平面与连结 N，p 直线的交点(图 2-12). 设$(u, v)=\pi(x, y, z)$，其中$(x, y, z)\in S^2-\{N\}$ 且$(u, v)\in xy$ 平面.

a. 说明 π^{-1}: $\mathbb{R}^2\to S$ 由下式给出

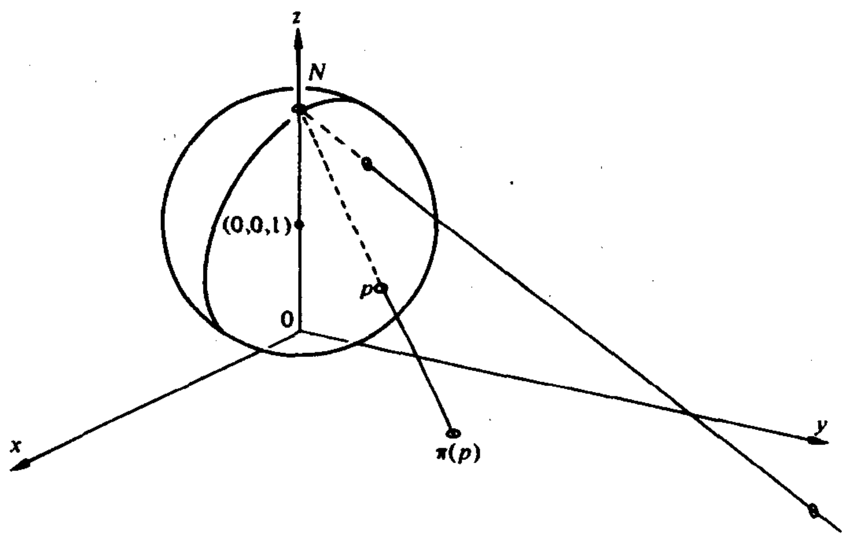


图 2-12 球极投影

$$\pi^{-1}:\begin{cases} x = \dfrac{4u}{u^2+v^2+4} \\ y = \dfrac{4v}{u^2+v^2+4} \\ z = \dfrac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} \end{cases}$$

b. 利用球极投影可以用二个坐标邻域覆盖球面.

17. 和正则曲面类似地定义正则曲线. 证明

a. 可微函数

$$f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

正则值的原象是正则平面曲线. 给出一个非连通的这样的曲线的例子.

b. 可微映照

$$F:U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$

正则值的原象是$\mathbb{R}^3$中的正则曲线. 说明这个命题和$\mathbb{R}^3$中的曲线作为二个曲面交线的经典定义之间的关系.

*c. 集合 $C=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2=y^3\}$不是正则曲线.

*18. 设

$$f(x,y,z)=u=\text{常数}$$
$$g(x,y,z)=v=\text{常数}$$
$$h(x,y,z)=w=\text{常数}$$

描述了三族正则曲面，且假定在$(x_0,\ y_0,\ z_0)$Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}\neq 0$$

证明在$(x_0,\ y_0,\ z_0)$的某一邻域内，三族曲面将由$\mathbb{R}^3$的一个开集到$\mathbb{R}^3$中的映照 $F(u,\ v,\ w)=(x,\ y,\ z)$所描述，其中，如曲面族 $f(x,\ y,\ z)=u$ 中曲面的局部参数表示，是在这个映照中置 $u=$常数而得到的. 对下列曲面情形确定 F：

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=u=\text{常数};(\text{以}(0,0,0)\text{为中心的球面})$$

$$g(x,y,z)=\frac{y}{x}=v=\text{常数},(\text{过}\ z\ \text{轴的平面})$$

$$h(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{z^2}=w=\text{常数},(\text{以}(0,0,0)\text{为顶点的锥面})$$

*19. 设 α：$(-3,\ 0)\to\mathbb{R}^2$ 由下式所定义(图 2-13)：

$$\alpha(t)=\begin{cases}(0,-(t+2)), & \text{如果}\ t\in(-3,-1)\\ \text{连结}\ p=(0,-1),q=\left(\dfrac{1}{\pi},0\right)\text{的正则参数曲线}, & \text{如果}\ t\in\left(-1,-\dfrac{1}{\pi}\right)\\ \left(-t,-\sin\dfrac{1}{t}\right), & \text{如果}\ t\in\left(-\dfrac{1}{\pi},0\right)\end{cases}$$

能够定义一条连结 p，q 的曲线，使 α 的所有导数在对应点是连续的且 α 自身不相交. 设 C 是 α 的轨迹.

a. C 是正则曲线吗？

b. 让平面 $\mathbb{R}^2$ 的一条法线跑遍 C，它描出的“柱面”S 是正则曲面吗？

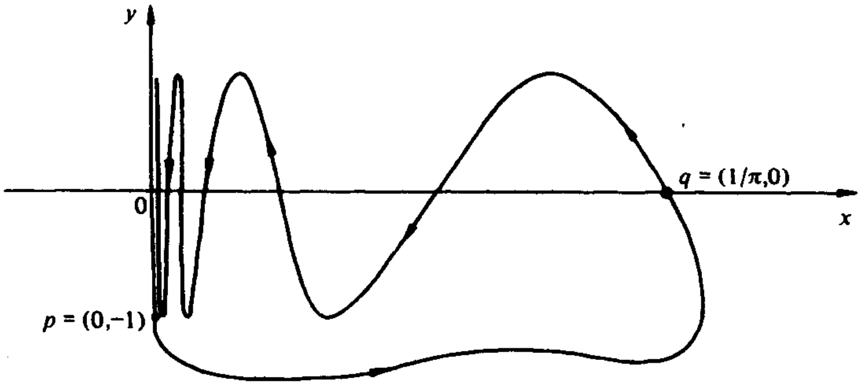


图 2-13　此图中水平方向与垂直方向比例不同

2.3　参数变换；曲面上的可微函数[○]

微分几何涉及曲面的局部性质，它依赖于曲面在一点邻近的变化情况. 在 2.2 给出的正则曲面的定义适合于这个目的. 根据这个定义，正则曲面的每一点 p 属于某一坐标邻域. 这种邻域中的点被它们的坐标所刻划，所以我们应能用这些坐标来定义感兴趣的局部性质.

例如，重要的是我们对函数 $f: S \to \mathbb{R}$ 能定义它在正则曲面 S 上一点 p 是可微的意义. 处理的自然方法是选取 p 的一个坐标邻域，它的坐标是 u，v，如果它关于 u，v 坐标的表示式容有各阶连续偏导数. 那么说 f 在 p 点是可微的.

但是，S 的同一点可以属于不同的坐标邻域(在 2.2 中例 1 的球中，第一封限内部的任一点属于给定的坐标邻域系的 3 个坐标邻域). 而且，在 p 的一个邻域中还可选取其他坐标系(对球面上的点可以取地理坐标或球极投影坐标；参见 2.2 习题 16). 为使上述定义有意义，它必须不依赖于坐标系的选取. 换言之，必须说明，当 p 属于坐标为(u，v)及(ξ，η)的两个坐标邻域时，能够借助于可微变换将其中一对坐标变到另一对坐标.

下列命题说明这是对的.

命题 1(参数变换)　设 p 是正则曲面 S 的一点，又设 $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ 及 $Y: V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ 是 S 的两个参数表示，使 $p \in X(U) \cap Y(U) = W$. 那么“坐标变换”$h = X^{-1} \circ Y: Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ (图 2-14)是微分同胚，即 h 是可微的且有可微逆映照 h^{-1}.

换言之，如果 x 和 y 由下列式子给出：

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in U$$

$$Y(\xi,\eta) = (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), z(\xi,\eta)), (\xi,\eta) \in V$$

那么坐标变换 h 为

$$u = u(\xi,\eta), \quad v = v(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in Y^{-1}(W)$$

○　本节的证明在初次阅读时可略去.

它具有性质：函数 u，v 具有各阶连续偏导数，且映照 h 是可逆的，逆映照为

$$\xi = \xi(u,v), \eta = \eta(u,v), (u,v) \in X^{-1}(w)$$

其中函数 ξ 和 η 也有各阶偏导数，因为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} \cdot \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} = 1$$

这意味着 h 和 h^{-1} 的 Jacobi 行列式处处非零.

命题 1 的证明 $h = X^{-1} \circ Y$ 是同胚，因为它是同胚的合成(见第 2 章附录的命题 3). 但不能用类似的讨论断言 h 是可微的，因为 X^{-1} 定义在 S 的开子集中且我们还不知道 S 上可微函数的意义.

我们用下面的办法来处理，设 $r \in y^{-1}(W)$，$q = h(r)$. 因为 $x(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ 是一个参数表示，我们不妨假定

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$$

不然的话就把坐标轴重新命名. 将 X 扩充成映照 $F: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$，它的定义如下：

$$F(u,v,t) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v) + t)$$
$$(u,v) \in U, t \in \mathbb{R}$$

几何上，F 将 U 上的垂直柱体 C 映照成 $x(U)$ 上的"垂直柱体"，它将高度为 t 的 C 的每个截面，映照到曲面 $X(u,v) + te_3$，其中 e_3 是 z 轴的单位向量(图 2-14).

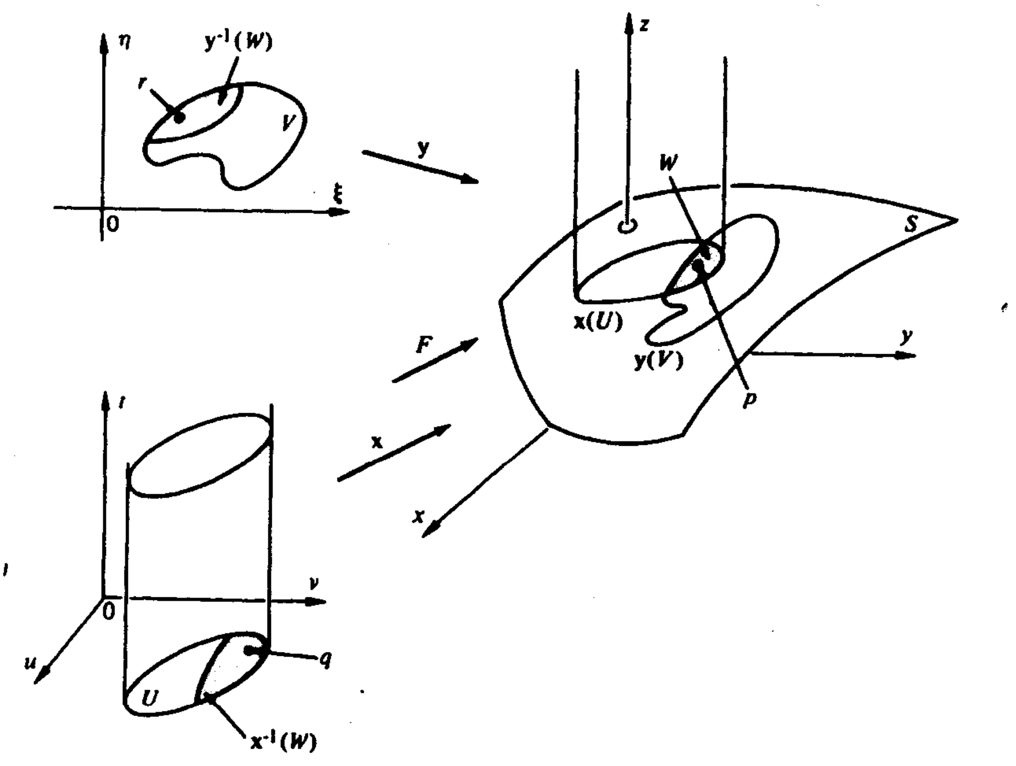


图 2-14

显然 F 是可微的，且 F 的限制 $F|_{U \times \{0\}} = X$. 计算微分 dF_q 的行列式，我们得到

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \quad (q) \neq 0$$

所以，能用反函数定理，它保证 $X(q)$在$\mathbb{R}^3$ 中邻域 M 的存在，在这个邻域中 F^{-1}存在且可微.

由 Y 的连续性，有 r 在 V 的邻域 N 使 $Y(N) \subset M$(第 2 章附录的命题 2). 注意到限制于 N，$h|_N = F^{-1} \circ Y|_N$ 是可微映照的复合. 这样，应用映照的链式法则(第 2 章附录的命题 8)得到 h 在 r 是可微的. 因 r 是任意的，所以 h 在 $Y^{-1}(W)$上是可微的.

完全相同的讨论能用来说明映照 h^{-1}是可微的，所以 h 是一个微分同胚. 证毕.

现在我们来给出正则曲面上可微函数的明确定义.

定义 1 设 f: $V \subset S \to \mathbb{R}$ 是定义在正则曲面 S 的开子集 V 中的一个函数. 如果对在 $p \in V$ 附近的某一参数表示 X: $U \subset \mathbb{R}^2 \to S$，$p \in X(U) \subset V$，复合 $f \circ X$: $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 在 $X^{-1}(p)$是可微的，那么称 f 在 p 点是可微的. 如果 f 在 V 的所有点上是可微的. 那么称 f 在 V 中是可微的.

从最后的命题立即得出，所给出的定义不依赖于参数表示 X 的选取. 事实上，如果 Y: $V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ 是$p \in X(V)$点附近的另一个参数表示，且若 $h = X^{-1} \circ Y$，那么 $f \circ Y = f \circ x \circ h$ 也可微，即所说的不依赖于参数表示的选取.

注 1 我们将常常不加区分地用相同的符号 $f(u, v)$表示 f 和 $f \circ X$，说 $f(u, v)$是 f 在坐标系 X 中的表示式. 这也等价于把 $X(U)$看成 U，把(u, v)同时看作为 U 中的一点及 $X(U)$中的坐标为(u, v)的一点. 今后，这类不确切的语言将不作说明地加以应用.

例 1 设 S 是正则曲面而 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是包含 S 的一个开集. 设 f: $V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是可微函数，那么 f 在 S 上的限制是 S 上的一个可微函数. 事实上，对任何 $p \in S$ 和在 p 点的任何一个参数表示 X: $U \subset \mathbb{R}^2 \to S$，函数 $f \circ X$: $U \to \mathbb{R}$ 是可微的. 特别地，下列函数是可微的：

1. 关于某单位向量 $V \in \mathbb{R}^3$ 的高度函数 h: $S \to \mathbb{R}$，它定义为 $h(p) = p \cdot V$，$p \in S$，其中点乘表示$\mathbb{R}^3$ 中的通带内积，$h(p)$是 $p \in S$ 关于过$\mathbb{R}^3$ 的原点且垂直于 V 的平面的高度(图 2-15).

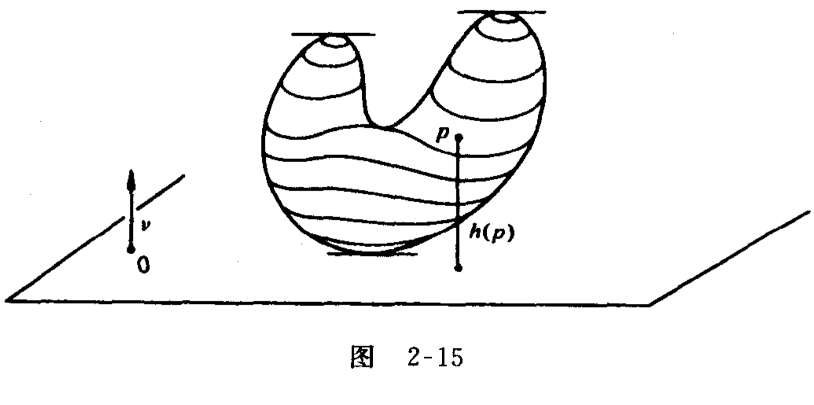


图 2-15

2. 点 $p \in S$ 离$\mathbb{R}^3$ 中的一个固定点 p_0 的距离的平方，$f(p) = |p - p_0|^2$. 取平方的必要性在于距离 $|p - p_0|$ 在 $p = p_0$ 处不可微.

注 2 命题 1 的证明实质性地应用了一个坐标映照的逆是连续的事实. 为了定义曲面上的可微函数(一个有活力的概念)我们需要命题 1，所以我们不能删掉正则曲面定义中的这个条件(见 2.2 附注 1).

可微性的定义，能被容易地推广到曲面之间的映照的情形. 考虑正则曲面 S_1 的开集 V_1 到正则曲面 S_2 的连续映照 ϕ: $V_1 \subset S_1 \to S_2$，如果在 $p \in X_1(U)$附近和 S_2 上相应处给定参数表示

$$X_1: U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1, \quad X_2: U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

且 $\phi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$，映照

$$X_2^{-1} \circ \phi \circ X_1: U_1 \to U_2$$

在 $q = X_1^{-1}(p)$是可微的(图 2-16)，则称 ϕ 在点 $p \in V_1$ 是可微的.

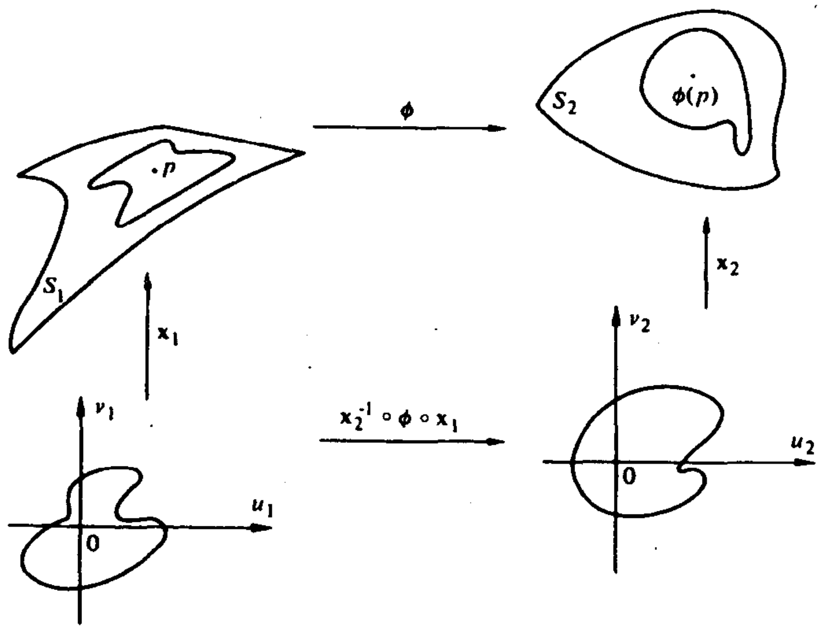


图 2-16

换言之，当 ϕ 在局部坐标系中表示为 $\phi(u_1, v_1) = (\phi_1(u_1, v_1), \phi_2(u_1, v_1))$时，$\phi_1$ 和 ϕ_2 有各阶连续偏导数，则 ϕ 是可微的.

定义不依赖于局部坐标的选取的证明留作习题.

我们应该说明，与可微性相联系的自然的等价性概念，是微分同胚的概念. 两张正则曲面 S_1 和 S_2 间如果存在可微映照 ϕ: $S_1 \to S_2$，且有可微逆映照 ϕ^{-1}: $S_1 \to S_2$，那么 S_1 和 S_2 是微分同胚的. 这个 ϕ 称为从 S_1 到 S_2 的微分同胚. 在研究正则曲面时微分同胚的概念所起作用，相当于向量空间中的同构或者欧氏几何中的全等. 换言之，从可微性概念看来，二个微分同胚的曲面是不加区分的.

例 2 如果 X: $U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ 是参数表示，那么 X^{-1}: $X(U) \to \mathbb{R}^2$ 是可微的. 事实上，对任何 $p \in X(U)$和 p 点附近的任一参数表示 Y: $V \subset \mathbb{R}^2 \to S$，$X^{-1} \circ Y$: $Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$是可微的，其中

$$W = X(U) \cap Y(V)$$

这说明 U 和 $X(U)$ 是微分同胚的(即每一正则曲面局部微分同胚于一个平面)，这也表明了上述注 1 中所做的等价性是合理的.

例 3 设 S_1 和 S_2 是正则曲面. 假定 $S_1 \subset V \subset \mathbb{R}^3$，其中 V 是$\mathbb{R}^3$ 中的开集，ϕ: $V \to \mathbb{R}^3$ 是可微映照并且 $\phi(S_1) \subset S_2$. 那么 ϕ 在 S_1 上的限制 $\phi|_{S_1}$：$S_1 \to S_2$ 是可微映照. 事实上，对给定的 $p \in S_1$ 及 p 的附近的参数表示 X_1：$U_1 \to S_1$ 及 S_2 中的相应参数表示 X_2：$U_2 \to S_2$，$\phi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$，我们有可微映照

$$X_2^{-1} \circ \phi \circ X_1 : U_1 \to U_2$$

下面是这个一般例子的特殊情况.

1. 设 S 关于 xy 平面是对称的，即，如果$(x, y, z) \in S$，那么$(x, y, -z) \in S$. 这时将 S 中任一点映到它对称点的映照 σ: $S \to S$ 是可微的，因为它是$\mathbb{R}^3$ 中将$(x, y, z) \to (x, y, -z)$的映照 σ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 在 S 上的限制. 这当然可推广到关于$\mathbb{R}^3$ 中任一平面对称的曲面情形.

2. 设 $R_{z,\theta}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 是关于 z 轴旋转 θ 角度的映照，又设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是这个旋转下不变的正则曲面，即当 $p \in S$ 时 $R_{z,\theta}(p) \in S$，那么限制 $R_{z,\theta}$：$S \to S$ 是可微映照.

3. 设 ϕ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 由

$$\phi(x,y,z) = (xa, yb, zc)$$

给定，其中 a，b 和 c 是非零实数，ϕ 显然是可微的，ϕ 在 S^2 上的限制 $\phi|_{S^2}$是从球面

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

到椭球面

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

的可微映照(参见本章附录例 6).

注 3 命题 1(见例 2)意味着参数表示 X：$U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ 是 U 到 $X(U)$上的微分同胚. 事实上，我们现在能把正则曲面刻划成$\mathbb{R}^3$ 中局部微分同胚于$\mathbb{R}^2$ 的这种子集 $S \subset \mathbb{R}^3$；即对每一点 $p \in S$，存在 p 在 S 中的一个邻域 V，开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 和微分同胚映照 X：$U \to V$. 这个优美的特征可作为处理曲面的起点(见习题 13).

现在我们可以回到曲线论，并且从这章的观点来处理曲线，即将它们看作$\mathbb{R}^3$ 的子集. 我们只提及某些基本点而将详细展开留给读者.

符号 I 表示直线$\mathbb{R}$ 上的开区间，$\mathbb{R}^3$ 中的**正则曲线**是具有下列性质的子集 $C \subset \mathbb{R}^3$：对每点 $p \in C$，存在 p 点的一个邻域 $V \subset \mathbb{R}^3$ 和一个可微的同胚 α：$I \subset \mathbb{R} \to V \cap C$，使它的微分映照 $d\alpha_t$ 对每个 $t \in I$ 是 1 对 1 的(见图 2-17).

可以证明(习题 15)参数的变换由微分同胚给出(象曲面一样). 从这个基本的结果可以确定什么时候某个借助于局部坐标得到的性质是不依赖于坐标选取的，这种性质便是集合 C 的局部性质.

例如，在第 1 章中定义的弧长已证明是不依赖于参数选取的(习题 15)，所以是集合 C 的性质. 因为总能用弧长作为正则曲线 C 的局部坐标，那么由此确定的性质(曲率，挠率等)是 C 的局部性质. 这也说明在第 1 章中建立的曲线的局部理论对正则曲线依然成立.

有时候，用一种特殊的方法移动某一正则曲线，也可定义曲面，下面的例子就是这种

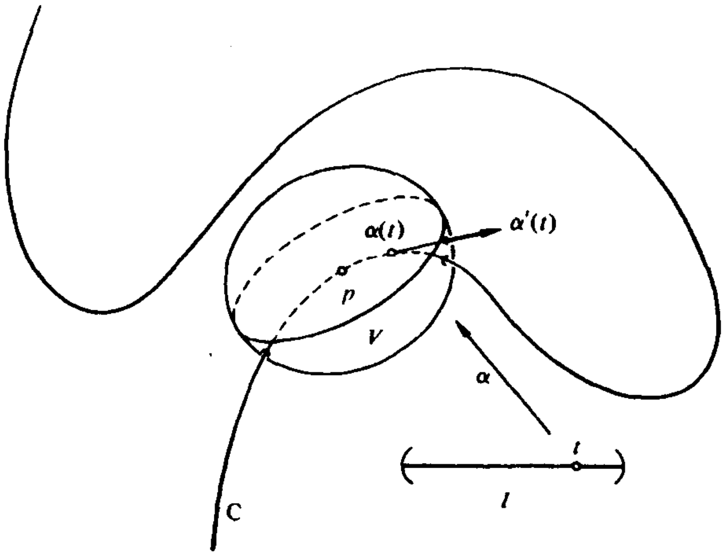


图 2-17 正则曲线

情形.

例 4(旋转面) 正则平面曲线 C，围绕它所在平面上与曲线不相交的某轴旋转，得到集合 $S\subset\mathbb{R}^3$；我们取 xz 平面作为曲线所在的平面，z 轴为旋转轴. 设

$$x = f(v),\quad z = g(v),\quad a < v < b, f(v) > 0$$

是曲线 C 的一个参数表示，u 表示绕 z 轴旋转的角度. 这样，我们得到从开集 $U=\{(u, v)\in\mathbb{R}^2;\ 0<u<2\pi,\ a<v<b\}$ 到 S 中的一个映照(图 2-18)：

$$X(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

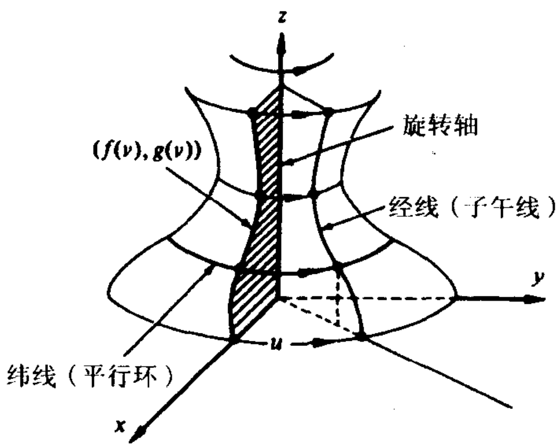


图 2-18 旋转面

很快会看出 x 满足正则曲面定义中参数表示的条件. 因为 S 能完全被类似的参数表示所覆盖，S 是正则曲面，称为旋转面. 曲线 C 称为 S 的母线，z 轴称为 S 的旋转轴，被 C 的点所描述的圆称为 S 的纬线(平行环)，而 C 在旋转时的不同位置则称为 S 的经线(子午线).

为说明 x 是 S 的一个参数表示我们必须验证 2.2 定义 1 的条件 1，2 和 3. 条件 1 和 3 直

接可得，留给读者作练习．为说明 X 是同胚，首先证明 X 是 1 对 1 的．事实上，$(f(v), g(v))$ 是曲线 C 的一个参数表示．给定 z 和 $x^2+y^2=(f(v))^2$，我们能唯一地确定 v．因此 X 是 1 对 1 的．

注意到，又因为$(f(v), g(v))$是 C 的参数表示，v 是 z 和$\sqrt{x^2+y^2}$的连续函数所以是(x, y, z)的连续函数．

为证明 X^{-1}是连续的，只要说明 u 是(x, y, z)的连续函数．为此，首先注意到若 $u\neq\pi$，因 $f(v)\neq 0$，有

$$\tan\frac{u}{2}=\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}=\frac{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{2\cos^2\frac{u}{2}}=\frac{\sin u}{1+\cos u}$$

$$=\frac{\frac{y}{f(v)}}{1+\frac{x}{f(v)}}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

所以

$$u=2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

这样 $u\neq\pi$ 时，u 是(x, y, z)的连续函数．类似地，若 u 是在 π 附近小区间中，我们得到

$$u=2\operatorname{arccot}\frac{y}{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

因此，u 是(x, y, z)的连续函数．这证明了 X^{-1}是连续的，也就完成了验证．

注 4 在我们的旋转面的定义中有一个小问题，如果 $C\subset\mathbb{R}^2$ 是闭正则平面曲线，它关于$\mathbb{R}^3$中的一个轴 r 是对称的．那么，围绕 r 旋转 C，我们得到一张曲面，可证明它是正则的，且也应该叫做旋转面(当 C 是圆周时且 r 包含 C 的直径时，该曲面就是一个球面)．为在我们定义中包括这种情况，我们必须排除二点，即 C 和 r 相交的二点．由于技术上的原因，我们希望保留原先的术语而称后一种曲面为*广义旋转面*．

关于曲面的定义还得做最后一点评述．我们已以$\mathbb{R}^3$ 中的一个子集作为(正则)曲面的定义．如果我们既要考虑曲面的整体性质，又要考虑它的局部性质，这是正确的处理方法，读者也许感到疑惑，我们为何不象曲线一样将曲面简单地定义为参数曲面．这是可以如此做的，而事实上相当数量的微分几何经典书籍采取了这种办法．只要仅仅考虑局部性质这就无伤大雅．但是在后一种方法中，基本的整体概念，像定向性(将在 2.6 和 3.1 中处理)，必须被略去，或得到不适当的处理．

不管怎样，参数曲面的概念有时是有用的，这里将它介绍一下．

定义 2 参数曲面 $X: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是从$\mathbb{R}^2$ 中开集 U 到$\mathbb{R}^3$ 的一个可微映照．集合 $X(U)\subset\mathbb{R}^3$ 称为 X 的*轨迹*．如果微分映照 dX_q：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 在所有 $q\in U$ 是 1 对 1 的$\left(\text{即向量}\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\text{对所有 } q\in U \text{ 是线性独立的}\right)$，那么 X 是*正则的*．dX_q 不是 1 对 1 的点 $q\in U$ 叫做 X 的一个*奇点*．

注意，对参数曲面，甚至当正则时，它的轨迹可以是自身相交的.

例 5 设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 是正则参数曲线. 定义

$$X(t,v)=\alpha(t)+v\alpha'(t),\quad (t,v)\in I\times\mathbb{R}$$

X 称作 α 的切线面(图 2-19).

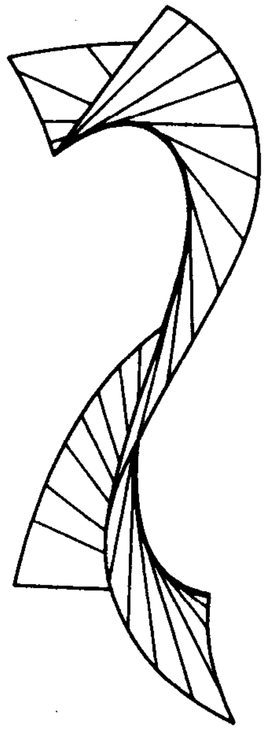


图 2-19 切线面

现在假定 α 的曲率 $k(t)$，$t\in I$ 对所有 $t\in I$ 是非零的，并且将 X 的定义域限制于 $U=\{(t,v)\in I\times\mathbb{R}；v\neq 0\}$. 那么

$$\frac{\partial X}{\partial t}=\alpha'(t)+v\alpha''(t),\frac{\partial X}{\partial v}=\alpha'(t)$$

且

$$\frac{\partial X}{\partial t}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}=v\alpha''(t)\wedge\alpha'(t)\neq 0,\quad (t,v)\in U$$

因为对所有 t，曲率(见 1.5 习题 12)

$$k(t)=\frac{|\alpha''(t)\wedge\alpha'(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$$

是非零的. 因此，X 的在 U 上限制 X：$U\to\mathbb{R}^3$ 是正则参数曲面，它的轨迹由两个连通片所组成，而它们的公共边界是集合 $\alpha(I)$.

下列性质说明，我们可以将微分几何的局部概念和性质推广到正则参数曲面中去.

命题 2 设 X：$U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是正则参数曲面，$q\in U$ 是其中一点. 那么存在 q 在 $\mathbb{R}^2$ 中的一个邻域 V，使 $X(V)\subset\mathbb{R}^3$ 是正则曲面.

证明 这又是反函数定理的一个推论. 记

$$X(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

由正则性，我们可以假定 $(\partial(x,y)/\partial(u,v))(q)\neq 0$. 定义一个映照 F：$U\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$.

$$F(u,v,t)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)+t)\quad (u,v)\in U,\quad t\in\mathbb{R}$$

那么

$$\det(dF_q)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q)\neq 0$$

据反函数定理，存在 q 的邻域 W_1 和 $F(q)$ 的邻域 W_2 使 F：$W_1\to W_2$ 是一个微分同胚. 置 $V=W_1\cap U$，且观察到 $F|_V=X|_V$，这样，$X(V)$ 微分同胚于 V，所以是正则曲面. 证毕.

习题[㊀]

*1. 设 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3；x^2+y^2+z^2=1\}$ 是单位球面且设 A：$S^2\to S^2$ 是(对映的)映照 $A(x,y,z)=(-x,-y,-z)$. 证明：A 是微分同胚.

2. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是正则曲面，π：$S\to\mathbb{R}^2$ 将每点 $p\in S$ 映到它在 $\mathbb{R}^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3；z=0\}$ 的正交投影. π 是可微的吗?

3. 说明抛物面 $z=x^2+y^2$ 微分同胚于平面.

4. 构造椭球面

㊀ 跳过这节证明的读者也应该略去习题 13～16.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

和球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 之间的微分同胚.

*5. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是正则曲面，d：$S\to\mathbb{R}$ 由 $d(p)=|p-p_0|$ 定义，其中 $p\in S$，$p_0\in\mathbb{R}^3$，$p_0\notin S$；即d 是从 p 到不在 S 上固定点 p_0 的距离. 证明：d 是可微的.

6. 证明：曲面间的可微映照的定义不依赖于所选取的参数表示.

7. 证明："S_1 微分同胚于 S_2"的关系是正则曲面集合中的等价关系.

*8. 设 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+y^2+z^2=1\}$，$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+y^2-z^2=1\}$. $N=(0,0,1)$和 $S=(0,0,-1)$分别是 S^2 的北极和南极. 设 F：$S^2-\{N\}\cup\{S\}\to H$ 定义如下：对每点 $p\in S^2-\{N\}\cup\{S\}$，设 p 到 z 轴的垂线交 Oz 于 q. 考虑从 q 点出发的过 p 点的半直线 l. 那么 $F(p)=l\cap H$(图 2-20)证明：F 是可微的.

9. a. 定义正则曲线上可微函数的概念. 为使定义有意义需要证明什么？现在不要证明它. 如果你没有略去本节的证明，将要求你在习题 15 证明它.

b. 说明由

$$E(t)=(\cos t,\sin t),t\in\mathbb{R}$$

定义的映照 E：$\mathbb{R}\to S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2=1\}$是可微的(它的几何意义是 E 将$\mathbb{R}$ 沿 S^1"卷起来").

10. 设 C 是平面上位于直线 r 一侧的平面正则曲线，它和 r 交于 p，q 两点(图 2-21). 为保证 C 关于 r 旋转生成一个广义(正则)旋转面，C 该满足哪些条件？

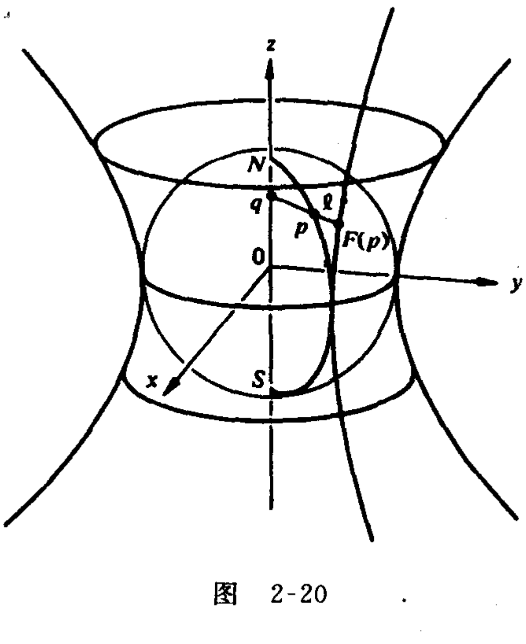


图 2-20

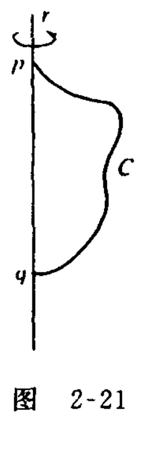


图 2-21

11. 证明：旋转面 S 绕它的轴旋转是 S 的一个微分同胚.

12. 参数曲面对描述除去有限个点和有限条直线后成正则曲面的集合 Σ 经常是有用的. 例如，设 C 是不通过原点 $O=(0,0,0)$的正则参数曲线 α：$(a,b)\to\mathbb{R}^3$. 设 Σ 为过定点 O 和动点 $p\in C$ 的直线 l 所生成的集合(以 O 为顶点的锥面，见图 2-22).

a. 找出参数曲面 X 使它的轨迹为 Σ；

b. 找出 X 非正则的点；

c. 从 Σ 上除去那些点后余下的集合是正则曲面？

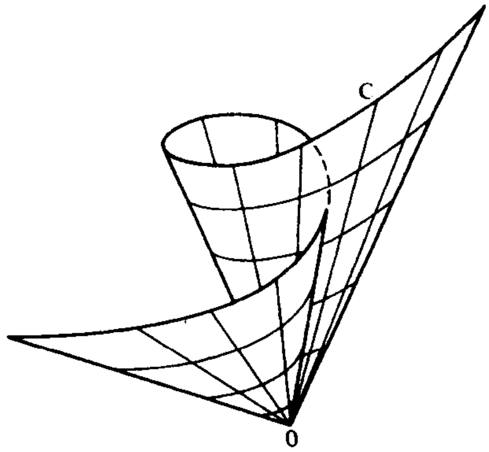


图 2-22

*13. 证明：在书中(定义 1)给出的函数 $f: V\subset S\to\mathbb{R}$ 的可微性的定义等价于下列命题：对 $p\in V$，如果 f 是定义在$\mathbb{R}^3$ 中包含 p 的开集上的可微函数在 V 的限制，那么 f 在 p 是可微的.（如果我们从这个可微性定义出发，我们就能将曲面定义为局部微分同胚于$\mathbb{R}^2$ 的点集；见注 3.）

14. 设 $A\subset S$ 是正则曲面 S 的一个子集. 证明：A 本身是正则曲面的充要条件是 A 在 S 中是开的；即 $A=U\cap S$，其中 U 是$\mathbb{R}^3$ 中的开集.

15. 设 C 是正则曲线，$\alpha: I\subset\mathbb{R}\to C$ 和 $\beta: J\subset\mathbb{R}\to C$ 是曲线 C 在点 $p\in\alpha(I)\cap\beta(I)=W$ 邻域中的两个参数表示. 设

$$h=\alpha^{-1}\cdot\beta:\beta^{-1}(W)\to\alpha^{-1}(W)$$

是参数变换. 证明：

a. h 是微分同胚.

b. C 在 W 中弧长的绝对值不依赖于它的参数表示的选取，即

$$\left|\int_{t_0}^{t}|\alpha'(t)|\,dt\right|=\left|\int_{\tau_0}^{\tau}|\beta'(\tau)|\,d\tau\right|$$
$$t=h(\tau),\quad t\in I,\quad \tau\in J$$

*16. 设$\mathbb{R}^2=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3; z=-1\}$等同于复平面$\mathbb{C}$，方法是置$(x, y, -1)=x+iy=\zeta\in\mathbb{C}$. 设 $P: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是复多项式

$$P(\zeta)=a_0\zeta^n+a_1\zeta^{n-1}+\cdots+a_n,\quad a_0\neq 0,\quad a_i\in\mathbb{C}\quad i=1,\cdots,n$$

以 π_N 表示 $S^2=\{(x, y, z)\in\mathbb{C}^3; x^2+y^2+z^2=1\}$到$\mathbb{C}^2$ 的球极投影(取北极 $N=(0, 0, 1)$为极点). 证明由

$$F(p)=\pi_N^{-1}\circ P\circ\pi_N(p),\quad p\in S^2-\{N\}$$
$$F(N)=N$$

给出的映照 $F: S^2\to S^2$ 是可微的.

2.4 切平面；映照的微分

在本节中，我们将说明正则曲面 S 定义中的条件 3 保证了对每点 $p\in S$，曲面 S 上通过 p 点的参数曲线的切向量的全体，组成一个平面.

曲面 S 在某点 $p\in S$ 的切向量是指可微参数曲线 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon)\to S$，$\alpha(0)=p$ 的切向量$\alpha'(0)$.

命题 1 设 $X: U\subset\mathbb{R}^2\to S$ 是正则曲面 S 的参数表示，并设 $q\in U$. 2 维向量子空间

$$dX_q(\mathbb{R}^2)\subset\mathbb{R}^3$$

与 S 在 $X(q)$的切向量全体一致.

证明　设 W 是在 $x(q)$的切向量，即 $W=\alpha'(0)$，其中 α：$(-\varepsilon,\ \varepsilon)\rightarrow X(U)\subset S$ 可微且 $\alpha(0)=X(q)$. 据2.3 例 2，曲线 $\beta=X^{-1}\circ\alpha$：$(-\varepsilon,\ \varepsilon)\rightarrow U$ 是可微的. 由微分的定义(第 2 章附录定义 1)，我们有 $dX_q(\beta'(0))=W$，所以 $W\in dX_q(\mathbb{R}^2)$(图 2-23).

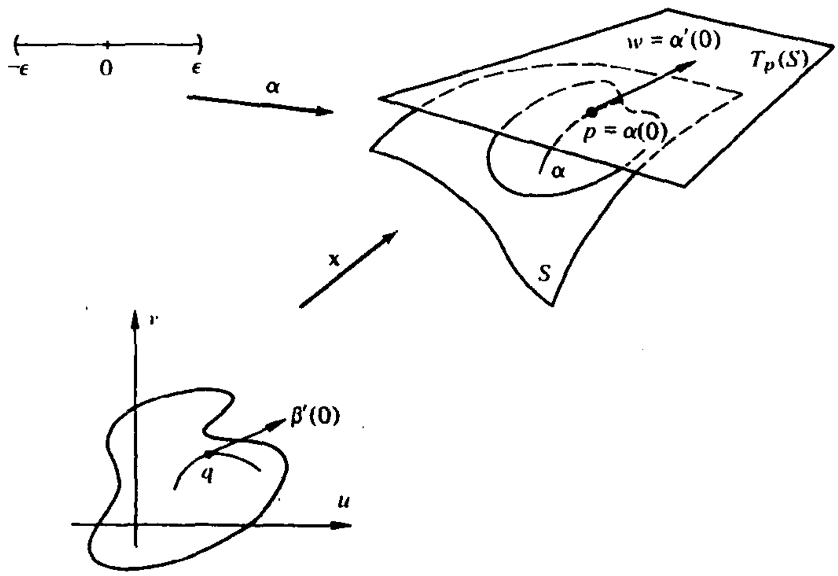


图　2-23

另一方面，设 $W=dX_q(U)$，其中 $V\in\mathbb{R}^2$. 显然 V 是由

$$\gamma(t)=tv+q,\quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

给出的曲线 γ：$(-\varepsilon,\ \varepsilon)\rightarrow U$ 的速度向量. 根据微分定义 $W=\alpha'(0)$，其中 $\alpha=X\circ\gamma$. 这说明 W 是切向量. 证毕.

从上述命题，通过 $X(q)=p$ 点的平面 $dX_q(\mathbb{R}^2)$不依赖于坐标映照 x 的选取. 这个平面就称为 S 在 p 点的切平面，记为 $T_p(S)$. 参数表示 x 的取法确定了 $T_p(S)$的一组基 $\left\{\frac{\partial X}{\partial u}(q),\ \frac{\partial X}{\partial v}(q)\right\}$，它称为与参数表示 X 相关的基. 有时为方便起见，记 $\frac{\partial X}{\partial u}=X_u$，$\frac{\partial X}{\partial v}=X_v$.

向量 $W\in T_p(S)$在与参数表示 X 相关的基上的坐标. 按如下方式确定. 曲线 β：$(-\varepsilon,\ \varepsilon)\rightarrow U$ 的方程为 $\beta(t)=(u(t),\ v(t))$，$\beta(0)=q=X^{-1}(p)$，那么，W 是曲线 $\alpha=X\circ\beta$ 的速度向量 $\alpha'(0)$. 这样

$$\alpha'(0)=\frac{d}{dt}(X\circ\beta)(0)=\frac{d}{dt}X(u(t),v(t))(0)$$
$$=X_u(q)u'(0)+X_v(q)v'(0)=W$$

因此，在基$\{X_u(q),\ X_v(q)\}$下，W 有坐标$(u'(0),\ v'(0))$，基中$(u(t),\ v(t))$是 $t=0$ 处速度向量为 W 的一条曲线在参数表示 X 中的表达式.

有了切平面的概念，我们就能说及曲面之间可微映照的微分. 设 S_1 和 S_2 是二张正则曲面，ϕ：$V\subset S_1\rightarrow S_2$ 是 S_1 中的开集 V 到 S_2 中的可微映照. 对 $p\in V$，每个切向量 $W\in T_p(S_1)$

是可微参数曲线 α：$(-\varepsilon, \varepsilon)\to v$，$\alpha(0)=p$ 的速度向量 $\alpha'(0)$．曲线 $\beta=\phi\circ\alpha$ 满足 $\beta(0)=\phi(p)$，所以 $\beta'(0)$ 是 $T_{\phi(p)}(S_2)$ 的一个向量(图 2-24)．

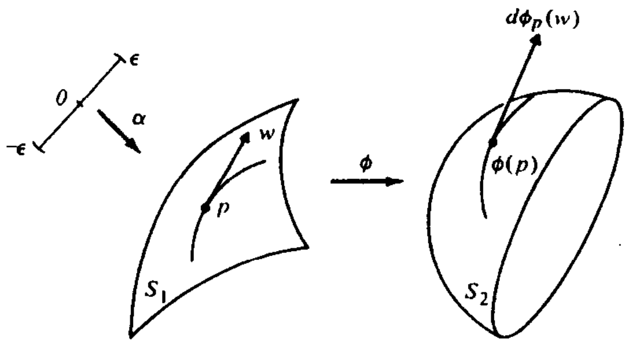


图　2-24

命题 2　上述讨论中，对给定的 W，向量 $\beta'(0)$ 不依赖于 α 的选取．由 $d\phi_p(W)=\beta'(0)$ 所定义的映照 $d\phi_p$：$T_p(S_1)\to T_{\phi(p)}(S_2)$ 是线性的．

证明　证明类似于欧氏空间的情形(见第 2 章附录的命题 4)．设 $X(u, v)$，$\overline{X}(\bar{u}, \bar{v})$ 分别是 p 和 $\phi(p)$ 点附近的参数表示．假定 ϕ 在上述坐标系下的表示为

$$\phi(u,v) = (\phi_1(u,v),\phi_2(u,v))$$

α 表示为

$$\alpha(t) = (u(t),v(t)),\quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

那么 $\beta(t)=(\phi_1(u(t), v(t)), \phi_2(u(t), v(t)))$，且 $\beta'(0)$ 在基 $\{\overline{X}_{\bar{u}}, \overline{X}_{\bar{v}}\}$ 下的表示是

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}u'(0)+\frac{\partial\phi_1}{\partial v}v'(0),\quad \frac{\partial\phi_2}{\partial u}u'(0)+\frac{\partial\phi_2}{\partial v}v'(0)\right)$$

上述关系式说明，$\beta'(0)$ 只依赖于映照 ϕ 及 W 在基 $\{X_u, X_v\}$ 下的坐标 $(u'(0), v'(0))$，所以 $\beta'(0)$ 与 α 的选取无关．而且，同一关系式还说明

$$\beta'(0) = d\varphi_p(w) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial\phi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'(0)\\[2ex] v'(0)\end{pmatrix}$$

即 $d\phi_p$ 是 $T_p(S_1)$ 到 $T_{\phi(p)}(S_2)$ 的线性映照，它在 $T_p(S_1)$ 的基 $\{X_u, X_v\}$ 及 $T_{\phi(p)}(S_2)$ 的基 $\{\overline{X}_{\bar{u}}, \overline{X}_{\bar{v}}\}$ 下的矩阵，恰为上述给定的矩阵．证毕．

命题 2　中定义的线性映照 $d\phi_p$ 称为 ϕ 在 $p\in S_1$ 点的微分，用类似的方法我们可把可微函数 f：$U\subset S\to\mathbb{R}$ 在 $p\in U$ 的微分定义为线性映照 df_p：$T_p(S)\to\mathbb{R}$．具体细节留给读者作练习．

例 1　设 $v\in\mathbb{R}^3$ 是单位向量，h：$S\to\mathbb{R}$，$h(p)=v\cdot p$，$p\in S$ 是 2.3 例 1 所定义的高度函数．对 $w\in T_p(S)$，为计算 $dh_p(w)$，取可微曲线 α：$(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$，$\alpha(0)=0$，$\alpha'(0)=w$．因 $h(\alpha(t))=\alpha(t)\cdot v$，我们有

$$dh_p(w) = \frac{d}{dt}h(\alpha(t))\,|_{t=0} = \alpha'(0)\cdot v = w\cdot v$$

例 2　设 $S^2\subset\mathbb{R}^2$ 是单位球面

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2+y^2+z^2=1\}$$

$R_{z,\theta}$：$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 是绕 z 轴旋转 θ 角．那么 $R_{z,\theta}$在 S^2 上的限制是 S^2 上的可微映照（见 2.3 的例 3)．我们将计算$(dR_{z,\theta})_p(w)$，$p\in S^2$，$w\in T_p(S^2)$．设 α：$(-\varepsilon, \varepsilon)\to S^2$ 是可微曲线，满足 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=w$．那么，因 $R_{z,\theta}$是线性的，

$$(dR_{z,\theta})_p(w) = \frac{d}{dt}(R_{z,\theta}\circ\alpha(t))\,|_{t=0} = R_{z,\theta}(\alpha'(0)) = R_{z,\theta}(w)$$

注意到 $R_{z,\theta}$保持北极 $N=(0, 0, 1)$不动，故$(dR_{z,\theta})_N$：$T_N(S)\to T_N(S)$恰恰是在 $T_N(S)$平面中旋转 θ 角．

回想一下，迄今我们所做的是将$\mathbb{R}^2$ 中微分学的概念推广到正则曲面．因为，微分学本质上是局部性理论，我们定义了一个其局部在微分同胚的范围是平面的实体（正则曲面)，因此这样的推广就变得很自然．也许还有希望将基本的反函数定理推广到曲面间的可微映照．

设 ϕ：$U\subset S_1\to S_2$ 是一个映照，如果对 $p\in U$，存在 p 点的一个邻域 $V\subset U$，使 ϕ 限制于 V 是到开集 $\phi(V)\subset S_2$ 上的微分同胚，那么称 ϕ 为在 p 点的*局部微分同胚*．用这样的术语，曲面上反函数定理的形式可表达如下．

命题 3 如果 S_1 和 S_2 是正则曲面，ϕ：$U\subset S_1\to S_2$ 是开集 $U\subset S_1$ 上的可微映照，使 ϕ 在 $p\in U$ 的微分 $d\phi_p$ 是一个同构，那么 ϕ 是 p 点的局部微分同胚．

它的证明是在$\mathbb{R}^2$ 中反函数定理的直接推广，将它留作习题．

当然，微积分中所有其他概念，象临界点，正则值等确实都能自然地推广到正则曲面上定义的函数和映照．

切平面还使我们能说两个相交曲面在其相交点的角度．

在正则曲面 S 上给定一点 p，有二个$\mathbb{R}^3$ 的单位向量，它们都正交于切平面 $T_p(S)$；其中每一个都称为 p 点的*单位法向量*．通过 p 点且包含 p 点法向的直线称为 p 点的*法线*．两张相交曲面在相交点 p 的*夹角*是它们在 p 点切平面的夹角（或它们法线的夹角）（图 2-25)．

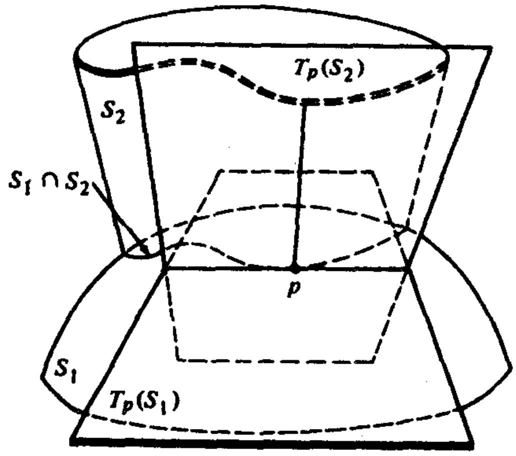


图 2-25

固定 $p\in S$ 附近的一个参数表示 X：$U\subset\mathbb{R}^2\to S$，对每点 $q\in X(U)$，我们能以下列方式确定一个单位向量

$$N(q) = \frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|}(q)$$

这样，我们得到一个可微映照 N：$X(U)\to\mathbb{R}^3$．我们以后将看到（2.6 和 3.1)，不是总能将这个映照可微地推广到整个曲面 S.

在结束本节之前，我们关于可微性问题做些说明．

正则曲面的定义要求 C^∞ 阶的参数表示，即它们具有所有阶的连续偏导数．对微分几何问题，一般地我们只需要某些阶的偏导数的存在性和连续性，具体的阶数因问题的性质而异（很少需要四阶以上的偏导数)．

如切平面的存在连续性，只依赖于一阶偏导数的存在和连续性. 所以，可能发生这种情况，一个函数的图点点有切平面但不是充分可微以适合正则曲面的定义. 下列例子便是这种情况.

例 3 考虑函数 $z=\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$ 的图，它是由曲线 $z=x^{\frac{4}{3}}$ 关于 z 轴旋转所生成的. 因曲线关于 z 轴对称且有连续导数，它在原点为 0，很清楚图 $z=\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$ 以 xy 平面为原点的切平面. 但是，偏导数 z_{xx} 在原点不存在，所考虑的图不是如前所定义的正则曲面(见 2.2 命题 3).

我们不打算讨论这类问题. 定义中 C^∞ 的假定正是用来避免研究在各特殊问题中所要求的最低可微性条件. 这些细小差异会有它们恰当的位置，但这里来处理可能会模糊问题的几何性质.

习题

*1. 设正则曲面由 $f(x, y, z)=0$ 给出，其中 0 是 f 的正则值. 证明它在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程是

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

2. 确定曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 在 $(x, y, 0)$ 点的切平面，且证明它们都平行于 z 轴.

3. 证明：一个可微函数 $z=f(x, y)$ 的图所确定的曲面在 $p_0=(x_0, y_0)$ 点的切平面方程为

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

回想一下函数 $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 微分 df 的定义，且证明切平面恰为微分 df_p 的图.

*4. 证明：由 $z=xf(y/x)$，$x\neq 0$ 所定义的曲面的切平面都过原点 $(0, 0, 0)$，其中 f 是可微函数.

5. 如果正则曲面的局部表示为

$$X(u,v)=\alpha_1(u)+\alpha_2(v)$$

其中 α_1 和 α_2 是正则参数曲线，证明：沿着这个坐标邻域中某固定坐标曲线的切平面都平行于一条直线.

6. 设 $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ 是正则参数曲线，曲率处处非零. 考虑 α 的切线面(2.3 例 5)

$$X(t,v)=\alpha(t)+v\alpha'(t),\quad t\in I,\quad v\neq 0$$

证明：沿曲线 $X(t$, 常数$)$ 的切平面都相同.

7. 设 $f: S\to\mathbb{R}$ 由 $f(p)=|p-p_0|^2$ 定义，$p\in S$ 且 p_0 是 $\mathbb{R}^3$ 的固定点(见 2.3 例 1). 证明 $df_p(W)=2W\cdot(p-p_0)$，$w\in T_p(S)$.

8. 如果 $L: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是线性映照，$S\subset\mathbb{R}^3$ 是正则曲面且在 L 下是不变的，即 $L(S)\subset S$. 证明：限制 $L|_S$ 是可微映照且

$$dL_p(w)=L(w),\quad p\in S,\quad w\in T_p(S)$$

9. 证明：参数曲面

$$X(u,v)=(v\cos u, v\sin u, au),\quad a\neq 0$$

是正则的. 计算它的法向量 $N(u, v)$ 且证明沿着坐标曲线 $u=u_0X$ 的切平面按下述方式围绕这

条线旋转，这个切平面与 z 轴夹角的正切正比于点 $X(u_0, v)$ 到 z 轴的距离 $v(=\sqrt{x^2+y^2})$.

10.（管状曲面）设 $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ 是具非零曲率的正则参数曲线，且以弧长为参数. 设

$$X(s,v) = \alpha(s) + r(n(s)\cos v + b(s)\sin v), \quad r = 常数 \neq 0, \quad s\in I$$

是参数曲面（围绕 α 的半径为 r 的管道），其中 n 和 b 是 α 的主法向量和从法向量. 证明：当 X 是正则曲面时，它的单位法向量是

$$N(s,v) = -(n(s)\cos v + b(s)\sin v)$$

11. 证明：由

$$X(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \quad f(u)\neq 0, \quad g'\neq 0$$

定义的参数曲面的法线都通过 z 轴

*12. 证明：下列任一方程

$$x^2+y^2+z^2 = ax$$
$$x^2+y^2+z^2 = by$$
$$x^2+y^2+z^2 = cz$$

定义一张正则曲面，且全都正交.

13. 定义在正则曲面 S 上的可微函数 $f: S\to\mathbb{R}$ 的临界点是满足 $df_p=0$ 的点 $p\in S$.

*a. 设 $f: S\to\mathbb{R}$ 由

$$f(p) = |p-p_0|, \quad p\in S, \quad p_0\notin S(见 2.3 习题 5)$$

定义. 证明：$p\in S$ 是临界点的充要条件是 p 到 p_0 的连线在 p 正交于 S.

b. 设 $h: S\to\mathbb{R}$ 由 $h(p)=p\cdot v$ 定义，其中 $v\in\mathbb{R}^3$ 是单位向量（见 2.3 例 1）. 证明：$p\in S$ 是 f 的临界点的充要条件为 v 是 S 在 p 点的法向量.

*14. 设 Q 是三个坐标平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 的并集. 设 $p=(x, y, z)\in\mathbb{R}^3-Q$.

a. 证明：关于 t 的方程

$$\frac{x^2}{a-t}+\frac{y^2}{b-t}+\frac{z^2}{c-t}\equiv f(t)=1$$
$$a>b>c>0$$

有三个不同的实根：t_1，t_2，t_3.

b. 证明：对任何 $p\in\mathbb{R}^3-Q$，由 $f(t_1)-1=0$，$f(t_2)-1=0$ 和 $f(t_3)-1=0$ 定义的集合都是通过 p 点的正则曲面，且两两正交.

15. 证明：如果连通曲面的所有法线都通过固定点，则曲面是球面的一部分.

16. 设 w 是正则曲面 S 在某点 $p\in S$ 的切向量，且设 $X(u, v)$ 和 $\overline{X}(\bar{u}, \bar{v})$ 是在 p 点邻近的两个参数表示. 假定 w 在与 $X(u, v)$ 及 $\overline{X}(\bar{u}, \bar{v})$ 相关的基下的表示为

$$w = \alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v$$

及

$$w=\beta_1\overline{X}_{\bar{u}}+\beta_2\overline{X}_{\bar{u}}$$

证明：w 的两种表示间有下列关系：

$$\beta_1 = \alpha_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}$$

$$\beta_2 = \alpha_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}$$

其中 $\bar{u}=\bar{u}(u, v)$ 和 $\bar{v}=\bar{v}(u, v)$ 为坐标变换的表示式.

*17. 两张正则曲面 S_1 和 S_2 称为横交的，如果对 $p\in S_1\cap S_2$，有 $T_p(S_1)\neq T_p(S_2)$. 证明：如果 S_1 横交于 S_2，那么 $S_1\cap S_2$ 是正则曲线.

18. 证明：如果正则曲面 S 与平面 p 只交于一点 p，那么这个平面就是 S 在 p 点的切平面.

19. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是正则曲面 $P\subset\mathbb{R}^3$ 是平面. 如果 S 的所有点在 P 的同侧，证明：P 在 $P\cap S$ 的所有点与 S 相切.

*20. 证明：椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的中心(0，0，0)到它切平面的正交投影组成一个正则曲面如下：

$$\{(x,y;z)\in\mathbb{R}^3;\quad (x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\}-\{(0,0,0)\}$$

*21. 设 f：$S\to\mathbb{R}$ 是连通正则曲面 S 上的可微函数. 假定对所有 $p\in S$ 有 $df_p=0$. 证明：f 在 S 上是常数.

*22. 证明：连通正则曲面 S 的所有法线交于一固定直线，那么 S 是旋转面.

23. 证明：在 2.3 的习题 16 中所定义的映照 F：$S^2\to S^2$ 只有有限多个临界点(见习题 13).

24.(链式法则)证明：如果 ϕ：$S_1\to S_2$ 和 ψ：$S_2\to S_3$ 是可微映照，且 $p\in S_1$，那么

$$d(\psi\circ\phi)_p = d\psi_{\phi(p)}\circ d\phi_p$$

25. 证明：如果正则曲面 S 上的两条正则曲线 C_1 和 C_2 在点 $p\in S$ 相切，ϕ：$S\to S$ 是微分同胚，那么 $\phi(C_1)$ 和 $\phi(C_2)$ 是正则曲线且在 $\phi(p)$ 相切.

26. 证明：如果 p 是正则曲面 S 上一点，总可适当选取坐标(x, y, z)使 S 在 p 点附近可表示为 $z=f(x, y)$ 并且 $f(0, 0)=0$，$f_x(0, 0)=0$，$f_y(0, 0)=0$.（这等价于取 S 在 p 点的切平面为 xy 平面.）

27.(接触理论)在$\mathbb{R}^3$ 中的二张曲面 S 和 $\bar{S}$，它们有公共点 p. 如果在 p 点附近 S 和 $\bar{S}$ 存在具相同定义域的坐标映照 $x(u, v)$ 及 $\bar{x}(u, v)$，使在 p 点有 $x_u=\bar{x}_u$，$x_v=\bar{x}_v$，那么称 S 和 $\bar{S}$ 在 p 点有$\geqslant 1$ 阶接触. 进一步，如果在 p 点有某些二阶偏导数相异，那么接触阶恰恰等于 1. 证明：

a. 正则曲面 S 在 p 点的切平面 $T_p(S)$ 和该曲面在 p 点有$\geqslant 1$ 阶接触.

b. 如果平面和曲面 S 在 p 点有$\geqslant 1$ 阶接触，那么这张平面就是 S 在 p 点的切平面.

c. 两张正则曲面有$\geqslant 1$ 阶接触的充要条件为在 p 点有公共切平面，即它们在 p 点相切.

d. 如果$\mathbb{R}^3$ 的两张正则曲面在 p 点有$\geqslant 1$ 阶接触，又 F：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是$\mathbb{R}^3$ 的微分同胚，那么 $F(S)$ 和 $F(\bar{S})$ 也是正则曲面，且在 $f(p)$ 有$\geqslant 1$ 阶接触(即$\geqslant 1$ 阶接触概念在微分同胚下是不变的).

e. 如果两张曲面在 p 点有$\geqslant 1$ 阶接触，那么 $\lim_{r\to 0}\left(\frac{d}{r}\right)=0$，其中 d 是离公共法线 r 处平行于

该法线的直线被两曲面截得线段的长度.

28. a 定义正则曲面上可微函数 $f: S\to\mathbb{R}$ 的正则值.

b. 证明：正则曲面上可微函数正则值的原象是 S 上的正则曲线.

2.5 第一基本形式；面积

迄今我们已经从可微性的观点看待曲面. 本节中我们将开始研究曲面上进一步的几何结构. 其中最重要的也许是我们现在来描述的第一基本形式.

$\mathbb{R}^3\subset S$ 中的自然内积在正则曲面 S 的第一切平面 $T_p(S)$上诱导了一种内积，记为$\langle,\rangle_p$：如果 W_1，$W_2\in T_p(S)\subset\mathbb{R}^3$，那么$\langle W_1, W_2\rangle_p$ 等于 W_1 和 W_2 看作为$\mathbb{R}^3$ 中向量时的内积. 对这个对称双线性型的内积(即$\langle W_1, W_2\rangle=\langle W_2, W_1\rangle$且$\langle W_1, W_2\rangle$关于 W_1 和 W_2 都是线性的)，对应有一个二次型 I_p：$T_p(S)\to\mathbb{R}$，它的定义如下：

$$I_p(W)=\langle W,W\rangle_p =|W|^2\geqslant 0 \tag{1}$$

定义 1 在 $T_p(S)$上由方程(1)所定义的二次型 I_p，称为正则曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 在 $p\in S$ 的第一基本形式.

所以，第一基本形式只是曲面 S 如何继承$\mathbb{R}^3$ 的自然内积的表达式. 几何上看，正像我们过一会将看到的，第一基本形式使我们能测量曲面上的一些量(曲线的长度，切向量的夹角，区域的面积)而不必回到曲面所在的外围空间$\mathbb{R}^3$.

现在，我们在相关于 p 点附近参数表示 $X(u, v)$的基$\{X_u, X_v\}$下，来表示第一基本形式. 因为切向量 $W\in T_p(S)$是参数曲线 $\alpha(t)=X(u(t), v(t))$的切向量，$t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$，$p=\alpha(0)=x(u_0, v_0)$，我们有

$$\begin{aligned}T_p(\alpha'(0)) &=\langle\alpha'(0),\alpha(0)\rangle_p\\ &=\langle X_uu'+X_vv',X_uu'+X_vv'\rangle_p\\ &=(X_u,X_u)_p(u')^2+2\langle X_u,X_v\rangle_pu'v'+\langle X_v,X_v\rangle_p(v')^2\\ &=E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2\end{aligned}$$

其中所涉及到的函数都在 $t=0$ 取值，且

$$\begin{aligned}E(u_0,v_0)&=\langle X_u,X_u\rangle_p\\ F(u_0,v_0)&=\langle X_u,X_v\rangle_p\\ G(u_0,v_0)&=\langle X_v,X_v\rangle_p\end{aligned}$$

是第一基本形式在 $T_p(S)$的基$\{X_u, X_v\}$下的系数. 让 p 在对应于 $X(u, v)$的坐标邻域中变化，我们得到函数 $E(u, v)$，$F(u, v)$，$G(u, v)$，它们在该邻域中是可微的.

从现在起，当从我们所涉及的那一点的上下文看是显然的时候，在内积$\langle,\rangle_p$ 上和二次型 I_p 中将省略下标 p. 为了方便，用同样的记号$\langle,\rangle$表示$\mathbb{R}^3$ 中自然内积，代替以前的点积记号.

例 1 过 $p_0=(x_0, y_0, z_0)$且包含标准正交向量 $W_1=(a_1, a_2, a_3)$，$W_2=(b_1, b_2, b_3)$的平面 $P\subset\mathbb{R}^3$ 的坐标系如下：

$$X(u,v)=p_0+uW_1+vW_2,\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

为计算任一点 p 的第一基本形式，我们有 $X_u=W_1$，$X_v=W_2$；因 W_1 和 W_2 是单位正交向量，函数 E，F，G 是常数并且

$$E=1,\quad F=0,\quad G=1$$

在这平凡的情形，第一基本形式事实上是平面 P 中的勾股定理，即在基$\{X_u, X_v\}$下坐标为 a，b 的向量 W 的长度平方等于 a^2+b^2.

例 2 圆周 $x^2+y^2=1$ 上的正圆柱面有参数表示 x：$U\to\mathbb{R}^2$，其中(见图 2-26)

$$X(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$$
$$U=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\quad 0<u<2\pi,\quad -\infty<v<\infty\}$$

为计算第一基本形式，我们注意到

$$X_u=(-\sin u,\cos u,0),\quad X_v=(0,0,1)$$
$$E=\sin^2 u+\cos^2 u=1,\quad F=0,\quad G=1$$

要指出的是，虽然柱面和平面是不同的曲面，在前二个例子中得到相同的结果. 以后将回到这个课题(见 4.2).

例 3 考虑方程为$(\cos u, \sin u, au)$的螺旋线(见 1.2 例 1). 过螺旋线的每点，引直线平行于 xy 平面交于 z 轴. 由这些直线生成的曲面称为*正螺面*，它有下列的参数表示：

$$X(u,v)=(v\cos u,v\sin u,au)$$
$$0<u<2\pi,\quad -\infty<v<\infty$$

X 将 uv 平面中宽 2π 的开带形，映照到正螺面上对应于沿螺旋线旋转 2π 的部分(图 2-27). 验证正螺面是正则曲面是直接的，留作读者练习.

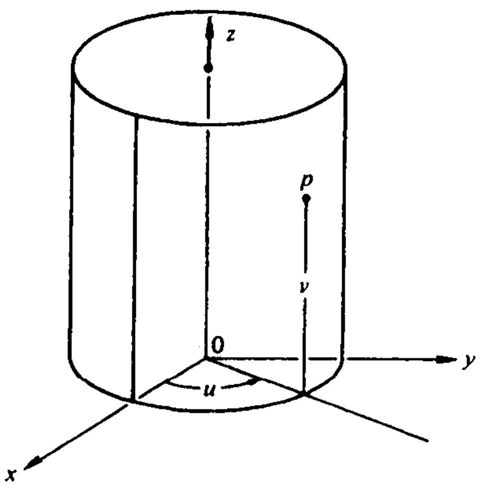


图 2-26

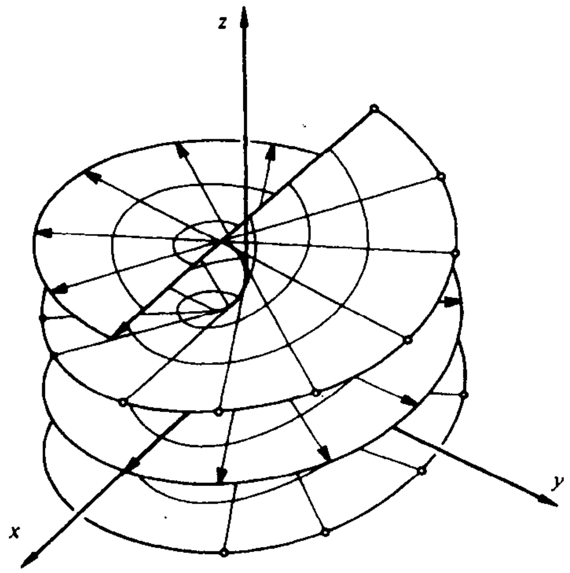


图 2-27

在上述参数表示下第一基本形式系数的计算给出

$$E(u,v)=v^2+a^2,\quad F(u,v)=0,\quad G(u,v)=1$$

正像我们前面提及的，第一基本形式 I 的重要性在于知道了 I 我们就能处理正则曲面上的

度量问题，而不必关心它的外围空间$\mathbb{R}^3$．这样，参数曲线α：$I\to S$的弧长s是

$$s(t)=\int_0^t|\alpha'(t)|dt=\int_0^t\sqrt{I(\alpha'(t))}dt$$

特别地，如果$\alpha(t)=X(u(t), v(t))$落在对应于参数表示$X(u, v)$的同一坐标邻域中，我们能计算α在0到t间的弧长：

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}dt \tag{2}$$

而且，在$t=t_0$相交的两条参数曲线α：$I\to S$，β：$I\to S$的夹角θ由下式得到

$$\cos\theta=\frac{\langle\alpha'(t_0),\beta'(t_0)\rangle}{|\alpha'(t_0)||\beta'(t_0)|}$$

特别地，参数表示$X(u, v)$的坐标曲线的夹角ϕ是

$$\cos\phi=\frac{\langle x_u,x_v\rangle}{|x_u||x_v|}=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

由此得到：参数表示的坐标曲线正交的充要条件是，对所有(u, v)有$F(u, v)=0$．这种参数表示称为正交参数表示.

注 由于方程(2)，许多数学家所谓的s的弧长“元素”ds，记为

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

它的意义是如果$\alpha(t)=(u(t), v(t))$是s上的曲线且$s=s(t)$是它的弧长，那么

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

例 4 球面有参数表示(见2.2例1).

$$X(\theta,\phi)=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$$

我们来计算它在这坐标邻域中某点的第一基本形式．首先，观察到

$$X_\theta(\theta,\phi)=(\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta)$$
$$X_\phi(\theta,\phi)=(-\sin\theta\sin\phi,\sin\theta\cos\phi,0)$$

所以

$$E(\theta,\phi)=\langle X_\theta,X_\theta\rangle=1$$
$$F(\theta,\phi)=\langle X_\theta,X_\phi\rangle=0$$
$$G(\theta,\phi)=\langle X_\phi,X_\phi\rangle=\sin^2\theta$$

这样，如果W是球面在某点$X(\theta, \phi)$的切向量，它在相关于参数表示$X(\theta, \phi)$的基下可表示为

$$W=aX_\theta+bX_\phi$$

那么W的长度平方是

$$|W|^2=I(W)=Ea^2+2Fab+Gb^2=a^2+b^2\sin^2\theta$$

作为应用，我们来决定球面上的曲线，它与上述局部坐标系中的经线$\phi=$常数交固定角β. 这种曲线叫做球面的斜驶线(恒向线).

我们可以假定要求的曲线$\alpha(t)$是$\theta\phi$平面中曲线($\theta_1(t)$，$\phi(t)$在坐标映照X下的像．在曲线和经线$\phi=$常数相交的点$x(\theta, \phi)$，我们有

$$\cos\beta = \frac{\langle X_\theta, \alpha'(t)\rangle}{|X_\theta||\alpha'(t)|} = \frac{\theta'}{\sqrt{(\theta')^2 + (\phi')^2\sin^2\theta}}$$

因为在基$\{x_\theta, x_\phi\}$下向量$\alpha'(t)$有坐标(θ', ϕ')，向量X_θ有坐标(1，0)．由此可得

$$(\theta')^2\tan^2\beta - (\theta')^2\sin^2\theta = 0$$

或

$$\frac{\theta'}{\sin\theta} = \pm\frac{\phi'}{\tan\beta}$$

由此积分，我们得到斜驶线方程

$$\log\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm(\phi + c)\cot\beta$$

其中积分常数C得由曲线通过的点$X(\theta_0, \phi_0)$所决定．

另一个能用第一基本形式处理的度量问题，是计算(或定义)正则曲面上有界区域的面积．曲面S的一个开的连通子集如果它的边界是圆周在可微同胚下的像，且这个同胚除了有限个点外还是正则的(即它的微分非零)，那么这个子集称为曲面S的一个(正则)域．曲面上的区域是域和它的边界之和(图2-28)．S的一个区域，如果它包含在$\mathbb{R}^3$的某个球体内则称为有界的．

我们来考虑包含在参数表示$X: U\subset\mathbb{R}^2\to S$的坐标邻域$X(U)$中的有界区域$R$．换言之，$R$是有界区域$Q\subset U$在$X$下的像．

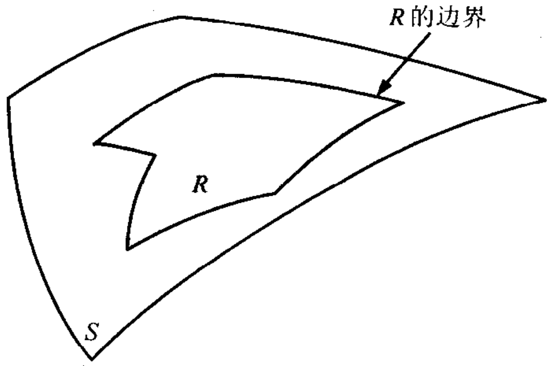


图 2-28

定义在U中的函数$|X_u\wedge X_v|$度量了由向量X_u和X_v组成的平行四边形的面积．我们首先说明积分

$$\int_Q |X_u \wedge X_v| \, dudv$$

不依赖于参数表示X．

事实上，设$\overline{X}: \overline{U}\subset\mathbb{R}^2\to S$是另一个参数表示，满足$R\subset\overline{X}(\overline{U})$，置$\overline{Q}=\overline{X}^{-1}(R)$．设$\partial(u,v)/\partial(\bar{u},\bar{v})$是参数变换$h=X^{-1}\circ\overline{X}$的Jacobi行列式．那么

$$\iint_{\overline{Q}} |\overline{X}_{\bar{u}} \wedge \overline{X}_{\bar{v}}| \, d\bar{u}d\bar{v} = \iint_{\overline{Q}} |X_u \wedge X_v| \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}\right| d\bar{u}d\bar{v}$$

$$= \iint_{Q} |X_u \wedge X_v| \, dudv$$

其中，最后一个等式是根据多重积分的变量变换定理(见 Buck，Advanced Caloulus，p. 304)，因此就证明了不依赖于参数选取的断言，从而我们有下列定义．

定义 2 设正则曲面S中的有界区域$R\subset S$落在参数表示$X: U\subset\mathbb{R}^2\to S$的坐标邻域中，正数

$$\iint_Q |X_u \wedge X_v| \, dudv = A(R), \quad Q = X^{-1}(R)$$

称为R的面积．

对这样一种定义的几何合理性，有好几种说法，其中之一将在2.8中给出．

容易看出

$$|X_u \wedge X_v|^2 + \langle X_u, \quad X_v\rangle^2 = |X_u|^2 \cdot |X_v|^2$$

这说明 $A(R)$的被积函数能写成

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

我们还要指出，在大多数例子中，区域 R 包含在同一坐标邻域中的限制并不很强，因为在整个曲面上除去某些曲线外存在一些覆盖曲面的坐标邻域，而曲线对面积又无影响.

例 5 我们来计算 2.2 例 6 中环面的面积. 为此我们考虑对应于参数表示

$$X(u,v) = ((a + r\cos u))\cos v, \quad (a + r\cos u)\sin v, \quad r\sin u)$$

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi$$

的坐标邻域，除了一条经线和一条纬线它覆盖整个环面. 第一基本形式的系数是

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (r\cos u + a)^2$$

所以

$$\sqrt{EG - F^2} = r(r\cos u + a)$$

现在，考虑区域 R_ε、它是区域 Q_ε(图 2-29)在 X 下的像，而(ε 是小的正数)

$$Q_\varepsilon = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; 0 + \varepsilon \leqslant u \leqslant 2\pi - \varepsilon, \quad 0 + \varepsilon \leqslant v \leqslant 2\pi - \varepsilon\}$$

利用定义 2，我们得到

$$\begin{aligned} A(R_\varepsilon) &= \iint_{Q_\varepsilon} r(r\cos u + a)\,du\,dv \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (r^2\cos u + ra)\,du \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} dv \\ &= r^2(2\pi - 2\varepsilon)(\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin\varepsilon) + ra(2\pi - 2\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

上式中令 $\varepsilon \to 0$，我们得到

$$A(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} A(R_\varepsilon) = 4\pi^2 ra$$

这和按初等方法，如利用关于旋转面面积的 Pappus 定理计算的结果是一样的(见习题 11).

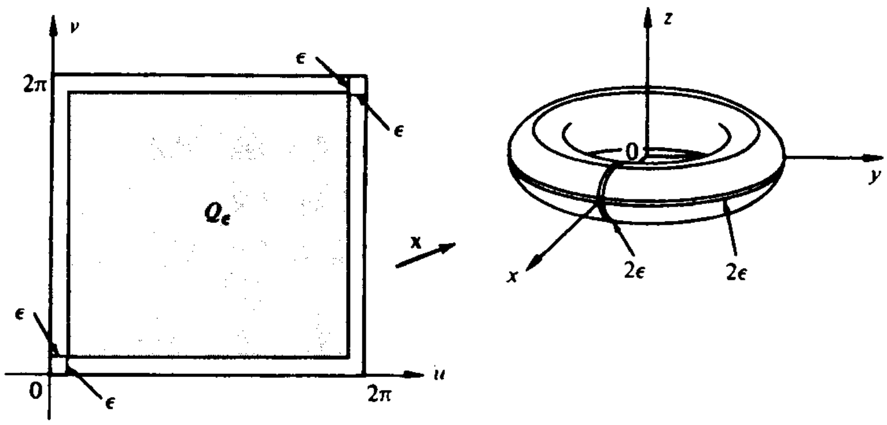


图 2-29

习题

1. 计算下列参数曲面在其正则处的第一基本形式

a. $X(u, v)=(a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos u)$，椭球面.

b. $X(u, v)=(au\cos v, bu\sin v, u^2)$，椭圆抛物面.

c. $X(u, v)=(au\cosh v, bu\sinh v, u^2)$，双曲抛物面.

d. $X(u, v)=(a\sinh u\cos u, b\sinh u\sin u, c\cosh u)$；双叶双曲面.

2. 设 $X(u, v)=(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$是单位球面 S^2 的局部坐标映照. 设 P 是平面 $x=z\cot\alpha$，$0<\alpha<\pi$，而 β 是曲线 $P\cap S^2$ 与半径线 $\phi=\phi_0$ 所夹的锐角，计算 $\cos\beta$.

3. 计算在球极投影的参数表示下球面的第一基本形式(参见 2.2 习题 16).

4. 给定参数曲面

$$X(u,v)=(u\cos v, u\sin v, \log\cos v+u),\quad -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$$

证明：二条曲线 $x(u_1, v)$，$x(u_2, v)$在所有曲线 $x(u$，常数)上确定了长度相等的线段.

5. 证明：在曲面 $z=f(x, y)$的有界区域 R 的面积 A 是

$$A=\iint_Q\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

其中 Q 是 R 在 xy 平面上的垂直投影.

6. 证明

$$X(u,v)=(u\sin\alpha\cos v, u\sin\alpha\sin v, u\cos\alpha)$$
$$0<u<\infty,\quad 0<v<2\pi,\quad \alpha=\text{常数}$$

是顶角为 2α 的锥面的参数表示，且在对应的坐标邻域中，证明曲线

$$X(c\exp(v\sin\alpha\cot\beta), v),\quad C=\text{常数},\quad \beta=\text{常数}$$

和锥面的母线($v=$常数)交常角 β.

7. 曲面在参数表示 $x(u, v)$下的坐标曲线所组成的任意四边形如果对边相等，则称为 Techebyshef 网. 说明：Techebyshef 网的充要条件是

$$\frac{\partial E}{\partial v}=\frac{\partial G}{\partial u}=0$$

*8. 证明：只要坐标曲线构成 Techebyshef 网(见上题)，就能对坐标邻域选取新的参数表示，使对应的第一基本形式的系数是

$$E=1,\quad F=\cos\theta,\quad G=1$$

其中 θ 是坐标曲线的夹角.

*9. 证明：旋转面上总能取到参数表示使

$$E=E(v),\quad F=0,\quad G=1$$

10. 设 $P=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3; z=0\}$是 xy 平面且设 $x: U\to P$ 是 P 的参数表示

$$X(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

其中

$$U=\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2;\quad \rho>0,\quad 0<\theta<2\pi\}$$

计算在这种参数表示下 P 的第一基本形式的系数.

11. 设 S 是旋转面，C 是它的母线(见 2.3 例 4). 设 s 是 C 的弧长，$\rho(s)$ 为 C 上对应 S 的点到旋转轴的距离.

a. (Pappus 定理)证明：S 的面积是

$$2\pi\int_0^l \rho(s)\,ds$$

其中 l 是 C 的长度.

b. 应用 a 的结果计算旋转环面的面积.

12. 证明：曲线 α 的半径为 r 的正则管道(参见 2.4 习题 10)的面积是 $2\pi r$ 倍 α 的长度.

13. (螺旋面)既作为旋转面又作为螺旋面自然推广的广义螺旋面可如下得出. 设 C 是正则平面曲线，它与该平面中的轴 E 不相交. C 绕 E 作螺旋运动，即 C 的每一点在运动下形成以 E 为轴的螺旋线(或圆周)，那么由此形成的集合 S 称为以 E 为轴以 C 为母线的螺旋面. 如果螺旋运动纯粹是围绕 E 的旋转，S 是旋转面；如果 C 是正交于 E 的直线，S 是正螺面(一部分)(见例 3).

设 z 为旋转轴，C 在 yz 平面中，证明：

a. 如果 $(f(s),\ g(s))$ 为 C 以弧长为参数的参数表示，$a<s<b$，$f(s)>0$，那么 $X:\ U\to S$ 是 S 的参数表示，其中

$$U=\{(s,u)\in\mathbb{R}^2;\quad a<s<b,\quad 0<u<2\pi\}$$

$$X(s,u)=(f(s)\cos u,\quad f(s)\sin u,\quad g(s)+cu),\ c=\text{常数}$$

证明：S 是正则曲面.

b. 上述参数表示的坐标曲线是正交的(即 $F=0$)充要条件是 $X(V)$ 或者是旋转面或者是正螺面(一部分).

14. (曲面上的梯度)可微函数 $f:\ S\to\mathbb{R}$ 的梯度是一个可微映照 $\mathrm{grad}f:\ S\to\mathbb{R}^3$，它将每一点 $p\in S$ 对应一个向量 $\mathrm{grad}f(p)\in T_p(S)\subset\mathbb{R}^3$，使对所有 $v\in T_p(S)$，

$$\langle \mathrm{grad}f(p),v\rangle_p=df_p(v)$$

证明：

a. 如果 E，F，G 是某参数表示 $X:\ U\subset\mathbb{R}^2\to S$ 下的第一基本形式的系数，那么在 $X(U)$ 中 $\mathrm{grad}f$ 是

$$\mathrm{grad}f=\frac{f_uG-f_vF}{EG-F^2}X_u+\frac{f_vE-f_uF}{EG-F^2}X_v$$

特别地，如果 $S=\mathbb{R}^2$ 用通常的 x，y 坐标

$$\mathrm{grad}f=f_xe_1+f_ye_2$$

其中 $\{e_1,\ e_2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的规范基(因此，它和平面中通常的梯度定义是一致的).

b. 如果设 $p\in S$ 为固定一点而 v 在 $T_p(S)$ 中的单位圆周 $|v|=1$ 上变化，那么 $df_p(v)$ 是最大的充要条件是 $v=\mathrm{grad}f/|\mathrm{grad}f|$ (这样，$\mathrm{grad}f$ 给出了 f 在 p 点的最大变化方向).

c. 如果在等值线 $C=\{q\in S;\ f(q)=\text{常数}\}$ 上的所有点 $\mathrm{grad}f\neq 0$，那么 C 是 S 上的正则曲

线且 grad$f$ 是 C 在所有点的法向.

15.(正交曲线族)

a. 设 E、F、G 是正则曲面 S 上某参数表示 $X: U\subset\mathbb{R}^2\to S$ 下的第一基本形式的系数. 设 $\phi(u, v)=$常数和 $\psi(u, v)=$常数是 $X(U)\subset S$ 上的二族正则曲线(见 2.4 习题 28)证明：这两族曲线正交(即不同族的曲线只要相交，它们的切线就正交)的充要条件是

$$E\phi_v\psi_v - F(\phi_u\psi_v + \phi_v\psi_u) + G\phi_u\psi_u = 0$$

b. 利用上结果证明例 3 中正螺面坐标邻域 $X(v)$ 中的两族曲线

$$v\cos u = \text{常数}, \quad v\neq 0$$

$$(v^2+a^2)\sin^2 u = \text{常数}, \quad v\neq 0, \quad u\neq\pi$$

是正交的.

2.6 曲面的定向[⊖]

本节中我们将讨论在何种意义下和什么情况下曲面可定向. 直观上，正则曲面 S 的每一点 p 有一张切平面 $T_p(S)$，它的一个定向的选取诱导了 P 点邻域中的一个定向，即沿着这邻域中每一点的充分小闭曲线正向运动的概念(图 2-30)，如对每点 $p\in S$ 能做这种选取，使在任何两个相交邻域的交集中所取的定向是一致的，那么 S 称为可定向的. 如果不能做到这样，S 就叫做不可定向的.

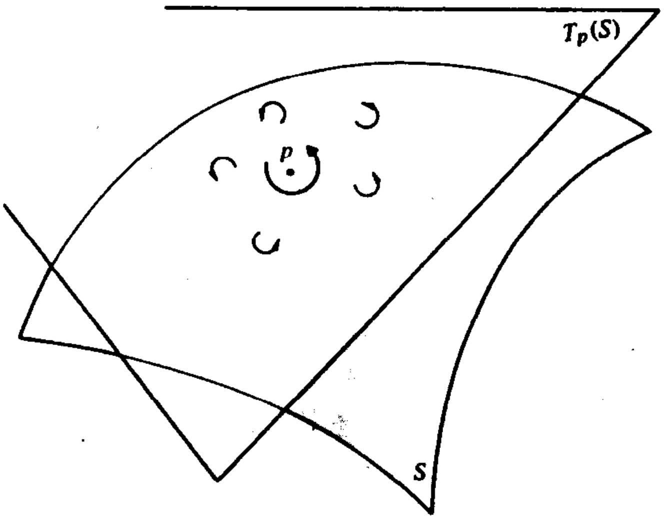


图 2-30

现在我们将这个想法精确化. 对正则曲面 S 上一点 p 的某邻域固定一个参数表示 $X(u, v)$，我们就确定了切平面 $T_p(S)$ 的一个定向，即相关于有序基 $\{X_u, X_v\}$ 的定向. 如果 p 属于另一个参数表示 $\overline{X}(\bar{u}, \bar{v})$ 的坐标邻域，新的基 $\{\overline{X}_{\bar{u}}, \overline{X}_{\bar{v}}\}$ 可用老的基表示为

$$\overline{X}_{\bar{u}} = X_u\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \quad X_{\bar{v}} = X_u\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}$$

⊖ 在初次阅读时本节可略去.

其中 $u=u(\bar{u}, \bar{v})$，$v=v(\bar{u}, \bar{v})$是坐标变换的表示式. 所以基$\{X_u, X_v\}$，和$\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$定义 $T_p(S)$相同定向的充要条件是坐标变换的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$$

是正的.

定义 1 如果正则曲面 S 能被一族坐标邻域所覆盖，使得若 $p\in S$ 属于族中二个邻域，那么坐标变换 Jacobi 行列式在 p 点是正的，则 S 称作是可定向的. 这样一族坐标邻域的选取称为 S 的一个定向，在这种意义下称 S 为定向曲面. 如果这样的选择不可能，曲面称为是不可定向的.

例 1 由可微函数的图所定义的曲面(见 2.2 命题 1)是一个可定向曲面. 事实上，能被一个坐标邻域所覆盖的所有曲面是平凡可定向的.

例 2 球面是一个可定向曲面. 我们不用直接计算，而采取一般地讨论. 球面能被坐标分别为(u, v)和$(\bar{u}, \bar{v})$的二个坐标邻域所覆盖(利用球极投影，见 2.2 习题 16)使得这二个坐标邻域的交集 W 是连通集(球面减去二点). 对 W 的任一点 p，如果在 p 点坐标变换的 Jacobi 行列式是负的，我们在第一个坐标系中交换 u 和 v，那么 Jacobi 行列式变成正的. 因在 W 中 Jacobi 行列式不为 0，且在 p 点为正，从 W 的连通性得到 Jacobi 行列式处处为正，所以，存在一族满足定义 1 的坐标邻域，从而球面是可定向的.

根据前面的讨论易知. 能被二个坐标邻域覆盖且它们的交集连通的正则曲面是可定向的.

在给出不可定向曲面例子之前，我们来给出$\mathbb{R}^3$ 中正则曲面定向性概念的几何解释.

在 2.4 中我们已经看到，在 p 点给出一个坐标系 $X(u, v)$，按下列规则

$$N=\frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|}(p) \tag{1}$$

我们确定了 p 点单位法向量 N. 取了 p 点的另一个局部坐标系 $X(\bar{u}, \bar{v})$，我们看到

$$\bar{X}_{\bar{u}}\wedge\bar{X}_{\bar{v}}=(X_u\wedge X_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \tag{2}$$

其中 $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$是坐标变换的 Jacobi 行列式. 所以，$N$ 是保持它的符号还是改变它的符号，这分别取决于 $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$是正还是负.

所谓开集 $U\subset S$ 上的可微单位法向量场，是指可微映照 N：$U\to\mathbb{R}^3$，它将每点 $q\in U$ 对应于 S 在 q 点的单位法向量 $N(q)\in\mathbb{R}^3$.

命题 1 正则曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为可定向的充要条件是在 S 上存在可微单位法向量场 N：$S\to\mathbb{R}^3$.

证明 如果 S 是可定向的，就能以一族坐标邻域覆盖它，使族中任意两个坐标邻域交集中坐标变换的 Jacobi 行列式是正的. 在每个邻域中的点 $p=X(u, v)$处，用(1)定义 $N(p)=N(u, v)$. 当p 属于坐标分别为(u, v)，$(\bar{u}, \bar{v})$的二个坐标邻域时，根据方程(2)法向量 $N(u, v)$和 $N(\bar{u}, \bar{v})$是一致的，所以 $N(p)$是有意义的. 而且，根据方程(1)，$\mathbb{R}^3$ 中 $N(u, v)$的坐标是(u, v)的可微函数，这样，映照 N：$S\to\mathbb{R}^3$ 是可微的，这正是所要求的.

另一方面，设 N：$S\to\mathbb{R}^3$ 是可微单位法向量场，考虑一族覆盖 S 的连通坐标邻域. 对每个

坐标邻域 $X(U)$，$U\subset R^2$ 的点 $p=X(u,v)$，根据 N 的连续性，可能做到(如果必要交换 u 和 v)

$$N(p)=\frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|}$$

事实上，内积

$$\left\langle N(p),\frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|}\right\rangle=f(p)=\pm 1$$

是 $x(U)$ 上的连续函数．因 $x(U)$ 是连通的，f 的符号是常数．如果 $f=-1$，在参数表示中交换 u，v 的次序，因此证实了前面的断言．

以这种方式来处置所有的坐标邻域，在任意二个相交邻域，如 $X(u,v)$ 和 $\overline{X}(\bar{u},\bar{v})$ 的交集中，Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$$

当然是正的；否则，就会有

$$\frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|}=N(p)=-\frac{\overline{X}_{\bar{u}}\wedge\overline{X}_{\bar{v}}}{|\overline{X}_{\bar{u}}\wedge\overline{X}_{\bar{v}}|}=-N(p)$$

这是矛盾的．因此给定的坐标邻域族，在 u，v 次序适当交换后满足定义 1 的条件，所以 S 是可定向的．证毕．

注 如证明所示，为了 S 是可定向的，我们只要求 S 上连续单位向量场的存在性．这种向量场就自然是可微的．

例 3 我们现在来描述不可定向曲面的例子，即所谓的 Möbius 带．它可用如下的方式得到：考虑方程 $x^2+y^2=4$ 的圆周 S^1 和在 yz 平面上 $y=2$，$|z|<1$ 的开线段 AB(图 2-31)，将 AB 中点 C 沿 S^1 移动，同时 AB 围着 C 在 Cz 平面中转动，当 C 沿圆周转过角度 u 时，AB 围绕 C 转了 $\frac{u}{2}$ 角度．当 C 围绕圆周移动一周时，AB 转到原来位置，但端点相反．从可微性观点看，这像将矩形的(垂直)对边重合起来，使 AB 边上每一点重合于它的对称点(图 2-31)，从而给出矩形的一个扭曲．

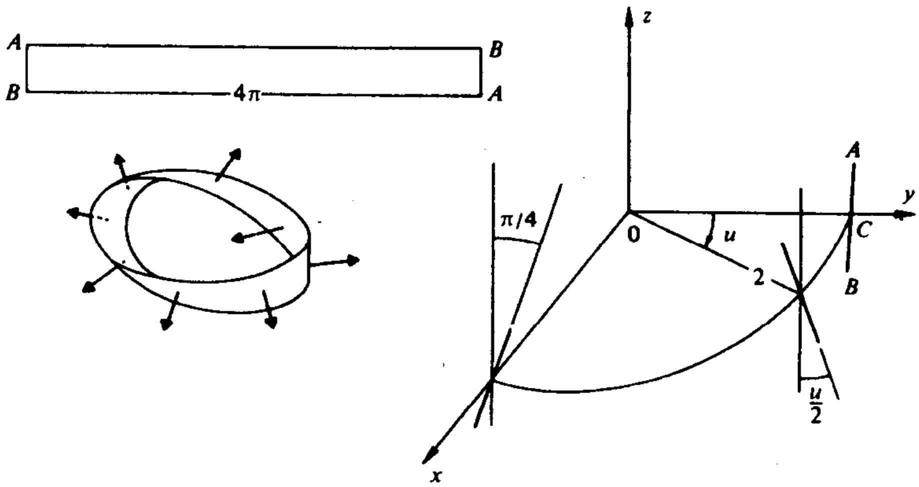


图 2-31

几何上，显然 Möbius 带 M 是正则不可定向曲面．事实上，如果 M 是可定向的，那么存在一个可微单位法向量场 N：$M\to\mathbb{R}^3$．沿圆周 $x^2+y^2=4$ 取这些向量，我们看到 N 环绕一周回到原处时变为 $-N$，这是矛盾的．

现在，我们给上述事实一个解析的证明．

Möbius 带的一个坐标系 X：$U\to M$ 为

$$X(u,v)=\left(\left(2-v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u,\quad\left(2-v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u,\quad v\cos\frac{u}{2}\right)$$

其中 $0<u<2\pi$，$-1<v<1$．对应的坐标邻域少掉了开区间 $u=0$ 的点．然后把 u 的原点取在 x 轴上，我们得到另一个参数表示 $\overline{X}(\bar{u},\bar{v})$ 如下：

$$x=\left\{2-\bar{v}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\bar{u}}{2}\right)\right\}\cos\bar{u}$$

$$y=-\left\{2-\bar{v}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\bar{u}}{2}\right)\right\}\sin\bar{u}$$

$$z=\bar{v}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\bar{u}}{2}\right)$$

它的坐标邻域是去掉区间 $u=\frac{\pi}{2}$．这二个坐标邻域覆盖了 Möbius 带，从而可用来说明 Möbius 带是正则曲面．

我们看到该两坐标邻域的交不是连通的，但由两个连通分支

$$W_1=\left\{x(u,v):\frac{\pi}{2}<u<2\pi\right\}$$

$$W_2=\left\{x(u,v):0<u<\frac{\pi}{2}\right\}$$

所组成．

坐标变换是

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=u-\frac{\pi}{2}\\ \bar{v}&=v\end{aligned}\right\}\text{在 } W_1 \text{ 中}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=\frac{3\pi}{2}+u\\ \bar{v}&=-v\end{aligned}\right\}\text{在 } W_2 \text{ 中}$$

由此可得

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}=1>0,\text{在 } W_1 \text{ 中}$$

和

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}=-1<0,\ \text{在 } W_2 \text{ 中}$$

为说明 Möbius 带是不可定向的，我们假定有一个可微单位法向量场 N：$M\to\mathbb{R}^3$．对 $X(u,v)$ 坐标邻域中的任何点 p 我们总可假定

$$N(p)=\frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|}$$

如有必要可交换 u，v 次序，类似地，在 $\bar{x}(\bar{u},\bar{v})$坐标邻域所有点可假定

$$N(p)=\frac{\bar{X}_{\bar{u}}\wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{|\bar{X}_{\bar{u}}\wedge \bar{X}_{\bar{v}}|}$$

但是在 W_1 或 W_2 中，坐标变换的 Jacobi 行列式必须是-1(这依赖于须作 $u\to v$，$\bar{u}\to\bar{v}$ 这类变换的哪个)，如果 p 是交集这个分支中的一点，那么 $N(p)=-N(p)$，这是矛盾的.

我们已经看到，由一个可微函数的图所定义的曲面是可定向的. 现在我们还会看到，由一个可微函数正则值的原象定义的曲面也是可定向的. 这就是难以构造$\mathbb{R}^3$ 中不可定向正则曲面的原因之一.

命题 2 如果正则曲面的定义为 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=a\}$，其中 f: $U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是可微的，a 是 f 的正则值，那么 S 是可定向的.

证明 给定一点$(x_0,y_0,z_0)=p\in S$，考虑 S 上 $t=t_0$ 时通过 p 点的参数曲线$(x(t),y(t),z(t))$，$t\in I$ 因曲线在 S 上，对所有 $t\in I$ 我们有

$$f(x(t),y(t),z(t))=a$$

关于 t 微分上式两边，我们看到在 $t=t_0$ 处有

$$f_x(p)\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}+f_y(p)\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}+f_z(p)\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0}=0$$

这说明曲线在 $t=t_0$ 处切向量正交于在 p 点的向量(f_x,f_y,f_z). 因曲线和点是任意的，因此

$$N(x,y,z)=\left(\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}},\quad \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}},\quad \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}\right)$$

是 S 上可微单位法向量场. 利用命题 1，这意味着 S 是可定向的. 证毕.

最后的附注，定向性绝不是正则曲面的局部性质. 局部地，每个正则曲面微分同胚于平面中的开集，所以是可定向的. 定向性是整体的性质，它涉及到整个曲面. 在本书后面(第 5 章)将讨论更多的整体性质.

习题

1. 设 S 是被二个坐标邻域 V_1 和 V_2 覆盖的正则曲面. 假定 $V_1\cap V_2$ 有两个连通分支 W_1，W_2，且坐标变换的 Jacobi 行列式在 W_1 中为正在 W_2 中为负. 证明：S 是不可定向的.

2. 设 S_2 是可定向的正则曲面且 ϕ: $S_1\to S_2$ 是可微映照，它在每点 $p\in S_1$ 是局部微分同胚. 证明：S_1 是可定向的.

3. 能否给出 Möbius 带面积概念的意义. 如果能做到这点，建立计算它的积分.

4. 设 S 是一个可定向曲面，$\{U_\alpha\}$和$\{V_\beta\}$是覆盖 S 的两个坐标邻域族(即，$\bigcup U_\alpha=S=\bigcup V_\beta$)且满足定义 1 的条件(即在每一族中，坐标变换有正的 Jacobi 行列式). 如果这两族覆盖的并构成的覆盖仍然满足定义 1 的条件，我们说$\{U_\alpha\}$和$\{V_\beta\}$定义了 S 相同的定向.

证明：正则、连通、可定向曲面只能有两个不同的定向.

5. 设 ϕ：$S_1\to S_2$ 是微分同胚.

a. 证明 S_1 是可定向的充要条件为 S_2 是可定向的(从而微分同胚保持可定向性).

b. 设 S_1 和 S_2 是可定向曲面且取了定向. 证明微分同胚中诱导了 S_2 的一个定向. 利用球面的对径映照(见 2.3 习题 1)来说明这个定向可能不同于原来的定向(见习题 4)(这样, 定向本身可以不被微分同胚所保持, 但是注意, 如果 S_1 和 S_2 是连通的, 则微分同胚或者保持定向, 或者变换定向).

6. 定义正则曲线 $C\subset\mathbb{R}^3$ 定向的概念, 且证明: 如果 C 是连通的, 在习题 4 的意义下至多存在两个不同的定向(事实上, 恰恰存在两个定向, 但这更难证明).

7. 证明: 如果一个正则曲面含有微分同胚于 Möbius 带的开集, 那么 S 是不可定向的.

2.7 紧致定向曲面的一个特征[⊖]

2.6 命题 2 的逆命题是成立的, 即在$\mathbb{R}^3$ 中的一个定向曲面是某可微函数正则值的原象. 它的证明不是平凡的. 即使对紧致曲面(在这节给以定义)的特殊情形, 证明仍是有启发性的, 且提供了微分几何中整体性定理的一个有趣例子. 这一节将完全致力于这个逆命题的证明.

设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是可定向曲面. 证明的要害点在于说明在通过 $p\in S$ 的法线上, 在 p 周围能选取长度为 $2\epsilon_p$ 的开区间 I_p(ϵ_p 随 p 而变), 使当 $p\neq q\in S$ 时, $I_p\cap I_p=\phi$. 这样, 并集 $\bigcup I_p$, $p\in S$ 构成$\mathbb{R}^3$ 的开集 V, 它包含 S 且有性质, 通过 V 的每一点, 只有一条 S 的法线通过; V 称为 S 的管状邻域(图 2-32).

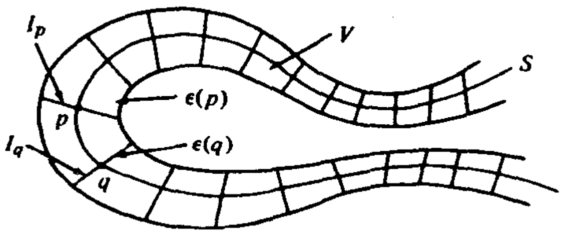


图 2-32 管状邻域

暂且假定可定向曲面 S 的管状邻域 V 是存在的. 那么我们能定义函数 g: $V\to R$ 如下: 固定 S 的一个定向. 观察到管状邻域 V 的任二个线段 I_p 和 I_q, $p\neq q$ 不相交. 这样, 通过每点 $P\in V$, 存在 S 唯一的法线与 S 交于一点 p; 定义 $g(P)$是 p 到 P 的距离, 它的符号由 p 点单位法方向的方向所决定. 如果我们能证明 g 是可微函数, 0 是 g 的正则值, 我们将有 $s=g^{-1}(0)$, 这就是所要证明的.

我们现在来开始证明可定向曲面的管状邻域的存在性. 首先证明这个事实的局部形式, 即我们将证明对正则曲面的每一点 p, 存在一个 p 的邻域, 它有管状邻域.

命题 1 设 S 是正则曲面, X: $U\to S$ 是某点 $p=X(u_0, v_0)\in S$ 附近的参数表示. 那么存在 p 在 S 中的一个邻域 $W\subset X(U)$和数 $\epsilon>0$, 使通过 $q\in W$ 点以 q 为中心长度为 2ϵ 的法线不相交(即, W 有管状邻域).

⊖ 这节在第一次阅读时可略去.

证明 考虑映照 $F: U\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$，它的定义如下

$$F(u,v;t)=X(u,v)+tN(u,v),\quad (u,v)\in U,\quad t\in\mathbb{R}$$

其中 $N(u,v)=(N_x,N_y,N_z)$是在

$$X(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

的单位法向量. 几何上，F 将“柱体”$U\times\mathbb{R}$ 的$(u,v;t)$点映到 S 的法线上距离 $X(u,v)$为 t 的点. F 显然是可微的，它在 $t=0$ 的 Jacobi 行列式为

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ N_x & N_y & N_z\end{vmatrix}=|X_u\wedge X_v|\neq 0$$

根据反函数定理，在 $U\times\mathbb{R}$ 中存在一个平行六面体，例如 $u_0-\delta<u<u_0+\delta$，$v_0-\delta<v<v_0+\delta$，$-\varepsilon<t<\varepsilon$，在它上面 F 是 1 对 1 的. 但是这意味着在矩形.

$$u_0-\delta<u<u_0+\delta,\quad v_0-\delta<v<v_0+\delta,\quad -\varepsilon<t<\varepsilon$$

于 F 下的像 W 中，以 $q\in W$ 为中心长度$<2\varepsilon$ 的法线段不相交. 证毕.

在此，观察到下列事实就较方便. 假定管状邻域 V 存在，则上面定义的函数 $g: V\to\mathbb{R}$ 是可微的，且以 0 作为正则值. 这些事实是局部的结果且能被立即证明.

命题 2 假定可定向曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 的管状邻域 $V\subset\mathbb{R}^3$ 是存在的，且选取 S 的一个定向. 那么如上所定义的函数 $g: V\to\mathbb{R}$ 是可微的且以零作为正则值，其中 g 定义为从 V 的一点沿过这点唯一的 S 的法线到 S 的有向距离.

证明 我们再来看命题 1 所定义的映照 $F: U\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$，其中我们假定参数表示 X 与给定的定向相容. 以 x, y, z 表示 $F(u,v,t)=X(u,v)+tN(u,v)$的坐标，能记

$$F(u,v,t)=(x(u,v,t),\quad y(u,v,t),\quad z(u,v,t))$$

因为 Jacobi 行列式 $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,t)$在 $t=0$ 非零，我们能在某平行六面体 Q:

$$u_0-\delta<u<u_0+\delta,\quad v_0-\delta<v<v_0+\delta,\quad -\varepsilon<t<\varepsilon$$

中取 F 的逆，得到可微映照

$$F^{-1}(x,y,z)=(u(x,y,z),\quad v(x,y,z),\quad t(x,y,z))$$

其中$(x,y,z)\in F(Q)=V$. 但命题 2 中的函数 $g: V\to\mathbb{R}$ 恰是 $t=t(x,y,z)$. 因而，g 是可微的，进而，0 是 g 的正则值，否则对 $t=0$ 的点

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial z}=0$$

所以，微分映照 dF^{-1}在 $t=0$ 是奇异的，这是不可能的. 证毕.

为了从局部定理过渡到整体定理，即为了证明整个可定向曲面管状邻域的存在性，我们需要一些拓扑上的讨论. 我们将限制于紧致曲面，对此现在来加以定义.

设 A 是$\mathbb{R}^3$ 的子集. 我们说 $p\in\mathbb{R}^3$ 是 A 的极限点，如果 p 在$\mathbb{R}^3$ 中的每一邻域包含一个不同于 p 的点. 如果集合 A 包含它所有的极限点则 A 称为闭集. 如果集合 A 包含在$\mathbb{R}^3$ 的某个球中则称为有界的. 如果 A 是有界闭集，则它被称为紧致集.

球面和环面是紧致曲面. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$, $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ 是闭曲面但是是无界的，它不是紧致曲面. 平面中的圆盘 $x^2+y^2<1$ 和 Möbius 带是有界的但不是闭的，因而也是非紧致的.

我们将需要 $\mathbb{R}^3$ 中紧致子集的一些性质，现在来叙述一下，$\mathbb{R}^3$ 中二点 p, $q\in\mathbb{R}^3$ 间的距离记为 $d(p, q)$.

性质 1(Bolzano-Weierstrass) 设 $A\subset\mathbb{R}^3$ 是紧致集，那么，A 的无限子集至少有 A 中的一个极限点.

性质 2(Heine-Borel) 设 $A\subset\mathbb{R}^3$ 是紧致集，且 $\{U_\alpha\}$ 是 A 的一族开集使得 $\bigcup_\alpha U_\alpha=A$，那么能从中取出有限个 U_{k_1}, U_{k_2}, …, U_{k_n} 使 $\bigcup U_{k_i}=A$, $i=1$, …, n.

性质 3(Lebesgue) 设 $A\subset\mathbb{R}^3$ 是紧致集，且 $\{U_\alpha\}$ 是 A 的一族开集使得 $\bigcup_\alpha U_\alpha=A$，那么存在一个数 $\delta>0$(开集族 $\{U_\alpha\}$ 的 Lebesgue 数)，使对任何 p, $q\in A$，只要 $d(p, q)<\delta$，那么 p 和 q 属于某个 U_α.

性质 1 和性质 2 通常在高等分析教程中证明. 为完整起见，我们现在来证明性质 3. 本书后面(第 5 章附录)我们将以更系统的方法处理 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集且给出性质 1 和 2 的证明.

性质 3 的证明 假定没有满足所述条件的 $\delta>0$；即给定 $\frac{1}{n}$，存在 p_n 和 q_n, $d(p_n, q_n)<\frac{1}{n}$，但 p_n 和 q_n 不属于 $\{U_\alpha\}$ 族中同一个开集. 令 $n=1, 2, \cdots$，我们得到二个无限点集 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$. 据性质 1，它们分别有极限点 p 和 q. 因为 $d(p_n, q_n)<\frac{1}{n}$，我们可以取到极限点 $p=q$. 因 $p\in A=\bigcup_\alpha U_\alpha$，所以 p 属于某个 U_α，且因 U_α 是开集，存在以 p 为中心的开球 $B_\varepsilon(p)\subset U_\alpha$，又因为 p 是 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 的极限点，当 n 充分大时点 p_n 和 q_n 落在 $B_\varepsilon(p)\subset U_\alpha$ 中：即 p_n 和 q_n 属于同一个 U_α，得到矛盾. 证毕.

用性质 2 和 3，我们现在来证明可定向紧致曲面管状邻域的存在性.

命题 3 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是正则、紧致、可定向的曲面. 那么存在一个数 $\varepsilon<0$ 使对 S 中任何两点 p、q，分别以它们为中心、长为 2ε 的法线段不相交(即 S 有管状邻域).

证明 根据命题 1，对每个 $p\in S$，存在邻域 W_p 和数 $\varepsilon_p>0$，使命题对 W_p 中的点及 $\varepsilon=\varepsilon_p$ 成立. 让 p 在 S 上变化，我们得到一族 $\{W_p\}$, $\bigcup_{p\in S} W_p=S$. 根据紧致性(性质 2)，能取有限个 W_p: W_1, …, W_k(对应于 ε_1, …, ε_k)使 $\bigcup W_i=S$, $i=1$, …, k. 我们将说明所要求的 ε 为

$$\varepsilon<\min\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\frac{\delta}{2}\right)$$

其中 δ 是开集族 $\{W_i\}$ 的 Lebesgue 数(性质 3).

事实上，设二点 p, $q\in S$. 如果它们都属于某个 W_i, $i=1$, …, k，那么以 p 和 q 为中心，长为 2ε 的法线段不相交，因 $\varepsilon<\varepsilon_i$. 如果 p, q 不属于同一个 W_i，那么 $d(p, q)\geqslant\delta$，若以 p 和 q 为中心，长为 2ε 的两法线段在 $Q\in\mathbb{R}^3$ 点相交，我们有

$$2\varepsilon\geqslant d(p,Q)+d(Q,q)\geqslant d(p,q)\geqslant\delta$$

这与 ε 的定义相矛盾. 证毕.

将命题 1，2 和 3 合起来我们得到下列定理，它是这一节的主要结果.

定理 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是正则紧致可定向的曲面. 那么存在开集 $V\subset\mathbb{R}^3$，$V\supset S$(精确讲是 S 的管状邻域)和一个可微函数 $g: V\to\mathbb{R}$，它以 0 为正则值且 $S=g^{-1}(0)$.

注 1 对可定向曲面，即使它不是紧致的也能证明它管状邻域的存在性，所以定理没有紧致性限制时也成立但证明的技术性更强. 在这一般情况，$\varepsilon(p)>0$ 不像在紧致情形是常数，而随 p 而变化.

注 2 可以证明 $\mathbb{R}^3$ 中的正则紧致曲面是可定向的，所以，在定理中(紧致情况)可定向性假设不是必要的. 这个事实的证明在下列参考资料中能找到：H. Samelson"Orientability of Hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$"Proc. A. M. S. 22(1969)，301～302.

2.8 面积的几何定义[⊖]

在这一节中，我们将对 2.5 中给出的面积定义，说明它在几何上的合理性. 更仔细地说，我们将给出面积的几何定义，并且证明在正则曲面中有界区域的情况，这样的定义将导致在 2.5 中给出的面积公式.

为了定义区域 $R\subset S$ 的面积，我们先将 R 分割为有限个区域 R_i，使 $R=\bigcup_i R_i$，其中任两个 R_i 的交或者是空集或者由双方的边界点所组成(图 2-33)，记这样分割为 $\mathscr{P}$. R_i 的直径是 R_i 中任何两点距离(按 $\mathbb{R}^3$)的上确界. 给定分割 $\mathscr{P}$ 的所有 R_i 直径的最大值，称为分割 $\mathscr{P}$ 的模 μ. 如果我们将每个 R_i 再行分割，我们得到 R 的第二次分割，它称为 $\mathscr{P}$ 的细分.

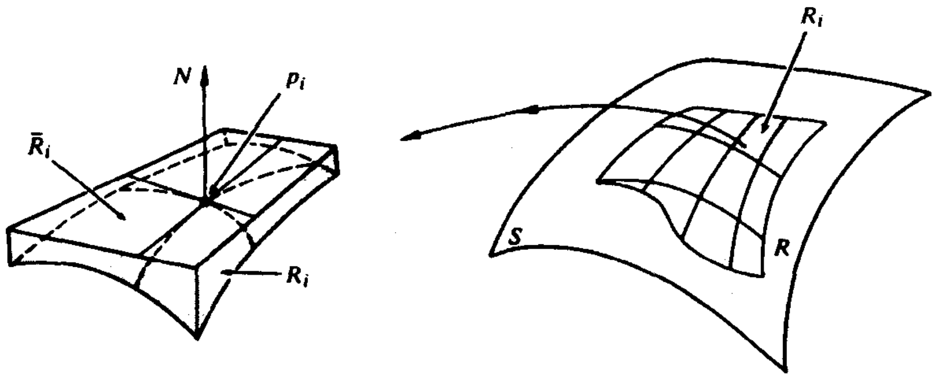


图 2-33

给定 R 的一个分割

$$R=\bigcup_i R_i$$

我们任取一些点 $p_i\in R_i$，且将 R_i 按 R_i 在 p_i 点的法向投影到 p_i 点的切平面，这个投影记为 $\overline{R}_i$，它的面积记为 $A(\overline{R}_i)$. 和式 $\sum_i A(\overline{R}_i)$ 直观上可理解为 R 面积的近似值.

如果取越来越细的分割 $\mathscr{P}_1$，$\mathscr{P}_2$，…，$\mathscr{P}_n$，…，使 $\mathscr{P}_n$ 的模 μ_n 收敛于零，而和式 $\sum_i A(\overline{R}_i)$

⊖ 这一节在第一次阅读时可略去.

存在一个极限，这个极限又不依赖于分割的选取．那么我们说 R 有面积 $A(R)$，它为

$$A(R)=\lim_{\mu_n\to 0}\sum_i A(\overline{R}_i)$$

这个定义的启发性讨论可在下列 R. Courant 的书中找到：Differential and Integral Calculus，Vol. II，Wiley-Interscience，New York，1936，p. 311.

我们将证明，正则曲面的有界区域的确有面积．我们将限于讨论包含在同一坐标邻域中的有界区域，并且求得用对应坐标系的第一基本形式系数表示的面积公式．

命题　设 $X: U\to S$ 是正则曲面 S 中的坐标系，且设 $R=X(Q)$ 是含在 $X(U)$ 中的 S 的有界区域．那么 R 的面积是

$$A(R)=\iint_Q |X_u\wedge X_v|\,dudv$$

证明　考虑 R 的一个分割 $R=\bigcup_i R_i$．因 R 是有界闭集(所以是紧集)，我们能假定分割是足够的细，以致 R_i 中任何二条法线不正交．事实上，法线在 S 中连续变化，那么对每点 $p\in R$，存在 p 在 S 的邻域，使其中任何二条法线不正交．这些邻域组成覆盖 R 的一族开集，考虑 R 的一个分割，使它的模小于这开覆盖的 Lebesgue 数(见 2.7，紧致集的性质 3)，这分割就满足所要条件.

取定分割的一个区域 R_i 及一点 $p_i\in R_i=X(Q_i)$．我们想计算 R_i 在 p_i 点切平面法向投影 $\overline{R}_i$ 的面积．为此，考虑 $\mathbb{R}^3$ 的新坐标系 $p_i\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 它由 $Oxyz$ 经平移 p_i 及使 z 轴转到 p_i 点法线的旋转而得，且二个坐标系有相同定向(图 2-34)．在 $\mathbb{R}^3$ 的新坐标系下，参数表示为

$$\overline{X}(u,v)=(\bar{x}(u,v),\quad \bar{y}(u,v),\quad \bar{z}(u,v))$$

其中 $\overline{X}(u,v)$ 的明显形式并不要紧，只要知道它是 $X(u,v)$ 经平移及正交线性映照后得到的就足够了.

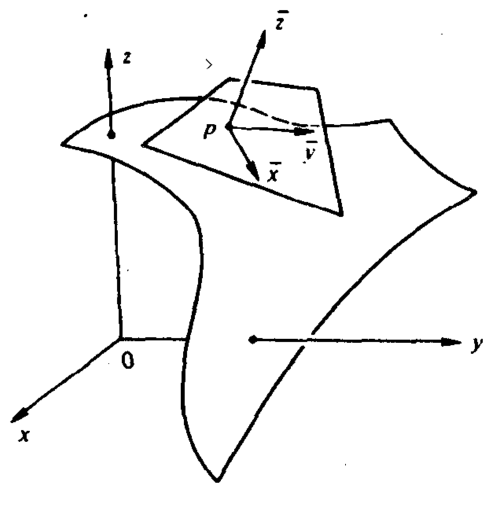


图　2-34

我们看到在 Q_i 中 $\partial(\bar{x},\bar{y})/\partial(u,v)\neq 0$，否则 R_i 中某些法向量的 $\bar{z}$ 分量是零，从而 R_i 中有二条正交法线，与我们假定矛盾.

$A(\overline{R}_i)$ 的表达式为

$$A(\overline{R}_i)=\iint_{\overline{R}_i} d\bar{x}d\bar{y}$$

因 $\partial(\bar{x},\bar{y})/\partial(u,v)\neq 0$，我们能考虑坐标变换 $\bar{x}=\bar{x}(u,v)$，$\bar{y}=\bar{y}(u,v)$，将上式改写为

$$A(\overline{R}_i)=\iint_{Q_i}\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}dudv$$

注意到在 p_i 点向量 $\overline{X}_u$ 和 $\overline{X}_v$ 属于 $\overline{xy}$ 平面；所以在 p_i 点

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} = 0$$

所以，在 p_i 点

$$\left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial \bar{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}\right|$$

因此，

$$\left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| - \left|\frac{\partial \bar{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}\right| = \varepsilon_i(u,v),(u,v) \in Q_i$$

其中 $\varepsilon_i(u, v)$是 Q_i 上连续函数且 $\varepsilon_i(X^{-1}(p_i))=0$，因向量的长度在平移和正交线性变换下不变，我们得到

$$\left|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial \bar{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| - \varepsilon_i(u,v)$$

现在设 M_i 和 m_i 是连续函数 $\varepsilon_i(u, v)$在紧致区域 Q_i 中的最大值和最小值；因此

$$m_i \leqslant \left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| - \left|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\right| \leqslant M_i$$

所以

$$m_i\iint_{Q_i} dudv \leqslant A(\bar{R}_i) - \iint_{Q_i}\left|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\right| dudv \leqslant M_i\iint_{Q_i} dudv$$

对所有 R_i 做同样的估计，我们得到

$$\sum_i m_i A(Q_i) \leqslant \sum_i A(\bar{R}_i) - \iint_Q | x_u \wedge x_v | \, dudv \leqslant \sum_i M_i A(Q_i)$$

现在对给定的分割不断细分，使模 $\mu \to 0$，那么 $M_i \to m_i$，所以，存在极限 $\sum_i A(\bar{R}_i)$，它为

$$A(R) = \iint_Q \left|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\right| dudv$$

它显然不依赖于分割的选取及每个分割中 p_i 的选取．证毕．

附录　连续性和可微性简述

$\mathbb{R}^n$ 用来表示 n 个有序实数组$(x_1, \cdots, x_n)$的集合，尽管我们只用到$\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ 的情形，但更一般的$\mathbb{R}^n$ 的概念既统一了定义而且在引进时又没有更多的困难；如果读者愿意，可以想像为$\mathbb{R}^2$ 或$\mathbb{R}^3$．在那些特殊情况，我们将用下列更为传统的记号：对$\mathbb{R}$ 用 x 或 t，对$\mathbb{R}^2$ 用(x, y)或(u, v)，对$\mathbb{R}^3$ 则用(x, y, z)．

A. $\mathbb{R}^n$ 中的连续性

首先，我们来明确一个点 ε-邻近于给定点 $p_0 \in \mathbb{R}^n$ 的概念．

$\mathbb{R}^n$ 中以 $p_0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)$为中心，$\varepsilon>0$ 为半径的球(或开球)是集合

$$B_\varepsilon(p_0) = \{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\quad (x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2 < \varepsilon^2\}$$

这样，在$\mathbb{R}$ 中，$B_\varepsilon(p_0)$是以 p_0 为中心，长为 2ε 的开区间；在$\mathbb{R}^2$ 中 $B_\varepsilon(p_0)$是以 p_0 为中心 ε 为

半径的圆盘的内部；在$\mathbb{R}^3$中，$B_\varepsilon(p_0)$是用以p_0为中心ε为半径的球面作为边界的区域的内部(见图 A2-1).

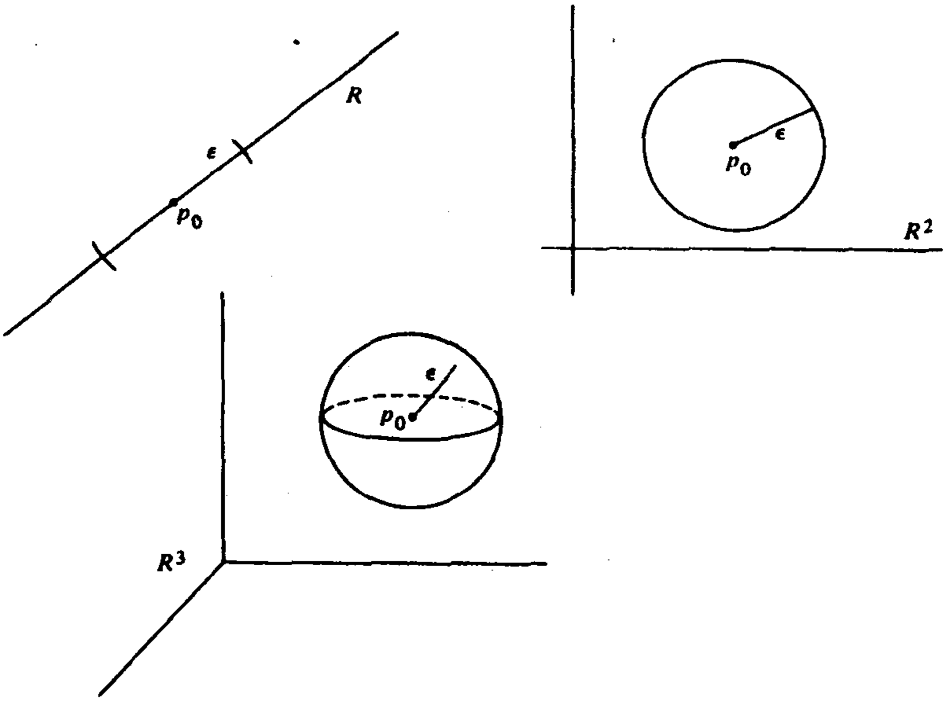


图 A2-1

如果对集合$U\subset\mathbb{R}^n$中的每一点p，存在一个球$B_\varepsilon(p)\subset U$；那么集合$U$称为开集；直观上，这意味着$U$中的点完全被$U$的点所包围，或者充分接近于$U$中点的点仍然落在$U$中.

例如，集合

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad a<x<b,c<y<d\}$$

容易看出是$\mathbb{R}^2$中的开集. 但是，如果其中的一个严格不等式，如$x<b$改为$x\leqslant b$，集合就不再是开的了. 没有一个以点$\left(b,\ \dfrac{d+e}{2}\right)$为中心的球还落在集合中，而$\left(b,\ \dfrac{d+c}{2}\right)$这点是属于该集合的(图 A2-2).

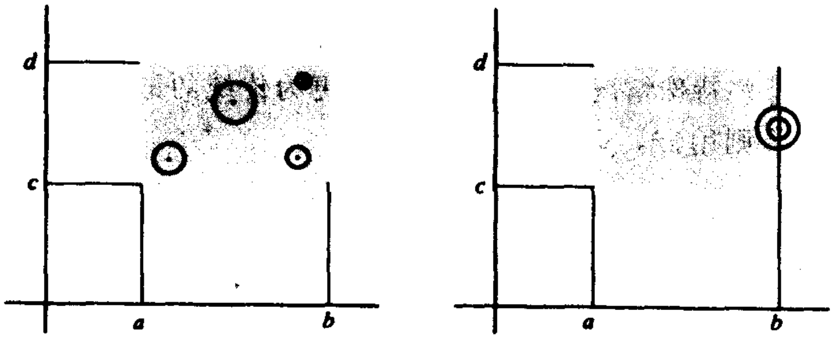


图 A2-2

为了方便，把$\mathbb{R}^n$中包含点$p\in\mathbb{R}^n$的开集说成是p的邻域.

从现在起，用$U\subset\mathbb{R}^n$表示$\mathbb{R}^n$中的开集.

我们回忆一下，对单个实变量的实函数f：$U\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，如果对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使$|x-x_0|<\delta$时有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

那么称f在x_0点是连续的. 类似地，二个实变量的实函数f：$U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$称为在$(x_0, y_0)\in U$是连续的，如果对给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$时

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

球的概念将上述定义统一为下列一般定义的特例：

对映照F：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，如果对给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使

$$F(B_\delta(p))\subset B_\varepsilon(F(p))$$

那么称F在点$p\in U$是连续的. 换言之，如果任意接近于$F(p)$的点是充分接近于p的点的像，则F在p是连续的. 容易看到，在$n=1$，2和$m=1$的特殊情况，这和前面的定义是一致的. 如果F在所有点$p\in U$是连续的，则称F是在U中连续的(图 A2-3).

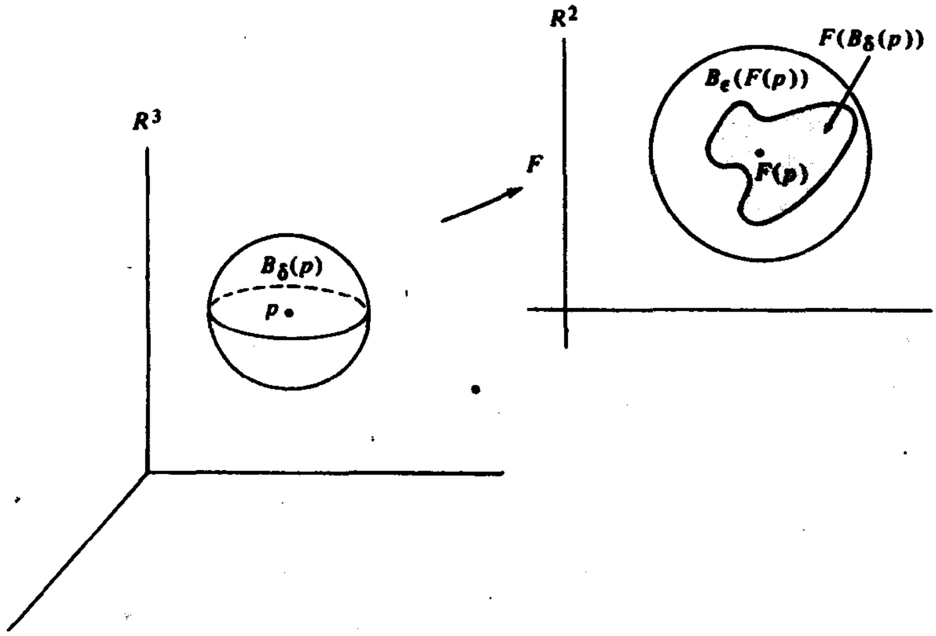


图 A2-3

给定一个映照F：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，我们可以按如下方式确定$n$个变量的$m$个函数. 设$p=(x_1, \cdots, x_n)\in U$，$f(p)=(y_1, \cdots, y_m)$. 那么，我们能记

$$y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n)$$

函数f_i：$U\to\mathbb{R}$，$i=1, \cdots, m$是F的分量函数.

例 1(对称) 设F：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$是映照，它将每点$p\in\mathbb{R}^3$对应到它关于原点$O\in\mathbb{R}^3$的对称点，那么$F(p)=-p$，或

$$F(x,y,z)=(-x,-y,-z)$$

F 的分量函数是

$$f_1(x,y,z)=-x,\quad f_2(x,y,z)=-y,\quad f_3(x,y,z)=-z$$

例 2(反演) 设 F：$\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ 定义如下，记 $|p|$ 为点 $p\in\mathbb{R}^2$ 到原点$(0,0)=0$ 的距离，按定义，$F(p)$，$p\neq 0$ 属于半直线 Op 且 $|F(p)|\cdot|p|=1$. 这样 $F(p)=p/|p|^2$ 或

$$F(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{y}{x^2+y^2}\right),\quad (x,y)\neq(0,0)$$

F 的分量函数是

$$f_1(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f_2(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$$

例 3(投影) 设 π：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 是投影 $\pi(x,y,z)=(x,y)$，那么 $f_1(x,y,z)=x$，$f_2(x,y,z)=y$.

下列的命题说明，映照 F 的连续性等价于分量函数的连续性.

命题 1 F：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是连续的充要条件是其每个分量函数 f_i：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$i=1,\cdots,m$，是连续的.

证明 假定 F 在 $p\in U$ 是连续的，那么对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $F(B_\delta(p))\subset B_\varepsilon(F(p))$，这样，如果 $q\in B_\delta(p)$，那么

$$F(q)\in B_\varepsilon(F(p))$$

即

$$(f_1(q)-f_1(p))^2+\cdots+(f_m(q)-f_m(p))^2<\varepsilon^2$$

这意味着对每个 $i=1,\cdots,m$，$|f_i(q)-f_i(p)|<\varepsilon$. 所以对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $q\in B_\delta(p)$时 $|f_i(q)-f_i(p)|<\varepsilon$，因此每个 f_i 在 p 点是连续的.

反之，设 f_i，$i=1,\cdots,m$ 在 p 点是连续的. 那么对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_i>0$ 使当 $q\in B_{\delta_i}(p)$时 $|f_i(q)-f_i(p)|<\varepsilon/\sqrt{m}$. 置 $\delta<\min\delta_i$，设 $q\in B_\delta(p)$，那么

$$(f_1(q)-f_1(p))^2+\cdots+(f_m(q)-f_m(p))^2<\varepsilon^2$$

所以，F 在 p 点是连续的. 证毕.

由此推得例 1，2，3 中的映照都是连续的.

例 4 设 F：$U\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$，那么

$$F(t)=(x_1(t),\cdots,x_m(t)),\quad t\in U$$

这就是通常所谓的向量值函数，且 F 的分量函数是向量 $F(t)\in\mathbb{R}^m$ 的分量. 当 F 是连续，或等价地，函数 $x_i(t)$，$i=1,\cdots,m$ 是连续时，我们说 F 是$\mathbb{R}^m$ 中的连续曲线.

在大多数应用中，不用球而用邻域的语言来表示连续性，显得更为方便.

命题 2 映照 F：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 $p\in U$ 是连续的充要条件是对 $F(p)$在$\mathbb{R}^m$ 中给定的邻域 V，存在 p 在$\mathbb{R}^n$ 中的邻域 W，使 $F(W)\subset V$.

证明 假定 F 在 p 点是连续的，因 V 是包含 $F(p)$的开集，它对某 $\varepsilon>0$ 包含球 $B_\varepsilon(F(p))$. 据连续性，存在一个球 $B_\delta(p)=W$，使

$$F(W)=F(B_\delta(p))\subset B_\varepsilon(F(p))\subset V$$

这就证明了条件是必要的.

反之，设条件成立. 若给定 $\varepsilon>0$ 以及集 $V=B_\varepsilon(F(p))$，按假定，存在 p 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域 W 使 $F(W)\subset V$，因 W 是开集，存在一个球 $B_\delta(p)\subset W$. 这样，

$$F(B_\delta(p))\subset F(W)\subset V=B_\varepsilon(F(p))$$

所以 F 在 p 点是连续的. 证毕.

连续映照的复合生成一个连续映照. 具体地说我们有下列命题.

命题 3 设 F：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和 G：$V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ 是连续映照，其中 U 和 V 是开集且 $F(U)\subset V$，那么 $G\circ F$：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 是连续映照.

证明 设 $p\in U$，V 是 $G\circ F(p)$ 在 $\mathbb{R}^k$ 中的邻域. 根据 G 的连续性. 存在 $F(p)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的邻域 Q，$G(Q)\subset V$. 根据 F 的连续性，存在 p 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域 W，$F(W)\subset Q$，这样

$$G\circ F(W)\subset G(Q)\subset V$$

所以，$G\circ F$ 是连续的. 证毕.

常常有必要处置定义在 $\mathbb{R}^n$ 中任意(不一定是开的)集上映照的连续性. 为将前面的想法推广到这种情形，我们进行如下.

设 F：$A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是一个映照，其中 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意集合. 我们说 F 在 A 中是连续的，如果存在一个包含 A 的开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 和一个连续映照 $\overline{F}$：$U\to\mathbb{R}^m$，使 $\overline{F}\mid_A=F$，换言之，如果 F 是定义在包含 A 的开集上的连续映照在集合 A 中的限制.

显然，如果 F：$A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是连续的，设 $p\in A$，对给定的 $F(p)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的邻域 V，存在 p 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域 W 使 $F(W\cap A)\subset V$，为此，方便的是称集合 $W\cap A$ 为 p 在 A 中的邻域(图 A2-4).

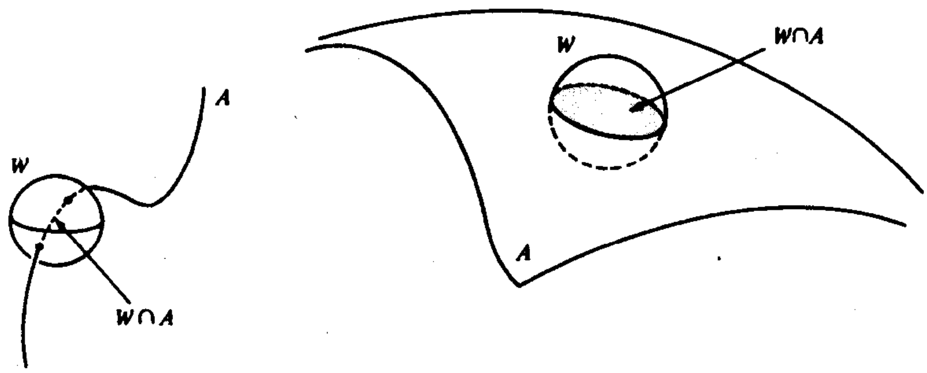


图 A2-4

例 5 设

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$$

是一个椭球面，设 π：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 是例 3 的投影. 那么 π 在 E 上的限制是 E 到 $\mathbb{R}^2$ 的连续映照.

我们说连续映照 F：$A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是到 $F(A)$ 上的同胚，如果 F 是 1 对 1 的且逆映照 F^{-1}：$F(A)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续的. 在这种情况 A 和 $F(A)$ 就是同胚集.

例 6 设 F：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为

$$F(x,y,z) = (xa, yb, zc)$$

F 显然是连续的，且 F 在球面

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

上的限制是连续映照 $\widetilde{F}$：$S^2 \to \mathbb{R}^3$. 观察到 $\widetilde{F}(S^2) = E$，其中 E 是例 5 的椭球面. 显然，F 也是 1 对 1 的且

$$F^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

这样，$\widetilde{F}^{-1} = F^{-1} \mid E$ 是连续的，所以 $\widetilde{F}$ 是球面 S^2 到椭球面 E 上的同胚.

最后，我们想描述闭区间$[a, b]$，

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leqslant x \leqslant b\}$$

上连续实函数的两个性质(即下面的命题 4 和 5)，及闭区间$[a, b]$本身的一个重要性质. 它们在本书中将被反复用到.

命题 4(介值定理) 设 f：$[a, b] \to \mathbb{R}$ 是定义在闭区间$[a, b]$上的连续函数. 假定 $f(a)$到 $f(b)$有相反符号，即 $f(a)f(b)<0$. 那么，存在一点 $C \in (a, b)$使 $f(0)=0$.

命题 5 设 f：$[a, b] \to \mathbb{R}$ 是定义在闭区间$[a, b]$中的连续函数. 那么 f 达到它在$[a, b]$中的最大和最小值，即存在 x_1，$x_2 \in [a, b]$，使对所有 $x \in [a, b]$有 $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$.

命题 6(Heine-Borel) 设$[a, b]$是闭区间，I_α，$\alpha \in A$ 是$[a, b]$中开区间的集合，使$\bigcup_\alpha I_\alpha = [a, b]$，那么，在 I_α 中可选取有限个 I_{k_1}，I_{k_2}，…，I_{k_n}，使$\bigcup I_{k_i} = [a, b]$，$i=1$，…，n.

这些命题是高等微积分教程中的标准定理，这里将不证明. 但是，在第 5 章的附录中将提供证明(分别为命题 6，13 和 11).

B. $\mathbb{R}^n$ 中的可微性

设 f：$U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f 在 $x_0 \in U$ 的导数是极限(如果它存在)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in U$$

当 f 在 x_0 的一个邻域 V 的所有点有导数时，我们能考虑 f'：$V \to \mathbb{R}$ 在 x_0 点的导数，称为 f 在 x_0 点的二阶导数 $f''(x_0)$，如此可一直考虑下去. 如果 f 在 x_0 点有各阶连续导数，它就称为在 x_0 是可微的. 如果它在 U 的一切点可微，就称它在 U 中是可微的.

注 可微性一词，表示有时称为无穷(或 C^∞ 阶)可微的概念. 这个用法不要和初等微积分中用来表示一阶导数存在的术语相混淆.

设 F：$U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$f$ 关于 x 在$(x_0, y_0) \in U$ 点的偏导数是单变量函数 $x \to f(x, y_0)$在 x_0 点的导数(如果存在)，记为$(\partial f/\partial x)(x_0, y_0)$. 类似地，关于 y 在(x_0, y_0)点的偏导数$(\partial f/\partial y)(x_0, y_0)$，被定义为函数 $y \to f(x_0, y_0)$在 y_0 点的导数. 当 f 在(x_0, y_0)点的某邻域 V 的所有点有偏导数时，我们可以考虑在(x_0, y_0)点的二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

如此等等. 如果 f 在(x_0, y_0)点有各阶连续偏导数，它就称为在(x_0, y_0)是可微的. 如果它在 U 的所有点是可微的. 那么称它在 U 中是可微的. 有时，我们把偏导数记为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=f_y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}$$

有一个重要的性质：当 f 可微时，f 的偏导数与求导的次序无关，即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x},\text{等等}$$

偏导数和可微性定义容易推广到$\mathbb{R}^n$ 上的函数 f：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如$(\partial f/\partial x_3)(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$是单变量函数

$$x_3\to f(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0,\cdots,x_n^0)$$

的导数.

更进一步的重要性质是，偏导数满足所谓的链式法则. 例如，若 $x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$，$z=z(u, v)$是 $U\subset\mathbb{R}^2$ 中的实可微函数而 $f(x, y, z)$是$\mathbb{R}^3$ 中的实可微函数，那么复合函数 $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$是 U 中的可微函数，并且比如 f 关于 u 的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

现在我们将可微性的概念推广到映照 F：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. 我们说 F 在点 $p\in U$ 是可微的，如果它的分量函数在 p 点是可微的，即记

$$F(x_1,\cdots,x_n)=(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$$

时，函数 f_i，$i=1, \cdots, m$，在 p 点有各阶连续偏导数. 如果 F 在 U 的所有点都可微，则它在 U 中是可微的.

对 $m=1$ 的情形，这重复了前面的定义. 对 $n=1$ 的情形我们得到$\mathbb{R}^m$ 中可微(参数)曲线的概念. 在第 1 章中，我们已在$\mathbb{R}^3$ 中看到过这一对象. 为了达到我们的目的，需要将第 1 章中切向量的定义推广到现在的情形. 映照 α：$U\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ 在 $t_0\in U$ 点的切向量是$\mathbb{R}^m$ 中的向量

$$\alpha'(t_0)=(x'_1(t_0),\cdots,x'_m(t_0))$$

例 7 设 F：$U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 为

$$F(u,v)=(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\cos^2 v),(u,v)\in U$$

F 的分量函数，即

$$f_1(u,v)=\cos u\cos v, f_2(u,v)=\cos u\sin v, f_3(u,v)=\cos^2 v$$

在 U 中有各阶连续偏导数. 这样，F 是 U 中是可微的.

例 8 设 α：$U\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ 为

$$\alpha(t)=(t^4,t^3,t^2,t),t\in U$$

那么，α 是$\mathbb{R}^4$ 中可微曲线，且 α 在 t 的切向量为$\alpha'(t)=(4t^3, 3t^2, 2t, 1)$.

例 9 对给定的向量 $W\in\mathbb{R}^m$ 和点 $p_0\in U\subset\mathbb{R}^m$，我们总能找到一条可微曲线 α：$(-\varepsilon, \varepsilon)\to U$ 满足$\alpha(0)=p_0$ 和 $\alpha'(0)=W$. 只要定义 $\alpha(t)=p_0+tW$，$t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$. 如记 $p_0=(x_1^0, \cdots, x_m^0)$和 $W=(W_1, \cdots, W_m)$，α 的分量函数是 $x_i(t)=x_i^0+tW_i$，$i=1, \cdots, m$，这样，α 是可微的，$\alpha(0)=p_0$，且

$$\alpha'(0)=(x_1'(0),\cdots,x_m'(0))=(W_1,\cdots,W_m)=W$$

现在，我们来引进可微映照微分的概念，它在本书中将起重要作用.

定义 1 设 F：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是可微映照. 对每点 $p\in U$，我们附上一个线性映照 dF_p：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，它称为 F 在 p 点的微分，定义如下：设 $W\in\mathbb{R}^n$，$\alpha(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ 是一条可微曲线，满足 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=W$. 根据链式法则，曲线 $\beta=F\circ\alpha$：$(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^m$ 也是可微的. 那么(图 A2-5)

$$dF_p(W)=\beta'(0)$$

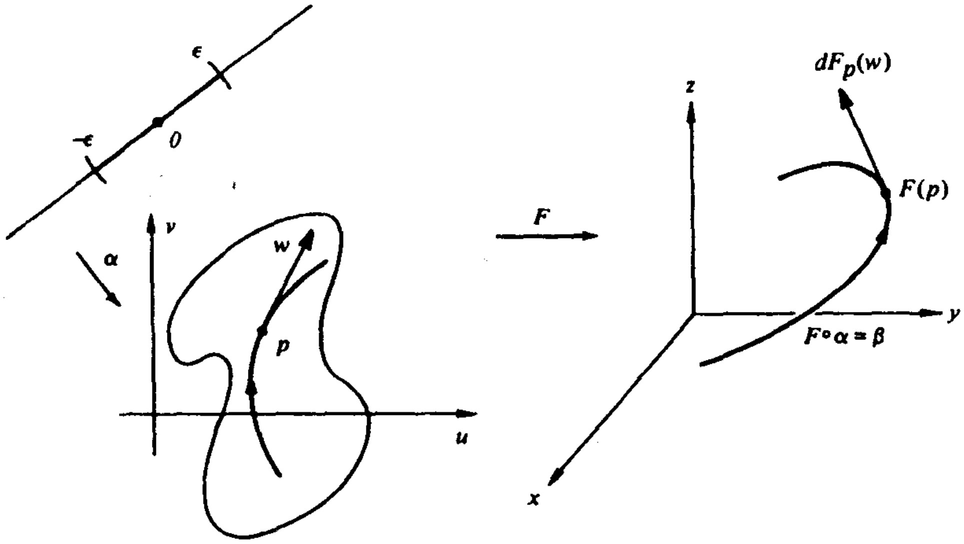


图 A2-5

命题 7 上述 dF_p 的定义不依赖于通过 p 切于 W 的曲线的选取，并且 dF_p 是一个线性映照.

证明 为简化记号，我们证明 F：$U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 的情形. 设(u, v)是$\mathbb{R}^2$ 中的坐标，(x, y, z)是$\mathbb{R}^3$ 中的坐标. 设 $e_1=(1, 0)$，$e_2=(1, 0)$是$\mathbb{R}^2$ 中的规范基且 $f_1=(1, 0, 0)$，$f_2=(0, 1, 0)$和 $f_3=(0, 0, 1)$是$\mathbb{R}^3$ 中的规范基. 那么我们能记 $\alpha(t)=(u(t), v(t))$，$t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned}\alpha'(0)&=W=u'(0)e_1+v'(0)e_2\\F(u,v)&=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\text{ 以及}\\\beta(t)&=F\circ\alpha(t)\\&=(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t)),v(t)))\end{aligned}$$

这样，利用链式法则且取 $t=0$ 处导数，我们得到

$$\begin{aligned}\beta'(0)&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)f_1+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)f_2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)f_3\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{dv}\\\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{du}{dt}\\\frac{dv}{dt}\end{pmatrix}\\&=dF_p(W)\end{aligned}$$

这显示了在$\mathbb{R}^2$和$\mathbb{R}^3$的规范基下dF_p的矩阵形式，它只依赖于F的分量函数x，y，z在p点的偏导数．因此dF_p是线性映照，且显然不依赖于α的选取．

读者能毫无困难地将这样的讨论推广到更一般的情形．证毕．

dF_p：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$在$\mathbb{R}^n$和$\mathbb{R}^m$规范基下的矩阵，即矩阵$(\partial f_i/\partial x_j)i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$称为$F$在$p$的Jacobi矩阵．当$n=m$时这是个方阵，它的行列式称为Jacobi行列式，它通常被记为

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

注 文献中没有关于微分的记号的约定．也常常称dF_p为F在p的导数且记为$F'(p)$．

例 10 设F：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$为

$$F(x,y)=(x^2-y^2,2xy),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

容易看出F是可微的，它在$p=(x,y)$的微分dF_p是

$$dF_p=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$$

例如，$dF_{(1,1)}(2,3)=(-2,10)$．

映照微分概念的好处之一，在于使我们能用几何的语言表示很多分析的事实．如考虑下列情形：设F：$U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，$G$：$V\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$是可微映照，其中$U$和$V$是开集并且$F(U)\subset V$．我们约定下列一套坐标

$$U\subset \underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2}\xrightarrow{F} V\subset\underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3}\xrightarrow{G}\underset{(\xi,\eta)}{\mathbb{R}^2}$$

并且记

$$F(u,v)=(x(u,v),\quad y(u,v),\quad z(u,v))$$
$$G(x,y,z)=(\xi(x,y,z),\eta(x,y,z))$$

那么

$$G\circ F(u,v)=(\xi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$
$$\eta(x(u,v),y(u,v),z(u,v)))$$

利用链式法则，我们能说$G\circ F$是可微的并且能计算它分量函数的偏导数．如

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

表示上述情形的简单方式是应用下列一般的事实．

命题 8(映照的链式法则) 设F：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$G$：$V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$是可微映照，其中$U$和$V$是开集，使$F(U)\subset V$，那么$G\circ F$：$U\to\mathbb{R}^k$是可微映照，并且

$$d(G\circ F)_p=dG_{F(p)}\circ dF_p,\quad p\in U$$

证明 $G\circ F$的可微性是函数的链式法则的推论．现在．设$W_1\in\mathbb{R}^n$是给定的，考虑曲线α：$(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)\to U$，$\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=W_1$．置$dF_p(W_1)=W_2$且观察到$dG_{F(p)}(W_2)=\frac{d}{dt}(G\circ F\circ\alpha)|_{t=0}$．那么

$$d(G\circ F)_p(W_1)=\frac{d}{dt}(G\circ F\circ\alpha)_{t=0}=dG_{F(p)}(W_2)$$
$$=dG_{F(p)}\circ dF_p(W_1)$$

证毕.

注意，对我们前面考虑过的特殊情形，关系式 $d(G\circ F)_p=dG_{F(p)}\circ dF_p$ 等价于下列 Jacobi 矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial v}\\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\xi}{\partial z}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}$$

它包含了所有偏导数$\frac{\partial\xi}{\partial u}$，$\frac{\partial\xi}{\partial v}$，$\frac{\partial\eta}{\partial u}$，$\frac{\partial\eta}{\partial v}$的表达式．这样，映照的链式法则的简单表示式反映了它们分量函数偏导数的大量信息.

定义在开区间(a, b)上的可微函数 f：$(a, b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的一个重要性质是如果在(a, b)中 $f'(x)\equiv 0$，那么 f 在(a, b)中是常数．多变量可微函数的这方面性质推广如下.

我们说开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是连通的，如果对给定的二点 p，$p\in U$ 存在一个连续映照 α：$[a, b]\to U$ 使 $\alpha(a)=p$，$\alpha(b)=q$．这就意味着 U 中两点能被 U 中的连续曲线所连结，或 U 只由单独一个"片"所组成.

命题 9 设 f：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是定义在$\mathbb{R}^n$ 的连通开子集 U 上的可微函数．假设 df_p：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在每点 $p\in U$ 是零．那么 f 在 U 中是常数.

证明 设 $p\in U$，$B_\delta(p)\subset U$ 是 p 周围且包含在 U 内的开球．任何点 $q\in B_\varepsilon(p)$能用径向线段 β：$[0, 1]\to U$ 和 p 相连结，其中 $\beta(t)=tq+(1-t)p$，$t\in[0, 1]$(图 A2-6)．因为 U 是开的，故能延拓 β 到$(0-\varepsilon, 1+\varepsilon)$．而 $f\circ\beta$：$(0-\varepsilon, 1+\varepsilon)\to\mathbb{R}$ 是开区间中的可微函数，且因为 $df\equiv 0$，

$$d(f\circ B)_t=(df\circ d\beta)_t=0$$

这样，对所有 $t\in(0-\varepsilon, 1+\varepsilon)$有

$$\frac{d}{dt}(f\circ\beta)=0$$

所以$(f\circ B)=$常数．这意味着 $f(\beta(0))=f(p)=f(\beta(1))=f(q)$；即 f 在 $B_\delta(p)$中取常值.

这样，命题在局部是成立的；即 U 的每一点有 f 为常值的邻域．注意，到现在为止我们还未用到 U 的连通性，我们将用它来说明所有这些常值是相等的.

设 r 是 U 的任意一点．因 U 是连通的，存在一条连续曲线 α：$[a, b]\to U$，$\alpha(a)=p$，$\alpha(b)=r$．函数 $f\circ\alpha$：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 是$[a, b]$中连续函数．根据第一部分证明，对每点 $t\in[a, b]$，存在在$[a, b]$中的开区间 I_t，使 $f\circ\alpha$ 在 I_t 中是常数，因为 $\bigcup_t I_t=[a,b]$，我们能应用 Heine-Borel 定理(命题 6)．这样，我们能从 I_t 中取出有限个区间 I_1，…，I_k，使 $\bigcup_i I_i=[a, b]$，$i=1$，…，k．我们能假定两个相继的区间相交，如有必要可重新将区间编号．这样，$f\circ\alpha$ 在两

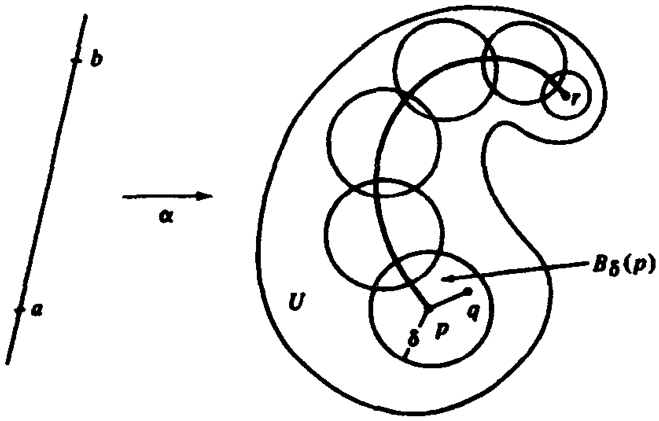


图 A2-6

个相继区间的并上是常数. 由此得到 f 在$[a, b]$上是常数; 即

$$f(\alpha(a)) = f(p) = f(\alpha(b)) = f(r)$$

因 r 是任意的, f 在 U 上是常数. 证毕.

微分学中最重要的定理之一就是所谓的反函数定理. 它在现在的记号下叙述如下. (回忆一下), 线性映照 A 的矩阵如果是可逆的, 那么它是一个同构.)

反函数定理 设 F: $U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个可微映照并且假定在点 $p\in U$, 微分 dF_p: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个同构. 那么存在 p 在 U 中的一个邻域 V 和 $F(p)$在$\mathbb{R}^n$ 中的邻域 W, 使 F: $V\to W$ 有可微的逆映照 F^{-1}: $W\to V$.

对可微映照 F: $V\subset\mathbb{R}^n\to W\to\mathbb{R}^n$, 其中 V 和 W 是开集, 如果它有可微逆映照, 那么 F 称为 V 和 W 间的微分同胚. 反函数定理断言, 如果在一点 $p\in U$, 微分是同构, 那么 F 在 p 的一个邻域中是微分同胚, 换言之, F 在一点微分的性质蕴含了 F 在该点邻域中变化情形的类似性质.

这个定理在本书中将反复用到. 它的证明可在下列书中找到. Buck, Advanced Calculus, p. 285.

例 11 设 F: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为

$$F(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

F 的分量函数, 即 $u(x, y)=e^x\cos y$, $v(x, y)=e^x\sin y$ 有各阶连续偏导数. 这样, F 是可微的.

从几何上看, F 如何变换 xy 平面上的曲线是有启发性的. 例如, 垂直线 $x=x_0$ 被映到半径为 e^{x_0} 的圆周 $u=e^{x_0}\cos y$, $v=e^{x_0}$. $\sin y$, 水平线 $y=y_0$ 被映到斜率为 $\tan y_0$ 的半直线 $u=e^x\cos y_0$, $v=e^x\sin y_0$(图 A2-7), 由此得到

$$dF_{(x_0,y_0)}(1,0) = \frac{d}{dx}(e^x\cos y_0, e^x\sin y_0)\big|_{x=x_0}$$

$$= (e^{x_0}\cos y_0, e^{x_0}\sin y_0)$$

$$dF_{(x_0,y_0)}(1,0) = \frac{d}{dy}(e^{x_0}\cos y, e^{x_0}\sin y)\big|_{y=y_0}$$

$$= (-e^{x_0}\sin y_0, e^{x_0}\cos y_0)$$

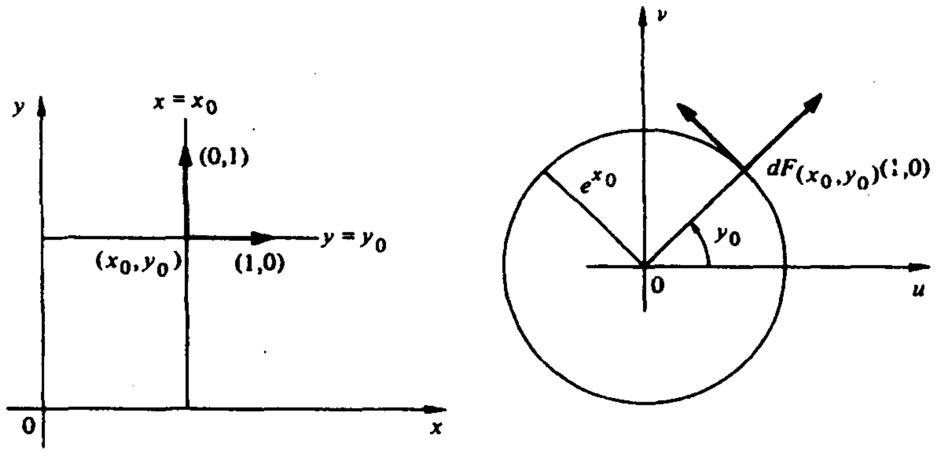


图 A2-7

用计算 F 的 Jacobi 矩阵的方法最容易验证它们，

$$dF_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{x}\cos y & -e^{x}\sin y\\ e^{x}\sin y & e^{x}\cos y\end{pmatrix}$$

且将此作用到在(x_0, y_0)点的向量$(1, 0)$和$(0, 1)$.

我们注意到 Jacobi 行列式 $\det(dF_{(x,y)})=e^{x}\neq 0$. 这样 dF_p 对所有 $p=(x, y)\in\mathbb{R}^2$ 是非奇异的(这从前面几何考虑看也是清楚的)，所以，我们可以应用反函数定理断言，F 是一个局部微分同胚.

观察到 $F(x, y)=F(x, y+2\pi)$. 这样，F 不是 1 对 1 的，也没有整体逆映照. 对每点 $p\in\mathbb{R}^2$，反函数定理给出 p 点的一个邻域 V 及 $F(p)$的一个邻域 W，使得限制映照 F: $V\to W$ 是一个微分同胚. 在这里情形，V 可取为带形$\{-\infty<x<\infty, 0<y<2\pi\}$而 W 取作$\mathbb{R}^2-\{(0, 0)\}$. 但正像这个例子所表明的，即使定理条件被处处满足并且 F 的定义域是非常简单，F 的整体逆仍可能不存在.

第 3 章　Gauss 映照的几何学

3.1　引言

在第 1 章中我们已经看到，对曲线 C 的切线的变化率的考虑使我们得到了曲线 C 的一个重要的几何属性——曲率．在这一章中，我们将把上述思想推广到正则曲面，即，我们将试图度量曲面 S 上任一点 p 的切平面 $T_p(S)$ 向这一点近旁离开时的“快慢”，也就是在 p 点近旁的单法向量场 N 在 p 点的变化率．很快就会看到，这个变化率可以由 $T_p(S)$ 上的一个自伴随的线性映照（参看第 3 章的附录）给出．曲面 S 在 p 点的许多局部性质都可以由对这个线性映照的讨论得出．

在 3.2 中，我们将不用局部坐标来引进有关的定义（Gauss 映照，主曲率和主方向，Gauss 曲率和平均曲率等）．这样，这些定义的几何意义就清楚地表现出来了．但是，为了计算和理论上的需要，把所有的概念用局部坐标表示出来是重要的．这将在 3.3 中处理．

3.2 和 3.3 包含了第 3 章的大部分内容，这些内容都是在本书以后各部分中要用到的．少数例外将被明确地指出．为完整起见，在本章的附录中证明了自伴随线性映照的主要性质．此外，为那些略去了 2.6 的读者，在 3.2 开始时，我们将对曲面的定向概念作一简短的回顾．

3.4 包含了下列事实的证明，即在正则曲面的每一点近旁都存在正交的参数表示，即，参数曲线互相正交．这里所用的技巧，无论是从它们本身或是为得到进一步的结果来说，都是有意义的．然而，倘若教程较短，假定这些结果而略去这一节可能是适宜的．

在 3.5 中，我们将处理两类有趣的特殊曲面，直纹面和极小曲面．这部分内容的处理是独立的，初读时可以略去全部或其中之一．

3.2　Gauss 映照的定义和基本性质

首先对曲面的定向概念作简要的回顾．

在 2.4 中已经看到，若给定正则曲面 S 在点 $p\in S$ 近旁的一个参数表示

$$X:U\subset\mathbb{R}^2\to S$$

则在 $X(U)$ 的每一点都可以选定一个单位法向量

$$N(q)=\frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|}(q),\quad q\in X(U)$$

于是，对 $X(U)$ 的每一点 q，都有相应的单位法向量 $N(q)$，这就得到一个可微映照

$$N:X(U)\to\mathbb{R}^3$$

更一般地，若 $V\subset S$ 是 S 的一个开集，且映照 N：$V\to R^3$ 是可微的，它将 V 中的每一点 q 对应于在 q 点的单位法向量，则 N 称为 V 上的一个可微的单位法向量场．

一个引人注目的事实是，并非所有的曲面都具有定义在全曲面上的可微的单位法向量场．

例如，在如图 3-1 所示的 Möbius 带上就不能定义这样的场．这一事实可以这样直观地看出，沿图形当中的一个圆绕一周，向量场 N 回到 $-N$，这与 N 的连续性矛盾．直观上，在 Möbius 带上不能确定它的"正反面"，因为我们能由它的"一面"连续地走到它的"另一面"，而并不需要离开曲面．

一个正则曲面称为可定向的，如果它容有定义在全曲面上的可微的单位法向量场；这样的一个向量场 N 的选取，称为 S 的一个定向．

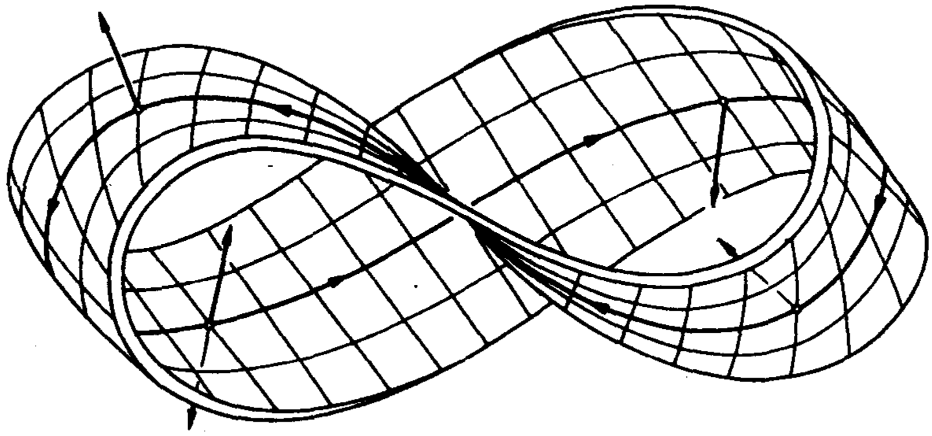


图 3-1 Möbius 带

例如，上面提到的 Möbius 带就不是可定向的曲面．当然，可以由一个坐标系覆盖的曲面(例如可以表示为一个可微函数的图的曲面)显然是可定向的．所以，每个曲面局部都是可定向的．而定向确定无异地是涉及整个曲面的大范围性质．

曲面 S 的一个定向 N，在 S 的每一点 p 的切空间 $T_p(S)$ 上诱导 $T_p(S)$ 的定向如下：$T_p(S)$ 的一组基 $\{v, w\}$ 定义为正的，如果 $\langle v\wedge w, N\rangle$ 是正的，容易看出，$T_p(S)$ 的所有正基的集合构成 $T_p(S)$ 的一个定向(参看 1.4)．

对定向概念的进一步处理在 2.6 中给出．不过，就第三和第 4 章的需要而言，以上的说明已经足够了．

在整个这一章中，S 都表示一个正则的可定向的曲面，且已选定了一个定向(即可微的单位法向量场)；简称为具有定向 N 的曲面 S．

定义 1 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是具有定向 N 的曲面。映照 N：$S\to\mathbb{R}^3$ 取值于单位球面

$$S^2=\{(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3;\mid X^2+Y^2+Z^2=1\}$$

这样得到的映照 N：$S\to S^2$ 称为 S 的 Gauss 映照(图 3-2)

容易证明 Gauss 映照是可微的．N 在点 $p\in S$ 的微分 dN_p 是从 $T_p(S)$ 到 $T_{N(p)}(S^2)$ 的线性映照．因为 $T_p(S)$ 和 $T_{N(p)}(S^2)$ 是平行的平面，dN_p 可以看作是 $T_p(S)$ 上的线性映照．

线性映照 dN_p：$T_p(S)\to T_p(S)$ 的作用如下．对 S 中每一条使 $\alpha(0)=p$ 的参数曲线 $\alpha(t)$，考虑在球面 S^2 中的参数曲线 $N\circ\alpha(t)=N(t)$；这就是限制在曲线 $\alpha(t)$ 上的法向量 N．切向量 $N'(0)=dN_p(\alpha'(0))$ 是 $T_p(S)$ 中的向量(图 3-3)．它度量了法向量 N 沿曲线 $\alpha(t)$ 在 $t=0$ 处的变

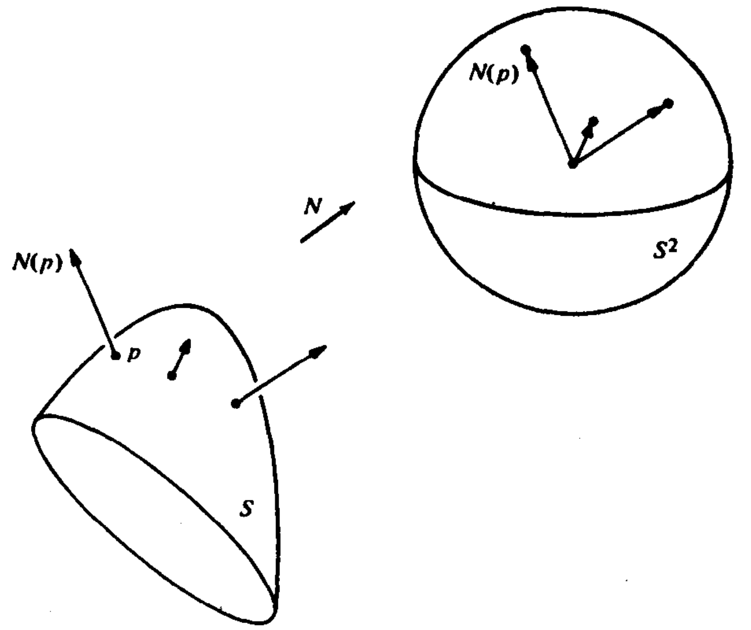


图 3-2 Gauss 映照

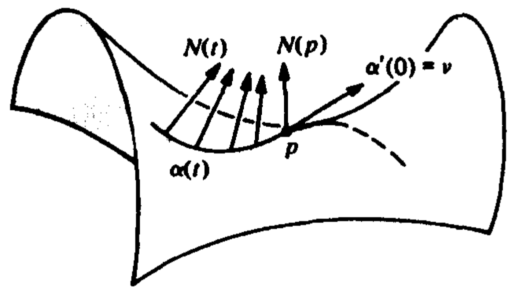


图 3-3

化率. 所以，dN_p 度量了 N 如何从 $N(p)$ 向 p 点近旁离开. 对曲线的情况，这个测度由一个数给出，这就是曲率. 对曲面的情况，这个测度由一个线性映照所刻划.

例 1 由方程

$$ax + by + cz + d = 0$$

给出平面 P，其单位法向量

$$N = (a,b,c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

为常向量. 因此，$dN \equiv 0$(图 3-4).

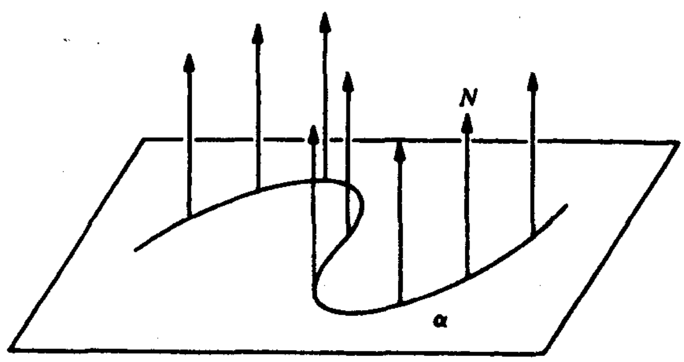


图 3-4 平面：$dN \equiv 0$

例 2 考虑单位球面

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

若 $\alpha(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ 是 S^2 中的一条参数曲线，则

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$$

这说明向量(x, y, z)在点(x, y, z)与球面垂直. 所以，$\overline{N}(x, y, z)$和$N(-x, -y, -z)$是S^2的单位法向量场. 现选定单位法向量场$N(-x, -y, -z)$作为球面S^2的定向. 注意，N总指向球面的中心.

限制在曲线$\alpha(t)$上，法向量

$$N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$$

是t的向量函数，因此，

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t))$$

即，对所有的$p \in S^2$和所有的$v \in T_p(S^2)$，

$$dN_p(v) = -v$$

注意，若取$\overline{N}$为法向量场(即取相反的定向)，则得到

$$d\overline{N}_p(v) = v$$

见图 3-5.

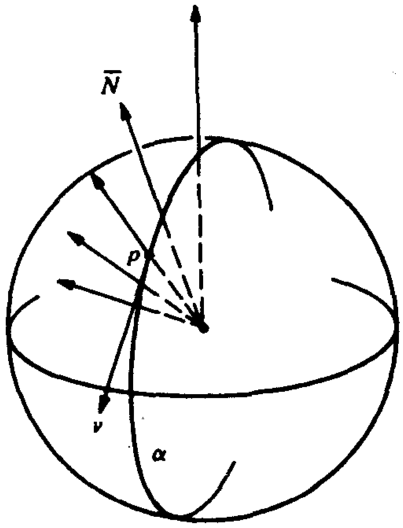


图 3-5 单位球面：$\overline{dN_p}(v) = v$

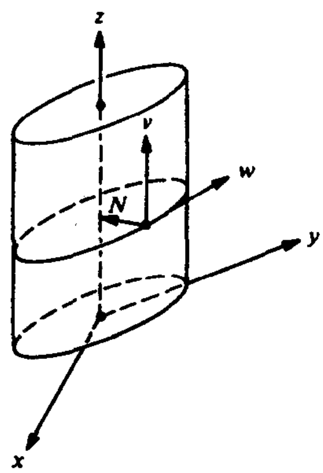


图 3-6

例 3 考虑圆柱面

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2 + y^2 = 1\}$$

由类似前一个例中的证明，可以看出$\overline{N} = (x, y, 0)$和$N = (-x, -y, 0)$是在点(x, y, z)的单位法向量. 现选取单位法向量场$N = (-x, -y, 0)$作为曲面的定向.

考虑包含在圆柱面上的一条曲线$(x(t), y(t), z(t))$，即有$(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$；可以看出，沿这一曲线，$N(t) = (-x(t), -y(t), 0)$. 因此，$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), 0)$.

总之，若v是圆柱面的切向量但平行于z轴，则

$$dN(v) = 0 = 0v$$

若w是圆柱面的切向量但平行于xy平面，则

$$dN(w) = -w$$

见图 3-6. 由此可知，v和w是dN的特征向量，分别对应于特征值 0 和-1(参看第 3 章的附录).

例 4　考虑双曲抛物面

$$z = x^2 - y^2$$

上的点 $p=(0,0,0)$. 给曲面的一个参数表示

$$X(u,v) = (u,v,v^2-u^2)$$

并计算其法向量 $N(u,v)$. 相继得到

$$X_u = (1,0,-2u), \quad X_v = (0,1,2v),$$

$$N = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+\frac{1}{4}}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2+\frac{1}{4}}}, \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2+\frac{1}{4}}}\right)$$

注意，在点 $p=(0,0,0)$的 X_u 和 X_v 分别与 x 轴和 y 轴的单位法向量相同. 因此，使 $\alpha(0)=p$ 的曲线 $\alpha(t)=X(u(t),v(t))$在 p 点的切向量在$\mathbb{R}^3$ 中的坐标为$(u'(0),v'(0),0)$(图 3-7). 限制 $N(u,v)$在这条曲线上并计算 $N'(0)$，得到

$$N'(0) = (2u'(0), -2v'(0), 0)$$

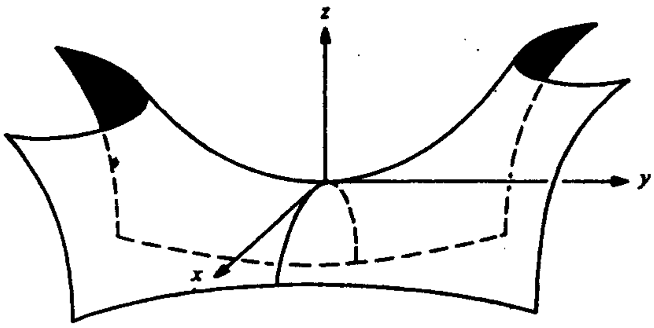


图　3-7

因此，在 p 点，

$$dN_p(u'(0),v'(0),0) = (2u'(0),-2v'(0),0)$$

这就说明，向量$(1,0,0)$和$(0,1,0)$是 dN_p 的特征向量，分别对应于特征值 2 和-2.

例 5　将前一例中所用的方法应用到抛物面

$$z = x^2 + ky^2, k > 0$$

上的点 $p=(0,0,0)$. 证明 x 轴和 y 轴的单位向量是 dN_p 的特征向量，分别对应于特征值 2 和 $2k$(假设 N 指向以抛物面为边界的区域的外部).

下面的命题说明了 dN_p 的一个重要的特质.

命题 1　Gauss 映照的微分

$$dN_p: T_p(S) \to T_p(S)$$

是自伴随的线性映照(参看第 3 章的附录).

证明　因为 dN_p 是线性的，只须对 $T_p(S)$的一组基(w_1, w_2)证明

$$\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle$$

设 $X(u,v)$是 S 在 p 近旁的一个参数表示，$\{X_u, X_v\}$是在 $T_p(S)$中相应的基. 若 $\alpha(t)=$

$X(u(t),\ v(t))$是S中的一条参数曲线，且$\alpha(0)=p$，则有

$$\begin{aligned}dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt}N(u(t),v(t))\Big|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0)\end{aligned}$$

特别，

$$dN_p(X_u) = N_u,\quad dN_p(X_v) = N_v$$

因此，为证明dN_p是自伴随的，只须证明

$$\langle N_u, X_v\rangle = \langle X_u, N_v\rangle$$

为此，取$\langle N,\ X_u\rangle=0$和$\langle N,\ X_v\rangle=0$分别对v和u的导数，得到

$$\langle N_v, X_u\rangle + \langle N, X_{uv}\rangle = 0$$

$$\langle N_u, X_v\rangle + \langle N, X_{vu}\rangle = 0$$

所以，

$$\langle N_u, X_v\rangle = -\langle N, X_{uv}\rangle = \langle N_v, X_u\rangle$$

证毕.

由dN_p：$T_p(S)\to T_p(S)$是自伴随的线性映照这一事实，我们能定义一个与dN_p相配的二次形式Q：

$$Q(v) = \langle dN_p(v), v\rangle,\quad v\in T_p(S)$$

为得到这个二次形式的几何解释，我们需要几个定义. 由于马上就会清楚的原因，我们将利用二次形式$-Q$(参看第 3 章的附录).

定义 2 定义在$T_p(S)$上的二次形式II_p：

$$\mathrm{II}_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle,\quad v\in T_p(S)$$

称为S在p的第二基本形式.

定义 3 设C是S中经地点$p\in S$的曲线，k是C在p的曲率，$\cos\theta=\langle n,\ N\rangle$，$n$是$C$在$p$点的主法向量，$N$是$S$在$p$点的法向量，则数

$$k_n = k\cos\theta$$

称为曲线$C\subset S$在p点的法曲率.

换句话说，k_n是向量kn在曲面S于p点的法向上射影的长，再加上由S在p点的定向N给出的符号(图 3-8).

注 C的法曲率不依赖于C的定向. 但是，若改变曲面的定向，它改变符号.

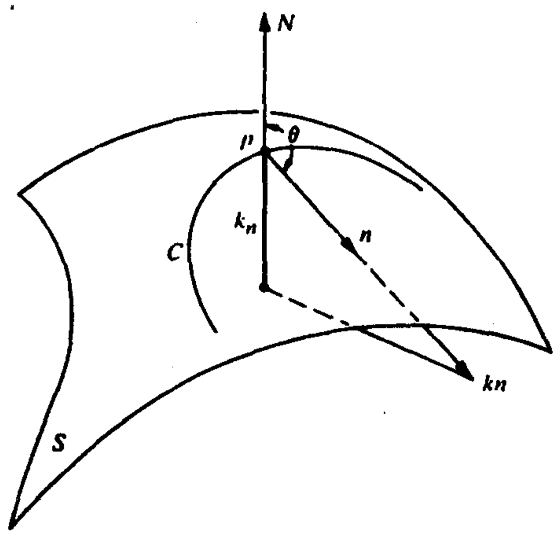


图 3-8

为给出第二基本形式II_p的一个解释，考虑以$\alpha(s)$为参数表示的正则曲线$C\subset S$，这里s是C的弧长，且$\alpha(0)=p$. 若用$N(s)$表示法向量N对曲线$\alpha(s)$的限制，则有$\langle N(s),\ \alpha'(s)\rangle=0$. 因此，

$$\langle N(s), \alpha''(s)\rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s)\rangle$$

所以，

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_p(\alpha'(s)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)),\alpha'(0)\rangle \\ &= -\langle N'(0),\alpha'(0)\rangle \\ &= \langle N(0),\alpha''(0)\rangle \\ &= \langle N,kn\rangle(p) \\ &= k_n(p)\end{aligned}$$

换句话说，第二基本形式 II_p 对单位向量 $v\in T_p(S)$ 的值，等于经过 p 点与 v 相切的正则曲线在这一点的法曲率. 特别，我们得到下面的结果.

命题 2(Meusnier) 曲面 S 上经过给定的一点 p 且具有相同切线的所有曲线在这一点有相同的法曲率.

根据这个命题，我们就可以说在 p 点沿给定方向的法曲率. 为方便起见，引进下面的一些名词. 给定单位向量 $v\in T_p(S)$，S 与包含 v 和 $N(p)$ 的平面的交称为 S 在 p 点沿 v 的法截线(图 3-9). 在 p 点的一个邻域，S 在 p 点的法截线是 S 上的正则的平面曲线，它在 p 点的主法向量为 $\pm N(p)$ 或零；因此，它的曲率等于在 p 点的沿 v 的法曲率的绝对值. 利用这些名词，上面的命题就可以说成是，曲线 $\alpha(S)$ 在 p 点的法曲率的绝对值等于 S 在 p 点的沿 $\alpha'(0)$ 的法截线在这一点的曲率.

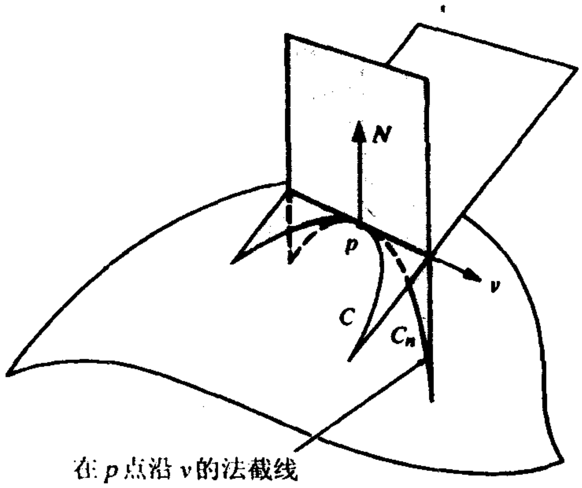


图 3-9 Meusnier 定理：在 p 点沿 v 的 C 和 C_n 有相同的法曲率

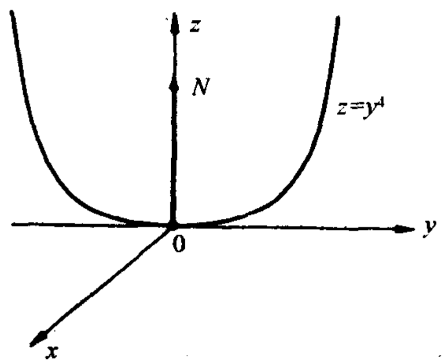


图 3-10

例 6 考虑由曲线

$$z=y^4$$

绕 z 轴旋转得到的旋转面(图 3-10). 我们将说明在 $p=(0,0,0)$ 的微分 $dN_p=0$. 为此，首先注意到曲线 $y=z^4$ 在 p 点的曲率为零. 此外，因为 xy 平面就是曲面在 p 点的切平面，故法向量 $N(p)$ 平行于 z 轴. 所以，在 p 点的任一法截线都可以由曲线 $z=y^4$ 旋转得到；因此，它在 p 点的曲率为零. 这就得到了在 p 点的所有的法曲率为零，所以 $dN_p=0$.

例 7 在例 1 的平面中，所有的法截线都是直线；因此，法曲率全为零. 所以，在所有点的第二基本形式恒为零. 这与 $dN\equiv 0$ 这一事实一致.

在例 2 的球面 S^2 中，取定向 $\bar{N}$，过任一点 $p\in S^2$ 的法截线是半径为 1 的圆(图 3-11)．所以，所有的法曲率都等于 1，以及第二基本形式

$$\mathrm{II}_p(v)=1$$

对所有的 $p\in S^2$ 和所有的单位向量 $v\in T_p(S)$成立．

在例 3 的圆柱面中，在一点 p 的法截线是一族椭圆，它从垂直于圆柱面的轴的圆变到平行于这个轴的直线(图 3-12)．所以，其法曲率从 1 变为 0．在几何上不难看出，1 和 0 分别是在 p 点的法曲率的极大值和极小值．然而，应用在第 3 章的附录中关于二次型的一个定理可以给上述事实一个简单的证明．事实上，如我们在例 3 中已经看到的，向量 w 和 v(分别对应于法曲率为 1 和 0 的方向)是 dN_p 的特征向量，分别对应于特征值 -1 和 0．所以，如我们所断言的，第二基本形式在这些向量上取极值．根据这个过程，我们知道其极值为 1 和 0．

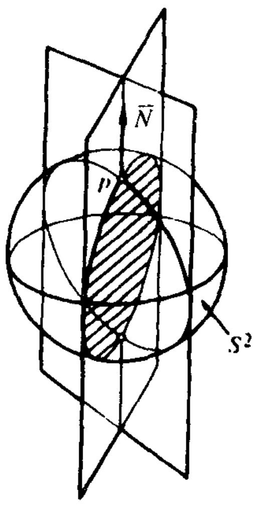


图 3-11　在球面上的法截线

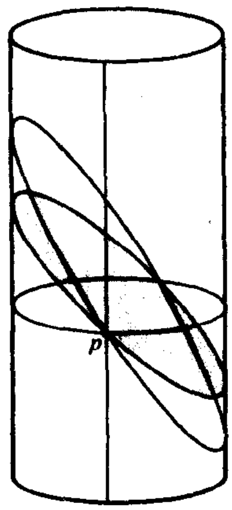


图 3-12　在圆柱面上的法截线

分析例 4 中的双曲抛物面在点 $p=(0,0,0)$的法截线，我们将它留给读者．

让我们回到线性映射 dN_p．第 3 章的附录的定理说明，对 S 中的每一点 p，存在 $T_p(S)$的标准正交基$\{e_1,e_2\}$使 $dN_p(e_1)=-k_1e_1$，$dN_p(e_2)=-k_2e_2$．此外，k_1 和 $k_2(k_1\geqslant k_2)$分别是第二基本形式 II_p 限制在 $T_p(S)$的单位圆上的最大值和最小值；也就是说，它们是在 p 点的法曲率的极值．

定义 4　在 p 点的最大的法曲率和最小的法曲率称为 p 点的*主曲率*；对应的方向，即特征向量 e_1 和 e_2 的方向，称为 p 点的*主方向*．

例如，平面上任一点的任意方向都是主方向．球面上也是这样．在这两种情形，它们的第二基本形式在每一点的切平面的单位圆周上都是常值(参看例 7)．所以，其法曲率对所有的方向都取极值．

在例 3 的圆柱面中，向量 v 和 w 给出在 p 点的主方向，分别对应于主曲率 0 和 1．在例 4 的双曲抛物面，x 轴和 y 轴的方向就是主方向，它们分别对应于主曲率 -2 和 2．

定义 5　S 上的一条正则连通曲线 C 称为 S 的*曲率线*，如果对所有的 $p\in C$，C 在 p 点的切

线方向都是 S 在 p 点的主方向.

命题 3(Olinde Rodrigue) 曲面 S 上的一条连通的正则曲线 C 是 S 的曲率线的充分必要条件是，对 C 的任何参数表示 $\alpha(t)$，

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

成立，其中 $N(t)=N\circ\alpha(t)$ 和 $\lambda(t)$ 是 t 的可微函数. 在这种情形，$-\lambda(t)$ 是沿 $\alpha'(t)$ 的法曲率(主曲率).

证明 只要注意，若 $\alpha'(t)$ 是主方向，则 $\alpha'(t)$ 是 dN 的特征向量，且

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

反之显然. 证毕.

由在 p 点的主曲率可以容易地去计算沿 $T_p(S)$ 的一个给定方向的法曲率. 事实上，设 $v\in T_p(S)$，且 $|v|=1$. 因为 e_1 和 e_2 构成 $T_p(S)$ 的一组标准正交基，故

$$v = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta$$

其中 θ 是按 $T_p(S)$ 的定向从 e_1 到 v 的角. 沿 v 的法曲率 k_n 为

$$\begin{aligned} k_n &= \mathrm{II}_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1\cos\theta + e_2\sin\theta), e_1\cos\theta + e_2\sin\theta\rangle \\ &= \langle e_1k_1\cos\theta + e_2k_2\sin\theta, e_1\cos\theta + e_2\sin\theta\rangle \\ &= k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta \end{aligned}$$

最后的表示式就是通常所谓经典的 Euler 公式；事实上，它就是第二基本形式在基 $\{e_1, e_2\}$ 中的表示式

给定二维向量空间 V 上的一个线性映照

$$A: V\to V$$

和 V 的一组基 $\{v_1, v_2\}$，并设 (a_{ij}) 是 A 对这组基的矩阵. 我们知道，A 的行列式

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

和 A 的迹

$$a_{11} + a_{22}$$

是不依赖于基 $\{v_1, v_2\}$ 的选择的，因此，它们是线性映照 A 本身的性质.

在前面所讨论的情况中，dN 的行列式是 $(-k_1)(-k_2)=k_1k_2$，即主曲率的乘积，dN 的迹是主曲率之和的相反数 $-(k_1+k_2)$. 若改变曲面的定向，行列式不变(对这一事实，维数为偶数是实质性的)；但迹要改变符号.

定义 6 设 $p\in S$，dN_p：$T_p(S)\to T_p(S)$ 是 Gauss 映照的微分. dN_p 的行列式称为 S 在 p 点的 Gauss 曲率 K，dN_p 的迹的相反数之半称为 S 在 p 点的平均曲率 H.

用主曲率可以将 K 和 H 表示为

$$K = k_1k_2,\quad H = \frac{k_1+k_2}{2}$$

定义 7 曲面 S 上的一点 p 称为

1)椭圆点，如果 dN_p 的行列式 $\det(dN_p)>0$.

2)双曲点，如果 $\det(dN_p)<0$.

3)抛物点，如果 $\det(dN_p)=0$，但 $dN_p\neq 0$.

4)平点，如果 $dN_p=0$.

显然，上述分类不依赖于曲面定向的选取.

在椭圆点，Gauss 曲率是正的. 主曲率有相同的符号，因此，通过这一点的所有曲线的主法向量都指向该点的切平面的同侧. 球面上的点都是椭圆点. 抛物面 $z=x^2+ky^2$，$k>0$(参看例 5)上的点(0，0，0)也是椭圆点.

在双曲点，Gauss 曲率是负的. 主曲率有相反的符号，因此，通过这一点的曲线中，必有在 p 的主法向量指向该点切平面的不同侧的曲线. 双曲抛物面 $z=y^2-x^2$(参看例 4)上的点(0，0，0)就是双曲点.

在抛物点，Gauss 曲率为零. 但主曲率不全为零. 圆柱面(参看例 3)上的点都是抛物点.

在平点，主曲率全为零. 平面上的点显然都是平点. 例 6 中给出的是平点的一个非平凡的例子.

定义 8 在 $p\in S$，若 $k_1=k_2$，则 p 称为 S 的一个脐点；特别，平点($k_1=k_2=0$)是脐点.

球面上的点和平面上的点都是脐点，用例 6 中的方法可以验证抛物面 $z=x^2+y^2$ 上的点(0，0，0)是脐点(非平点).

下面将证明这样一个有趣的事实，全部是脐点的曲面仅有球面和平面.

命题 4 若连通曲面 S 的所有的点都是脐点，则 S 必包含在球面或平面中.

证明 设 $p\in S$，$X(u,v)$是 S 在 p 近旁的一个参数表示，且坐标领域 V 是连通的.

因为每一点 $q\in V$ 都是脐点，故对 $T_p(S)$中的任意向量 $w=a_1X_u+a_2X_v$，都有

$$dN(w)=\lambda(q)w$$

其中 $\lambda=\lambda(q)$是 V 上的实值可微函数.

首先证明 $\lambda(q)$在 V 中是常数. 为此，我们将上方程写成

$$N_ua_1+N_va_2=\lambda(X_ua_1+X_va_2)$$

因为 w 是任意的，故

$$N_u=\lambda X_u$$
$$N_v=\lambda X_v$$

将第一式对 v 微分和第二式对 u 微分，再相减就得到

$$\lambda_uX_v-\lambda_vX_u=0$$

因为 X_u 和 X_v 是线性独立的，故必有

$$\lambda_u=\lambda_v=0$$

对 V 中所有的 q 成立. 因为 V 是连通的，所以 λ 是常数.

若 $\lambda\equiv 0$，则 $N_u=N_v=0$，于是，在 V 中，$N=N_0$ 为常向量，所以，

$$\langle X(u,v),N_0\rangle_u=\langle X(u,v),N_0\rangle_v=0$$

因此，

$$\langle X(u,v), N_0\rangle = 常数$$

即 V 的所有的点 $X(u, v)$ 都在一平面上.

若 $\lambda\neq 0$，则

$$X(u,v)-\frac{1}{\lambda}N(u,v)=Y(u,v)$$

为一定点，这是因为

$$\left(X(u,v)-\frac{1}{\lambda}N(u,v)\right)_u=\left(X(u,v)-\frac{1}{\lambda}N(u,v)\right)_v=0$$

因此，

$$|X(u,v)-Y|^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

即 V 的所有的点都在以 Y 为中心，$\frac{1}{|\lambda|}$ 为半径的球面上.

以上局部地证明了命题，也就是对任一点 $p\in S$ 的领域作了证明. 下面来完成定理的证明. 因为 S 是连通的，对 S 中任意给定的另一点 r，存在连续的曲线

$$\alpha:[0,1]\to S$$

使 $\alpha(0)=p$，$\alpha(1)=r$. 对这条曲线上的每一点 $\alpha(t)\in S$，存在它在 S 中的包含在球面或平面上的一个领域 V_t，并使 $\alpha^{-1}(V_t)$ 是[0，1]的一个开区间并集 $\bigcup\alpha^{-1}(V_t)$，$t\in[0, 1]$，覆盖[0，1]，且因为[0，1]是闭区间，它可以由族 $\{\alpha^{-1}(V_t)\}$ 中有限个元素覆盖(参看 Heine-Borel 定理，第 2 章附录的命题 6). 所以，$\alpha([0, 1])$ 可以由领域 V_t 中的有限个覆盖.

若这些领域中有一个领域内的点都在一平面上，所有的其他的领域的点也在这平面上. 因为 r 是任意的，S 的所有的点都在这平面上.

若这些领域中有一个领域内的点都在一球面上，同样的理由说明 S 上的所有的点都在这球面上，这就完成了定理的证明. 证毕.

定义 9 设 p 是 S 中的一点，$T_p(S)$ 的一个方向称为 S 在 p 点的*渐近方向*. 如果它对应的法曲率为零. S 的一条连通的正则曲线 $C\subset S$ 称为*渐近线*，如果对 C 上的每一点 p，C 在 p 的切向都是渐近方向.

由定义立即得到，在椭圆点没有渐近方向.

对渐近方向的一个有用的几何解释可以由 Dupin 标线给出. 下面将对 Dupin 标线给予描述.

设 p 是 S 中的一点. 在 p 点的 Dupin 标线是 $T_p(S)$ 中使

$$\mathrm{II}_p(w)=\pm 1$$

的向量 w 的集合.

为将 Dupin 标线的方程写成比较方便的形式，设 (ξ, η) 是 $T(S)$ 中对标准正交基 $\{e_1, e_2\}$ 的笛卡儿坐标，且 e_1 和 e_2 是 dN_p 的特征向量. 给定 $w\in T_p(S)$，设 ρ 和 θ 是它的"极坐标"，决定于

$$w=\rho v,\ |v|=1$$

和

$$v = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta, \quad 若 \rho \neq \theta$$

由 Euler 公式,

$$\pm 1 = \mathrm{II}_p(w) = \rho^2\mathrm{II}_p(v) = k_1\rho^2\cos^2\theta + k_2\rho^2\sin^2\theta$$
$$= k_1\xi^2 + k_2\eta^2$$

这里 $w=\xi e_1+\eta e_2$. 所以, Dupin 标线上的点的坐标(ξ, η)满足方程

$$k_1\xi^2 + k_2\eta^2 = \pm 1 \tag{1}$$

因此, Dupin 标线由 $T_p(S)$中的圆锥截线所组成. 注意, 沿由 w 所决定的方向的法曲率是

$$k_n(v) = \mathrm{II}_p(v) = \pm\frac{1}{\rho^2}$$

对椭圆点, Dupin 标线是一个椭圆(k_1 和 k_2 有相同的符号); 若这一点是非平点的脐点($k_1=k_2\neq 0$), 则椭圆退化为圆.

对双曲点, k_1 和 k_2 符号相反. 因此, Dupin 标线是由具有共同渐近线的两条双曲线构成的(图 3-13). 沿渐近线的方向, 其法曲率为零; 因此它们是渐近方向. 这就是渐近方向这一名词的来源, 也说明了在双曲点恰有两个渐近方向.



图 3-13 Dupin 标线

对抛物点, 主曲率之一是零, Dupin 标线退化为一对平行的直线. 这两条直线的公共方向是在该点的唯一的渐近方向.

在 3.4 的例 5 中我们将指出 Dupin 标形的一个有趣的性质.

与渐近方向的概念密切相关的是共轭方向的概念, 现在将给出它的定义.

定义 10 设 p 是曲面 S 上的一点, $T_p(S)$中的两个向量 w_1 和 w_2 称为共轭的, 如果

$$\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle = 0$$

在 p 点的两个方向 r_1 和 r_2 称为共轭的, 如果分别平行于 r_1 和 r_2 的一对向量 w_1 和 w_2 是共轭的.

在共轭方向的定义中, r_1 和 r_2 的共轭性质不依赖于 w_1 和 w_2 的选取是显然的.

由定义可见, 主方向是共轭的. 渐近方向是自共轭的. 此外, 在非平点的脐点, 任意一对互相垂直的方向都是一对共轭方向, 在平点, 每一个方向与任意的另一个方向都是共轭的.

设 $p\in S$ 不是脐点, $\{e_1, e_2\}$是 $T_p(S)$的标准正交基, 它决定于

$$dN_p(e_1) = -k_1e_1, \quad dN_p(e_2) = -k_2e_2$$

设 θ 和 φ 分别是 e_1 与方向 r_1 和 r_2 所成的角, 则 r_1 和 r_2 共轭的充要条件是

$$k_1\cos\theta\cos\varphi = -k_2\sin\theta\sin\varphi \tag{2}$$

事实上，r_1 和 r_2 共轭的充要条件是向量

$$w_1 = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta, \quad w_2 = e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi$$

是共轭的. 所以，

$$0 = \langle dN_p(w_1), w_2\rangle = -k_1\cos\theta\cos\varphi - k_2\sin\theta\sin\varphi$$

因此，条件(2)成立.

当 k_1 和 k_2 都不为零时(即 p 点是椭圆点或双曲点)，借助于在 p 点的 Dupin 标线，条件(2)导致一个求共轭方向的几何作图法. 下面将仅就椭圆点说明这个作图方法，在双曲点的情况是类似的. 设 r 是 $T_p(S)$上的一条过原点的直线，它与 Dupin 标线相交于 q_1 和 q_2(图 3-14). Dupin 标线在 q_1 和 q_2 的切线是平行的，它们的共同方向 r' 就是 r 的共轭方向. 我们将这些结论的证明作为习题留给读者(习题 12).

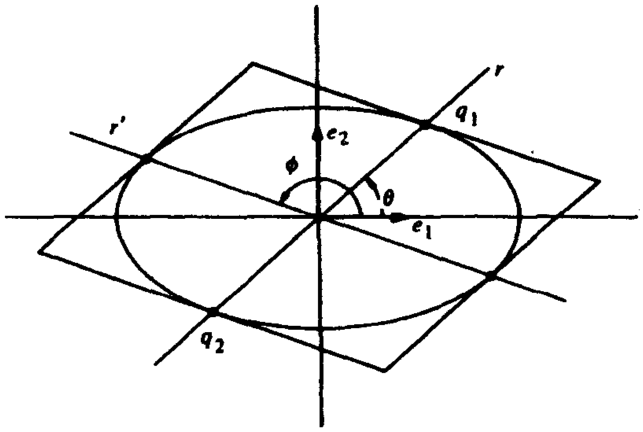


图 3-14 共轭方向的作图

习题

1. 证明：在双曲点，主方向平分渐近方向.

2. 证明：若曲面沿一曲线与平面相切，则此曲线上的点必为抛物点或平点.

3. 设曲面 S 的 Gauss 曲率 $K>0$，$C\subset S$ 是曲面 S 上的一条正则曲线. 证明：C 在 p 点的曲率

$$k \geqslant \min(|k_1|, |k_2|)$$

其中 k_1 和 k_2 是 S 在 p 点的主曲率.

4. 设在曲面 S 的每一点都有 $|k_1|\leqslant 1$ 和 $|k_2|\leqslant 1$. 问：对曲面 S 上的任一曲线 C，是否总有 $|k|\leqslant 1$?

5. 证明：在点 $x\in S$ 的平均曲率

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi k_n(\theta)d\theta$$

其中 $k_n(\theta)$是在 p 点的沿与某一固定方向成 θ 角的方向的法曲率.

6. 证明：在曲面上的一点，互相垂直的任意一对方向的法曲率之和是常数.

7. 证明：在非平点，若平均曲率为零，则这一点有两个互相垂直的渐近方向.

8. 描述下列曲面的 Gauss 映照的像在单位球面上所覆盖的区域：

a. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$.

b. 旋转双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$.

c. 悬链面 $x^2+y^2=\cosh^2 z$.

9. 证明：

a. 设 $N: S\to S^2$ 是曲面 S 的 Gauss 映照，$\alpha: I\to S$ 是 S 上的一条正则的参数曲线，且不包含曲面的平点或抛物点，由 $N\circ\alpha$ 是球面 S^2 上的正则的参数曲线(称为 α 的球面像).

b. 若 $C=\alpha(I)$ 是一条曲率线，k 是 C 在 p 点的曲率，则

$$k=|k_n k_N|$$

其中 k_n 是在 p 点沿 C 的切线方向的法曲率，k_N 是 C 的球面像 $N(C)\subset S^2$ 在 $N(p)$ 的曲率.

10. 设 C 是曲面 S 上的一条曲率线，它的任一点的切线方向都不是渐近方向，且 C 的密切平面与曲面的切平面沿 C 成定角. 证明：C 必为平面曲线.

11. 设 p 是曲面 S 的一个椭圆点，r 和 r' 是在 p 点的一对共轭方向. 证明：当 r 在 $T_p(S)$ 中变化时，r 和 r' 所成的角在关于主方向对称的唯一的一对方向达到极小值.

12. 设 p 是曲面 S 的一个双曲点，r 是 $T_p(S)$ 的一个方向. 借助 Dupin 标线给出找 r 的共轭方向 r' 的几何作图法并予以证明(见 3.2 末的作法).

*13. (Beltrami-Enneper 定理) 证明：曲面上的一条曲率处处不为零的渐近线在一点的挠率 τ 的绝对值

$$|\tau|=\sqrt{-K}$$

其中 K 是曲面在给定点的 Gauss 曲率.

*14. 若曲面 S_1 和曲面 S_2 沿正则曲线 C 相交，由 C 在点 $p\in C$ 的曲率 k 可以由下式给出：

$$k^2\sin^2\theta=\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2\cos\theta$$

其中 λ_1 和 λ_2 分别是 S_1 和 S_2 在 p 点沿曲线 C 的切线方向的法曲率，θ 是 S_1 在 p 点的法向量和 S_2 在 p 点的法向量所成的角.

15. (Joachimstal 定理) 设曲面 S_1 和曲面 S_2 沿一条正则曲线 C 相交，交角为 $\theta(p)$，$p\in C$. 假定 C 是 S_1 的一条曲率线. 证明：C 是 S_2 的曲率线的充要条件是 $\theta(p)$ 为常数.

*16. 证明：环面上的子午线是曲率线.

17. 证明：若曲面 S 的平均曲率 $H\equiv 0$，且 S 无平点，则 Gauss 映照 $N: S\to S^2$ 有下面的性质：

$$\langle dN_p(w_1),\ dN_p(w_2)\rangle=-K(p)\langle w_1,w_2\rangle$$

对所有的 $p\in S$ 和所有的 w_1，$w_2\in T_p(S)$ 成立. 并由上面的条件证明，在 S 上任意两条曲线的交角等于它们的球面像的交角，最多差一个符号.

*18. 设 λ_1，…，λ_m 分别是 p 点的沿与主方向成角 0，$2\pi/m$，…，$2(m-1)\pi/m$ 的方向的法曲率. 证明：

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_m=mH$$

其中 H 是在 p 点的平均曲率.

*19. 设 $C\subset S$ 是 S 中的一条正则曲线，$p\in C$，$\alpha(s)$是 C 在 p 近旁的参数表示，s 为弧长，且 $\alpha(0)=p$，$\{t, h\}$是 $T_p(S)$的一组标准正交的正基，且 $t=\alpha'(0)$. $C\subset S$ 在 p 点的测地挠率 τ_g 定义为

$$\tau_g=\left\langle\frac{dN}{ds}(0), h\right\rangle$$

证明：

a. $\tau_g=(k_1-k_2)\cos\varphi\sin\varphi$，其中 φ 是从 e_1 到 t 的角.

b. 若 τ 是 C 的挠率，n 是 C 的主法向量，$\cos\theta=\langle N, n\rangle$，则

$$\frac{d\theta}{ds}=\tau-\tau_g$$

c. S 的曲率线可以由测地挠率为零这一性质刻划.

*20. (Dupin 定理) 在$\mathbb{R}^3$的一个开集 U 中的三族曲面称为三重正交系，如果过 U 中的每一点 $p\in U$ 都有各族中唯一的曲面经过，且它们是两两正交的. 利用习题 19 的 c 部分，证明 Dupin 定理：三重正交系中的曲面彼此相交于曲率线.

3.3 局部坐标中的 Gauss 映照

在前一节中，我们引进了与 Gauss 映照的局部性质有关的一些概念. 为强调它们的几何意义，在定义中没有利用局部坐标，一些简单的例子都是由定义来直接计算的；然而，在处理一般情形时这样做是不方便的. 在这一节中，我们将得到第二基本形式和 Gauss 映照的微分在坐标系中的表示式. 这将给出为计算具体例子的系统方法. 此外，为对上面所引进的概念作更详尽研究，所得到的一般表示式也是不可缺少的.

在这一节中，假设 S 的所有的参数表示 X：$U\subset\mathbb{R}^2\to S$ 都与 S 的定向 N 相容. 即，在 $X(U)$中，

$$N=\frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|}$$

设 $X(u, v)$是曲面 S 在 $p\in S$ 近旁的一个参数表示，$\alpha(t)=X(u(t), v(t))$是 S 上的参数曲线，且 $\alpha(0)=p$. 为简化记号，约定下面出现的所有的函数表示它们在 p 点的值.

$\alpha(t)$在 p 点的切向量是 $\alpha'=X_u u'+X_v v'$，以及

$$dN(\alpha')=N'(u(t),v(t))=N_u u'+N_v v'$$

因为 N_u 和 N_v 是 $T_p(S)$中的向量，所以，它们可以表示为

$$\begin{aligned}N_u&=a_{11}X_u+a_{12}N_v\\N_v&=a_{12}X_u+a_{22}N_v\end{aligned}\tag{1}$$

于是，

$$dN(\alpha')=(a_{11}u'+a_{12}v')X_u+(a_{21}u'+a_{22}v')X_v$$

因此，

$$dN\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}$$

这就表明，在基$\{X_u, X_v\}$中，dN是由矩阵$(a_{ij})i, j=1, 2$给出的. 注意，这个矩阵未必是对称的，除非$\{X_u, X_v\}$是一组标准正交基.

另一方面，在基$\{X_u, X_v\}$中，第二基本形式的表示式为

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'),\alpha'\rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v'\rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2\end{aligned}$$

其中，因为$\langle N, X_u\rangle = \langle N, X_v\rangle = 0$，

$$\begin{aligned}e &= -\langle N_u, X_u\rangle = \langle N, X_{uu}\rangle \\ f &= -\langle N_v, X_u\rangle = \langle N, X_{uv}\rangle = \langle N, X_{vu}\rangle = -\langle N_u, X_v\rangle \\ g &= -\langle N_v, X_v\rangle = \langle N, X_{vv}\rangle\end{aligned}$$

借助系数e，f，g我们来求a_{ij}的值. 由方程(1)，得到

$$\begin{aligned}-f &= \langle N_u, X_v\rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= \langle N_v, X_u\rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -e &= \langle N_u, X_u\rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -g &= \langle N_v, X_v\rangle = a_{12}F + a_{22}G\end{aligned} \tag{2}$$

其中E，F和G是第一基本形式在基$\{X_u, X_v\}$中的系数(参看2.5). 关系(2)可以表示为矩阵形式：

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix} \tag{3}$$

因此，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}^{-1}$$

其中$(\quad)^{-1}$表示矩阵$(\quad)$的逆. 容易验证，

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E\end{pmatrix}$$

由此就得到在基$\{X_u, X_v\}$中dN的系数矩阵(a_{ij})的表示式：

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

最后指出，关系式(1)连同上列值就是所谓的 Weingarten 方程.

由方程(3)立即得到

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{4}$$

现计算平均曲率. 因为$-k_1$，$-k_2$是dN的特征值，所以，对某些$v \in T_p(S)$，$v \neq 0$，k_1和k_2满足方程

$$dN(v) = -kv = -kIv$$

其中I是恒同映照. 这就得到线性映照$dN + kI$是不可逆的；因此，其行列式为零. 所以，

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+k \end{pmatrix}=0$$

或

$$k^2+k(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0$$

因为 k_1 和 k_2 是上面的二次方程的根，所以

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=-\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})$$
$$=\frac{1}{2}\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2} \tag{5}$$

因此，

$$k^2-2Hk+K=0$$

所以，

$$k=H\pm\sqrt{H^2-K} \tag{6}$$

由这个关系式得到，若选 $k_1(q)\geqslant k_2(q)$，$q\in S$，则函数 K_1 和 K_2 在 S 上是连续的. 并且，k_1 和 k_2 在 S 上是可微的，也许要除去 S 的脐点($H^2=K$).

在这一章的计算中，将采取下面的简短的记号：

$$\langle u\wedge v,w\rangle=(u,v,w),u,v,w\in\mathbb{R}^3$$

右端表示一个 3×3 矩阵的行列式，这个矩阵的列(或行)是向量 u，v，w 在$\mathbb{R}^3$的规范基中的坐标.

例 1 计算环面上的点的 Gauss 曲率，设给定环面的参数表示(参看 2.5 节的例 6)

$$X(u,v)=((a+r\cos u)\cos v,(a+r\cos u)\sin v,r\sin u)\qquad 0<u<2\pi,0<v<2\pi$$

为计算 e，f，g，需要知道 N(于是要计算 X_u，X_v)，X_{uu}，x_{uv}和 X_{vv}：

$$X_u=(-r\sin u\cos v,-r\sin u\sin v,r\cos u)$$
$$X_v=(-(a+r\cos u)\sin v,(a+r\cos u)\cos v,0)$$
$$X_{uu}=(-r\cos u\cos v,-r\cos u\sin v,-r\sin u)$$
$$X_{uv}=(r\sin u\sin v,-r\sin u\cos v,0)$$
$$X_{vv}=(-(a+r\cos u)\cos v,-(a+r\cos u)\sin v,0)$$

由这些得到

$$E=\langle X_u,X_u\rangle=r^2,\quad F=\langle X_u,X_v\rangle=0$$
$$G=\langle X_v,X_v\rangle=(a+r\cos u)^2$$

又因为 $|X_u\wedge X_v|=\sqrt{EG-F^2}$，$e=\langle N,X_{uu}\rangle$，所以，

$$e=\left\langle\frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|},X_{uu}\right\rangle=\frac{(X_u,X_v,X_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{r^2(a+r\cos u)}{r(a+r\cos u)}=r$$

类似地计算得到

$$f=\frac{(X_u,X_v,X_{uv})}{r(a+r\cos u)}=0$$

$$g=\frac{(X_u,X_v,X_{uv})}{r(a+r\cos u)}=\cos u(a+r\cos u)$$

最后，由 $K=(eg-f^2)/(EG-F^2)$得到

$$K=\frac{\cos u}{r(a+r\cos u)}$$

根据这个表示式，沿纬线 $u=\frac{\pi}{2}$和 $u=\frac{3\pi}{2}$的 $K=0$；所以，这些纬线上的点是抛物点．在由 $\frac{\pi}{2}<u<\frac{3\pi}{2}$给定的区域中，$K$ 是负的(注意 $r>0$ 和 $a>r$)；所以，在这个区域中的点是双曲点．在由 $0<u<\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}<u<2\pi$ 所给定的区域中，Gauss 曲率是正的，所以，在这个区域中的点是椭圆点(图 3-15)．

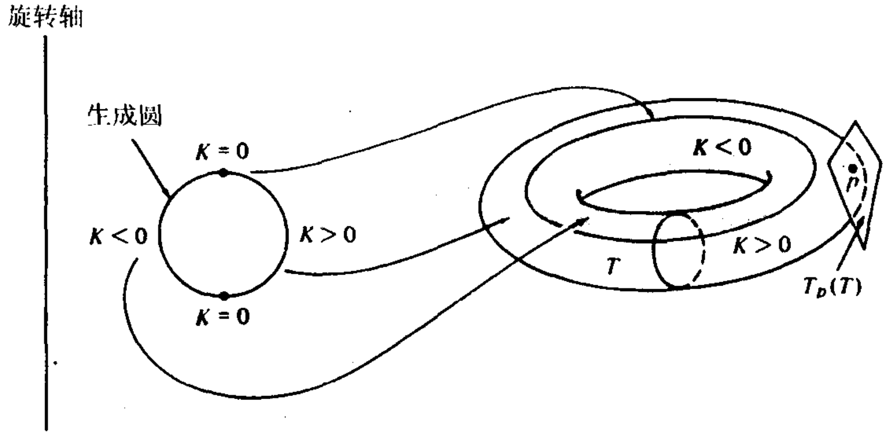


图 3-15

作为第二基本形式的坐标表示的一个应用，我们将证明一个命题，它给出曲面上在椭圆点或双曲点邻近的点相对于这一点的切平面的位置关系．例如，察看例 1 中环面上的椭圆点，我们发现，曲面位于该点的切平面的一侧(图 3-15)．另一方面，若 p 是环面 T 的一个双曲点，$V\subset T$ 是 p 的任一领域，则 V 中必有在 $T_p(S)$的两侧的点，无论 V 是如何的小．这个例子反映出曲面的一个一般的局部性质，现描述为下列命题．

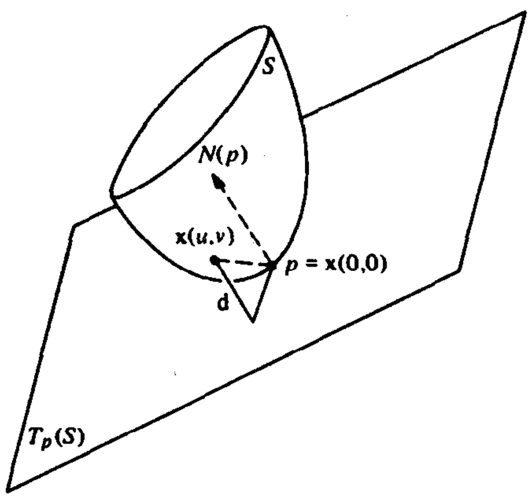


图 3-16

命题 1 若 $p\in S$ 是 S 的一个椭圆点，则存在 p 在 S 中的邻域 V，使 V 中所有的点都在切平面 $T_p(S)$的同侧．若 $p\in S$ 是 S 的一个双曲点，则 p 在 S 的每一个邻域都有在 $T_p(S)$异侧的点．

证明 设 $X(u,v)$是 S 在 p 附近的一个参数表示，且 $X(0,0)=p$．从点 $q=X(u,v)$到切平面 $T_p(S)$的距离(图 3-16)．

$$d=\langle X(u,v)-X(0,0),N(p)\rangle$$

因为 $X(u,\ v)$是可微的，故有 Taylor 公式：

$$X(u,v)=X(0,0)+X_u u+X_v v$$
$$+\frac{1}{2}(X_{uu}u^2+2X_{uv}uv+X_{vv}v^2)+\bar{R}$$

其中各导数在(0，0)取值，余项 $\bar{R}$ 满足条件

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\bar{R}}{u^2+v^2}=0$$

由此得到

$$\begin{aligned}d&=\langle X(u,v)-X(0,0),N(p)\rangle\\&=\frac{1}{2}\{\langle X_{uu},N(p)\rangle u^2+2\langle X_{uv},N(p)\rangle uv+\langle X_{vv},N(p)\rangle v^2\}+R\\&=\frac{1}{2}(eu^2+2fuv+gv^2)+R\\&=\frac{1}{2}\mathrm{II}_p(w)+R\end{aligned}$$

其中 $w=X_u u+X_v v$，$R=\langle\bar{R},\ N(p)\rangle$，且$\lim\limits_{w\to 0}(R/|w|^2)=0$.

对椭圆点 p，$\mathrm{II}_p(w)$符号不变. 所以，对所有的充分接近于 p 点的$(u,\ v)$，d 与 $\mathrm{II}_p(w)$有相同的符号；即，所有这样的$(u,\ v)$都在 $T_p(S)$的同侧.

对双曲点 p，在 p 点的每一邻域，都存在点$(u,\ v)$和$(\bar{u},\ \bar{v})$使 $\mathrm{II}_p(w/|w|)$和 $\mathrm{II}_p(\bar{w}/|\bar{w}|)$有相反的符号(这里 $\bar{w}=X_u\bar{u}+X_v\bar{v}$)；它们在 $T_p(S)$的异侧. 证毕.

在抛物点和平点的附近没有如命题 1 所说的性质. 在 3.1 的例 3 和例 6 中的抛物点和平点，曲面处在切平面的一侧，且可以与切平面有一公共线. 在下面的例中，我们将指出一种可能出现的完全不同的情况.

例 2 "猴鞍面"(图 3-17)

$$x=u,\quad y=v,\quad z=u^3-3v^2u$$

直接计算得到第二基本形式的系数在(0，0)的值为

$$e=f=g=0$$

所以，(0，0)是平点. 然而，在这一点的任一邻域都有在切平面两侧的点.

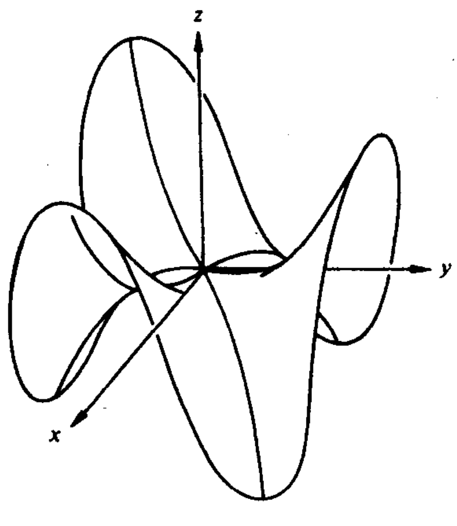


图 3-17

例 3 考虑由曲线

$$z=y^3,\quad -1<z<1$$

绕直线 $z=1$ 旋转得到的曲面(见图 3-18). 经简单的计算表明，由原点 O 旋转生成的点都是抛物点. 我们将略去这个计算，因为，在例 4 中将直接证明旋转曲面的纬圆和经线都是曲率线；由这个事实，以及，

对问题中所说的点，经线(形如 $y=x^3$ 的曲线)的曲率为零，而纬圆是法截线，这样就得到上面的结论.

注意，在这样的抛物点的任何邻域都有在切平面异侧的点.

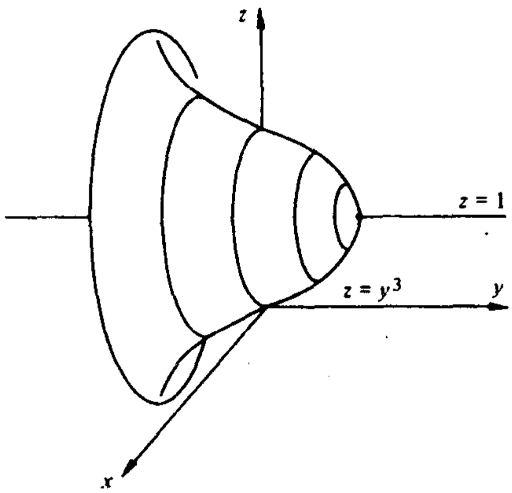


图 3-18

第二基本形式在局部坐标中的表示，对渐近方向和主方向的研究是特别有用的. 先看渐近方向.

设 $X(u, v)$ 是曲面 S 在 $p\in S$ 附近的一个参数表示，且 $X(0, 0)=p$，并设 $e(u, v)=e$，$f(u, v)=f$ 和 $g(u, v)=g$ 是第二基本形式在这个参数表示中的系数.

我们回忆一下(见 3.2 定义 9)，在 X 的坐标邻域中，一条连通的正则曲线 C 为渐近线的充要条件是对 C 的任何参数表示 $\alpha(t)=X(u(t), v(t))$，$t\in I$，均有 $\mathrm{II}(\alpha'(t))=0$ 对一切 $t\in I$ 成立(见 3.2 的定义 9)，即，必须且只须

$$e(u')^2+2fu'v'+g(v')^2=0,\quad t\in I \tag{7}$$

因此，方程(7)称为**渐近线的微分方程**. 在下一节中，我们将对这一表示式给出进一步的说明. 现在，我们仅需从方程(7)作出下面的有用的结论：在双曲点($eg-f^2<0$)的一个邻域，一个参数表示的坐标曲线是渐近线的充要条件是 $e=g=0$.

事实上，若曲线 $u=$常数，$v=v(t)$和曲线 $u=u(t)$，$v=$常数都满足方程(7)，则有 $e=g=0$. 反之，若上条件成立和 $f\neq 0$，方程(7)变成 $fu'v'=0$，显然，坐标曲线满足这一方程.

现在考虑主方向，并沿用前面已经建立的记号.

在 X 的坐标邻域中的连通正则曲线 C 是曲率线的充要条件是对 C 的任何参数表示 $\alpha(t)=X(u(t), v(t))$，$t\in I$，均有(参见 3.2 命题 3)

$$dN(\alpha'(t))=\lambda(t)\alpha'(t)$$

由此得到函数 $u'(t)$，$v'(t)$满足方程组

$$\frac{fF-eG}{EG-F^2}u'+\frac{gF-fG}{EG-F^2}v'=\lambda u'$$

$$\frac{eF-fE}{EG-F^2}u'+\frac{fF-gE}{EG-F^2}v'=\lambda v'$$

由上列方程组中消去 λ 就得到**曲率线的微分方程**

$$(fE-eF)(u')^2+(gE-eG)u'v'+(gF-fG)(v')=0$$

并可以将它写成如下的比较对称的形式

$$\begin{vmatrix}(v')^2 & -u'v' & (u')^2\\ E & F & G\\ e & f & g\end{vmatrix}=0 \tag{8}$$

利用主方向是互相正交的这一事实，从方程(8)容易得到，在一个不含有脐点的邻域中，一个参数表示的坐标曲线是曲率线的充分必要条件是 $F=f=0$.

例 4(旋转面) 考虑参数表示为

$$X(u,v)=(\varphi(v)\cos u,\varphi(v)\sin u,\psi(v)),\quad 0<u<2\pi,a<v<b,\varphi(v)\neq 0$$

的旋转面(见 2.3 的例 4，这里分别用 φ 和 ψ 代替 f 和 g).

第一基本形式的系数为

$$E=\varphi^2,F=0,G=(\varphi')^2+(\psi')^2$$

为方便起见，假设旋转的曲线以弧长为参数，即

$$(\varphi')^2+(\psi')^2=G=1$$

直接计算得到第二基本形式的系数

$$\begin{aligned} e&=\frac{(X_u,X_v,X_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} -\varphi\sin u & \varphi'\cos u & -\varphi\cos u\\ \varphi\cos u & \varphi'\sin u & -\varphi\sin u\\ 0 & \psi' & 0\end{vmatrix}\\ &=-\varphi\psi' \end{aligned}$$

$$f=0,g=\psi'\varphi''-\psi''\varphi'$$

因为 $F=f=0$，所以，旋转面上的纬线($v=$常数)和经线($u=$常数)都是曲面的曲率线(例 3 中所用的结论).

因为

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=-\frac{\psi'(\psi'\varphi''-\psi''\varphi')}{\varphi}$$

和 φ 是恒正的，这就得到曲上的点是抛物点的条件为 $\psi'=0$(母线的切线垂直于旋转轴)或 $\varphi'\psi''-\psi'\varphi''=0$(母线的曲率为零). 同时满足上述条件的点是平点，因为由这些条件就能推出 $e=f=g=0$.

为方便起见，将 Gauss 曲率写成另一种形式. 对 $(\varphi')^2+(\psi')^2=1$ 作微分就得到

$$\varphi'\varphi''=-\psi'\psi''$$

所以，

$$K=-\frac{\psi'(\psi'\varphi''-\psi''\varphi')}{\varphi}=-\frac{(\psi')^2\varphi''+(\varphi')^2\varphi''}{\varphi}=-\frac{\varphi''}{\varphi}\tag{9}$$

对旋转面，方程(9)是 Gauss 曲率的有用的简便的表示式. 例如，它可以用来决定常数 Gauss 曲率的旋转面(参看习题 7).

为计算其主曲率，我们首先指出下面的一般性的结论：若正则面曲面的一个参数表示使 $F=f=0$，则其主曲率为 e/E 和 g/G. 事实上，在这种情形，其 Gauss 曲率和平均曲率分别为

$$K=\frac{eg}{EG},\quad H=\frac{1}{2}\frac{eG+gE}{EG}$$

(参看方程(4)和(5)). 因为 K 是主曲率的乘积，$2H$ 是主曲率的和，由此立即得到我们的结论.

于是，旋转曲面的主曲率为

$$\frac{e}{E} = -\frac{\psi'\varphi}{\varphi^2} = -\frac{\psi'}{\varphi}$$
$$\frac{g}{G} = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi' \tag{10}$$

因此，这种曲面的平均曲率是

$$H = \frac{1}{2}\frac{-\psi' + \varphi(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi} \tag{11}$$

例 5 曲面经常被给作为一个可微函数

$$z = h(x,y)$$

的图(参看 2.2，命题 1)，这里(x, y)属于$\mathbb{R}^2$的一个开集U. 这时，手边能有有关概念的一些公式是较方便的，为得到这些公式，先将曲面用参数表示为

$$X(u,v) = (u,v,h(u,v)), \quad (u,v) \in U$$

其中 $u=x$，$v=y$. 经简单的计算得到

$$X_u = (1,0,h_u), \quad X_v = (0,1,h_v)$$
$$X_{uu} = (0,0,h_{uu}), \quad X_{uv} = (0,0,h_{uv}), \quad X_{vv} = (0,0,h_{vv})$$

所以，

$$N(x,y) = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}$$

是曲面上的单位法向量场，并且，对这一定向，其第二基本形式的系数为

$$e = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}$$
$$f = \frac{h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}$$
$$g = \frac{h_{yy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}$$

由上面的表示式，需要的公式都可以经过简单的计算得到. 例如，从方程(4)和(5)就得到 Gauss 曲率和平均曲率：

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}$$
$$H = \frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_xh_yh_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}}$$

经常要讨论由 $z=h(x, y)$表示的曲面的另一个也许是更重要的理由是，任何曲面在局部都可以表示为一个可微函数的图(参看 2.2，命题 3). 给定曲面 S 上的一点 p，我们总能选取$\mathbb{R}^3$的坐标系使坐标原点就在 p，且 z 轴的方向就是曲面的正法向(所以，xy 平面与 $T_p(S)$一致). 这样，S 在 p 点的邻域就能表示为

$$z = h(x,y), \quad (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

其中，U 是一个开集，h 是一个可微函数(参看 2.2，命题 3)，且 $h(0, 0)=p$，$h_x(0, 0)=0$，$h_y(0, 0)=0$(图 3-19).

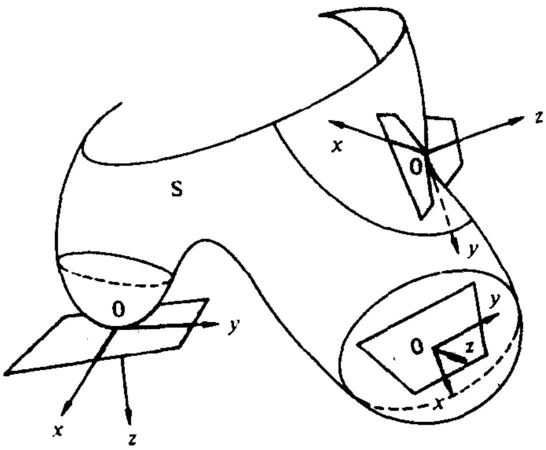


图 3-19 S 的每一点都有邻域使之能表示为 $z=h(x, y)$

在这一情形，S 的第二基本形式在 p 点对向量 $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ 的值为

$$h_{xx}(0,0)x^2+2h_{xy}(0,0)xy+h_{yy}(0,0)y^2$$

在二元初等微积分中，上面的二次型就是熟知的 h 在(0, 0)的 Hesse 函数. 所以，h 在(0, 0)的 Hesse 函数就是 S 在 p 的第二基本形式.

应用上述考虑给 Dupin 标线一个几何解释. 沿用上面的记号，并设 ε 是一个小的正数，使得

$$C=\{(x,y)\in T_p(S);h(x,y)=\varepsilon\}$$

是一条正则曲线(必要时可以改变曲面的定向以使 $\varepsilon>0$). 我们想说明，若 p 不是平点，则曲线 C"近似地"相似于 S 在 p 点的 Dupin 标线(图 3-20).

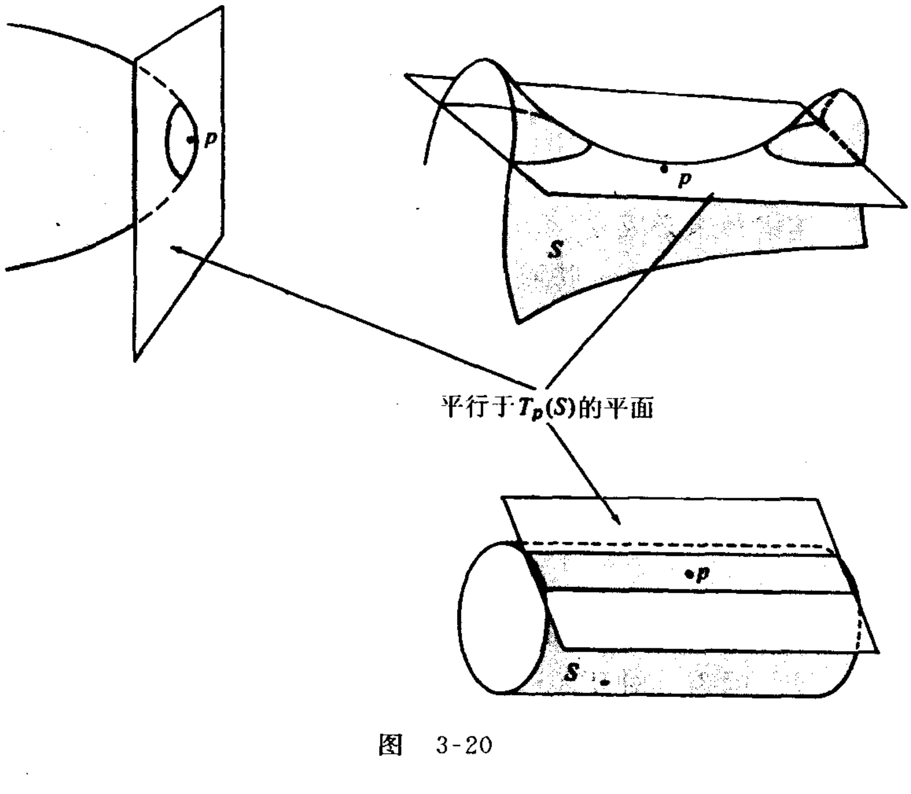


图 3-20

为此，进一步假设 x 轴和 y 轴的方向是主方向，且 x 轴沿最大的主曲率的方向．于是，$f=h_{xy}(0,0)=0$，且

$$k_1(p)=\frac{e}{E}=h_{xx}(0,0)$$

$$k_2(p)=\frac{g}{G}=h_{yy}(0,0)$$

将 $h(x,y)$在$(0,0)$作 Taylor 展开，并考虑到 $h_x(0,0)=0=h_y(0,0)$，得到

$$h(x,y)=\frac{1}{2}(h_{xx}(0,0)x^2+2h_{xy}(0,0)xy+h_{yy}(0,0)y^2)+R$$
$$=\frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2)+R$$

其中

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{R}{x^2+y^2}=0$$

于是，曲线 C 由方程

$$k_1x^2+k_2y^2+2R=2\varepsilon$$

给出．

若 p 不是平点，我们能把曲线

$$k_1x^2+k_2y^2=2\varepsilon$$

看作是 C 的一阶近似，经相似变换

$$x=\bar{x}\sqrt{2\varepsilon},\quad y=\bar{y}\sqrt{2\varepsilon}$$

则 $k_1x^2+k_2y^2=2\varepsilon$ 就变为曲线

$$k_1\bar{x}^2+k_2\bar{y}^2=1$$

这就是在 p 点的 Dupin 标线．可见，若 p 不是平点，则平行于 $T_p(S)$而与 p 充分接近的平面与曲面的交线在一阶近似范围内是一条与 p 点的 Dupin 标线相似的曲线．

若 p 是平点，上述解释未必成立(参看习题 11)．

在这一节的末尾，借助于 Gauss 映照 N：$S\to S^2$，我们将给 Gauss 曲率一个几何解释．实际上，Gauss 本人正是这样引进这个曲率的．

为此，首先给出下面的定义．

设 S 和 $\bar{S}$ 是两个定向的曲面．φ：$S\to\bar{S}$ 是一个可微的映照，并假设对 S 上的某一点 p，$d\varphi_p$ 是非奇异的．φ 称为在 p 点是保持定向的，如果对 $T_p(S)$中给定的一组正基$\{w_1, w_2\}$，$\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$是 $T_{\varphi(p)}(S)$的一组正基．若$\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$不是正基，则 φ 称为在 p 点改变定向．

注意到曲面 S 和单位球面 S^2 都是嵌入于$\mathbb{R}^3$中的，所以，S 的定向 N 诱导 S^2 的定向 N．设 $p\in S$ 使 dN_p 非奇异．因为，对 $T_p(S)$的一组基$\{w_1, w_2\}$

$$dN_p(w_1)\wedge dN_p(w_2)=\det(dN_p)(w_1\wedge w_2)=Kw_1\wedge w_2$$

所以，若 $K(p)>0$，则 Gauss 映照在 p 点保持定向；若 $K(p)<0$，则 Gauss 映照在 p 点改变

定向．其直观意义如下(图 3-21)：$T_p(S)$的一个定向，对 S 上围绕 p 点的小的闭曲线，诱导了一个定向；这些曲线在 N 下的像将与原来的曲线有相同或相反的方向，这分别依赖于 p 点是椭圆点或双曲点．

考虑到这个事实，我们约定，在一块包含在 $K\neq 0$ 的连通邻域 V 的区域上，若 $K>0$，则区域的面积和它的经 N 的像的面积有相同的符号；若 $K<0$，则有相反的符号(因为 V 是连通的，K 在 V 中不改变符号)．

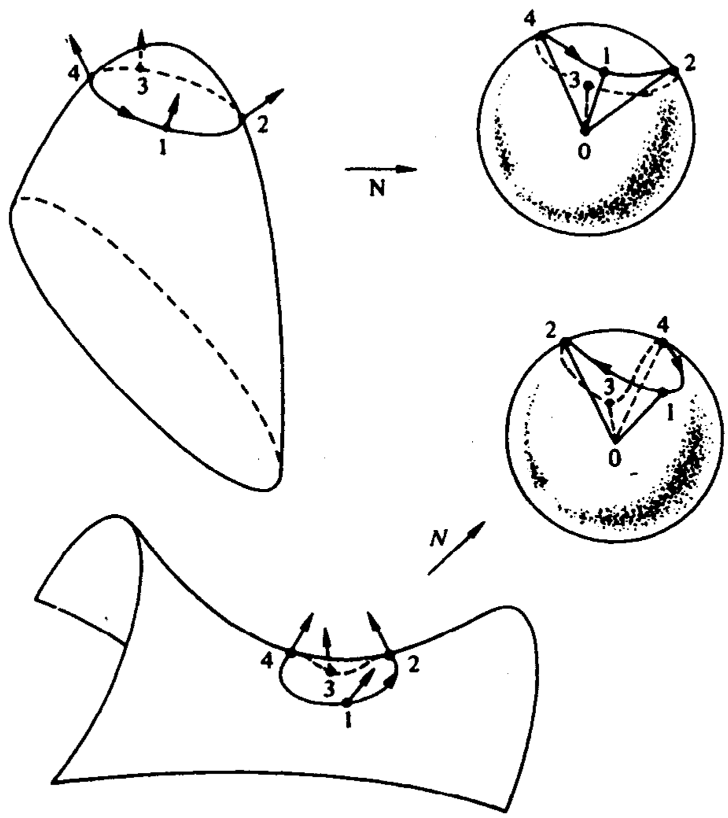


图 3-21　Gauss 映照在椭圆点保持定向和在双曲点改变定向

现在我们对 $K\neq 0$ 的情况说明前面所提到的 Gauss 曲率的几何解释．

命题 2　设 p 是曲面 S 上的一点，且 Gauss 曲率 $K(p)\neq 0$，V 是 p 的一个连通的邻域，且在其中 K 不改变符号．则

$$K(p)=\lim_{A\to 0}\frac{A'}{A}$$

其中 A 是 V 中包含 p 点的一个区域 B 的面积，A'是 B 经 Gauss 映射 N：$S\to S^2$ 的像的面积．极限是对收敛于 p 点的一个区域序列 B_n 取的，其意义是，对包含 p 点的任一个球，所有的 B_n 必包含在这个球内，只要 n 充分大．

证明　B 的面积是(参看 2.5)

$$A=\iint_R |X_u\wedge X_v|\,dudv$$

其中 $X(u,v)$是曲面的一个参数表示，其坐标邻域包含 V(V 可以假设为充分小)，R 是 uv 平

面上对应于 B 的区域，$N(B)$的面积是

$$A' = \iint_R |N_u \wedge N_v| \, dudv$$

利用方程(1)，K 的定义，和上面的约定，可以将 A'表示为

$$A' = \iint_R K \, |X_u \wedge X_v| \, dudv \tag{12}$$

取下面的极限，并仍用 R 表示区域 R 的面积，得到

$$\lim_{A\to 0}\frac{A'}{A} = \lim_{R\to 0}\frac{A'/R}{A/R} = \frac{\lim\limits_{R\to 0}(1/R)\iint_R K \, |X_u \wedge X_v| \, dudv}{\lim\limits_{R\to 0}(1/R)\iint_R |X_u \wedge X_v| \, dudv}$$

$$= \frac{K \, |X_u \wedge X_v|}{|X_u \wedge X_v|} = K$$

(注意，这里已经应用了重积分的中值定理)，这就证明了命题．证毕.

注 将这个命题和平面曲线 C 在 p 点的曲率的表示式

$$k = \lim_{s\to 0}\frac{\sigma}{s}$$

(其中 s 是 C 上包含 p 点的一小段弧长，σ 是它在切线标线中的像的弧长；参看 1.5 的习题 3)作比较，我们看到，曲面的 Gauss 曲率 K 是平面曲线的曲率 k 的类比.

习题

1. 证明：在双曲抛物面 $z=axy$ 上的点(0，0，0)，

$$K = -a^2, \quad H = 0$$

*2. 求螺旋面

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u, \quad z = cu$$

的渐近线和曲率线，并证明其平均曲率为零.

*3. 求悬链面

$$X(u,v) = (\cosh v\cos u, \cosh v\sin u, v)$$

的渐近线.

4. 求曲面 $z=xy$ 的渐近线和曲率线.

5. 考虑参数曲面(Enneper 曲面)

$$x(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right)$$

证明：

a. 第一基本形式的系数是

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0$$

b. 第二基本形式的系数是

$$e = 2, \quad g = -2, \quad f = 0$$

c. 主曲率是

$$k_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}, \quad k_2 = -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

d. 曲率线是坐标曲线.

e. 渐近线是 $u+v=$ 常数和 $u-v=$ 常数.

6.($K\equiv -1$ 的曲面；伪球面)

*a. 决定平面曲线 C 的方程，它的切线在切点和与曲线不相交的某条直线 r 之间的线段的长恒为 1(这样的曲线称为曳物线；见图 1-9).

b. 将曳物线绕直线 r 旋转得到的旋转面称为伪球面(见图 3-22)，在正则点的邻域给曲面一个参数表示.

c. 证明：伪球面上任一正则点的 Gauss 曲率都是 -1.

7.(常曲率的旋转面). 设

$$(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v))$$

是具有常数 Gauss 曲率 K 的旋转面. 为决定函数 φ 和 ψ，设参数 v 使 $(\varphi')^2+(\psi')^2=1$(其几何意义是，v 是母线($\varphi(v)$，$\psi(v)$)的弧长). 证明：

a. φ 满足 $\varphi''+K\varphi=0$,ψ 由 $\psi=\int\sqrt{1-(\varphi')^2}\,dv$ 给出；所以，$0<u<2\pi$，v 的区域使上面的积分有意义.

b. 与 xOy 平面垂直相交、且具常数曲率 $K=1$ 的所有旋转面由下式给出：

$$\varphi(v)=C\cos v, \quad \psi(v)=\int_0^v\sqrt{1-C^2\sin^2 v}\,dv$$

其中 C 是常数($C=\varphi(0)$). 试决定 v 的区域，并分别对 $C=1$、$C>1$ 和 $C<1$ 的情况(见图 3-23)作出曲面的剖面草图. 注意，$C=1$ 给出一球面.

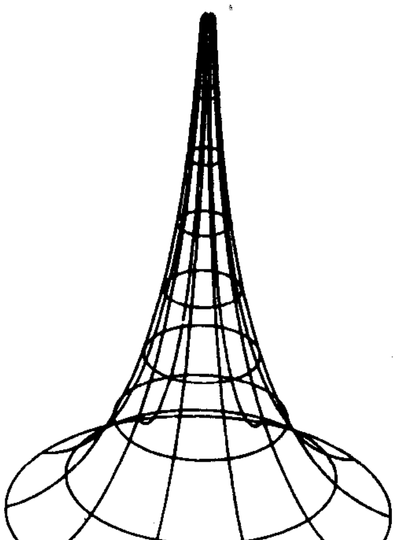


图 3-22 伪球面

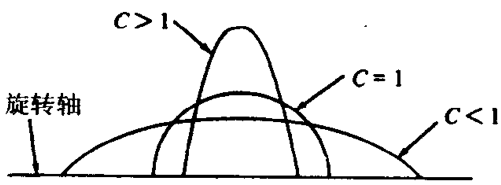


图 3-23

c. 具有常数曲率 $K=-1$ 的所有的旋转面必为下列类型之一：

1) $\varphi(v)=C\cosh v$

$\psi(v)=\int_0^v\sqrt{1-C^2\sinh^2 v}dv$

2) $\varphi(v)=C\sinh v$

$\psi(v)=\int_0^v\sqrt{1-C^2\cosh^2 v}dv$

3) $\varphi(v)=e^v$

$\psi(v)=\int_0^v\sqrt{1-e^{2v}}dv$

决定 v 的区域，并作出曲面在 xz 平面的剖面的草图.

d. 在 C 中类型 3 的曲面是习题 6 的伪球面.

e. $K\equiv 0$ 的旋转面必为正圆柱面，正圆锥面或平面.

8.（曲面的≥2 的阶接触） 设曲面 S 和 $\bar{S}$ 具有公共点 p，若 S 和 $\bar{S}$ 分别有在 p 点附近的参数表示 X 和 $\bar{X}$，使

$$X_u=\bar{X}_u,\quad X_v=\bar{X}_v$$

$$X_{uu}=\bar{X}_{uu},\quad X_{uv}=\bar{X}_{uv},\quad X_{vv}=\bar{X}_{vv}$$

在 p 点成立，则称 S 和 $\bar{S}$ 在 p 点有≥2 阶的接触. 证明：

*a. 设 S 和 $\bar{S}$ 在 p 点有≥2 阶的接触；$X: U\to S$ 和 $\bar{X}: U\to\bar{S}$ 分别是 S 和 $\bar{S}$ 在 p 附近的任一参数表示；$f: V\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中 p 点的邻域 V 上的可微函数. 则 $f\circ\bar{X}: U\to\mathbb{R}$ 的≤2 阶的偏导数在 $\bar{X}^{-1}(p)$ 全为零.

*b. 设 S 和 $\bar{S}$ 在 p 点有≥2 阶的接触，$z=f(x,y)$ 和 $z=\bar{f}(x,y)$ 分别是 S 和 $\bar{S}$ 在 p 点一邻域中的方程，这里 xy 平面是二曲面在点 $p=(0,0)$ 的公切面. 则函数 $f(x,y)-\bar{f}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的≤2 阶的偏导数全为零.

c. 设 p 是曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 上的一点，O_{xyz} 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个笛卡儿坐标系，使 $O=p$ 和 xy 平面是 S 在 p 点的切平面. 证明：由 $z=f(x,y)$ 在 $p=(0,0)$ 的 Taylor 展式中略去三阶和高阶项得到的抛物面

$$z=\frac{1}{2}(x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy})\qquad (*)$$

在 p 点与 S 有≥2 阶的接触（曲面（*）称为 S 在 p 点的密切抛物面）.

*d. 若一抛物面（包括平面和抛物柱面这样退化的情形）和曲面 S 在 p 点有≥2 阶的接触，则此抛物面就是 S 在 p 点的密切抛物面.

e. 若曲面 S 和 $\bar{S}$ 在 p 点有≥2 阶的接触，则它们在 p 点有相同的密切抛物面. 并证明，在 p 点有相等的 Gauss 曲率和平均曲率.

f. 证明：有≥2 阶接触的性质经 $\mathbb{R}^3$ 的微分同胚不变；即，若 S 和 $\bar{S}$ 在 p 点有≥2 阶接触，$\varphi: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是一个微分同胚，则 $\varphi(S)$ 和 $\varphi(\bar{S})$ 在 $\varphi(p)$ 有≥2 阶接触.

g. 若 S 和 $\bar{S}$ 在 p 点有≥2 阶接触，则

$$\lim_{r\to 0}\frac{d}{r^2}=0$$

其中 d 是垂直于 $T_p(S)=T_p(\bar{S})$ 的直线被二曲面所割的线段的长，r 是从 p 到这条直线的距离.

9.（曲线的接触） 定义在 $\mathbb{R}^3$ 中具有公共点 p 的正则曲线在 p 点有 $\geqslant n$（n 是 $\geqslant 1$ 的整数）阶的接触，并证明：

a. $\geqslant n$ 阶接触的性质经微分同胚不变.

b. 两条曲线在 p 点有 $\geqslant 1$ 阶接触的充分必要条件是它们在 p 点相切.

10.（曲线和曲面的接触）设曲线 C 和曲面 S 有公共点 p，如果存在 S 上的过 p 点的曲线 $\bar{C}$，使 C 和 $\bar{C}$ 在 p 点有 $\geqslant n$ 阶接触（n 为 $\geqslant 1$ 的整数），则曲线 C 和曲面 S 称为在 p 点有 $\geqslant n$ 阶接触，证明：

a. 若 $f(x,y,z)=0$ 是 S 在 p 点的邻域的一个表示，$\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是曲线 C 在 p 点附近的一个参数表示，且 $\alpha(0)=p$，则 C 与 S 在 p 点有 $\geqslant n$ 阶切触的充要条件是

$$f(x(0),y(0),z(0))=0,\frac{df}{dt}=0,\cdots,\frac{d^nf}{dt^n}=0$$

这里的导数是指在 $t=0$ 的值.

b. 若一平面与曲线 C 在 p 点有 $\geqslant 2$ 阶的接触，则此平面必为 C 在 p 点的密切平面.

c. 若一球面与曲线 C 在 p 点有 $\geqslant 3$ 阶接触，$\alpha(s)$ 是曲线的一个参数表示，s 为弧长，且 $\alpha(0)=p$，则此球面的中心为

$$\alpha(0)+\frac{1}{k}n+\frac{k'}{k^2\tau}b$$

这样的球面称为曲线 C 在 p 点的密切球面.

11. 考虑例 2 中的猴鞍面. 用 3.2 的定义作出它在 $p=(0,0,0)$ 的 Dupin 标线，并将这个标线与平行于 $T_p(S)$ 且与 p 接近的平面和 S 的交线作比较. 为何它们不是“近似的相似”（参看 3.3 的例 5）？指出在 3.3 例 5 的证明中何处不能成立.

12. 考虑参数曲面

$$X(u,v)=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u+\log\tan\frac{u}{2}+\varphi(u))$$

其中 φ 是一个可微函数. 证明：

a. 曲线 $v=$ 常数包含在通过 z 轴且与曲面交成定角 θ 的平面上，θ 决定于

$$\cos\theta=\frac{\varphi'}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}$$

并说明曲线 $v=$ 常数是曲面的曲率线.

b. 曲线 $v=$ 常数在切点和 z 轴之间的切线段长恒为 1，并说明曲线 $v=$ 常数是曳物线（见习题 6）.

13. 设 F：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是一个相似映照，它定义为

$$F(p)=Cp,\quad p\in\mathbb{R}^3$$

C 为正的常数，$S\subset\mathbb{R}^3$ 是正则曲面，$F(S)=\bar{S}$. 证明 $\bar{S}$ 是正则曲面，并找出 S 的 Gauss 曲率 K 和平均曲率 H 与 $\bar{S}$ 的 Gauss 曲率 $\bar{K}$ 和平均曲率 $\bar{H}$ 之间的关系式.

14. 考虑由曲线

$$y = x^3, \quad -1 < x < 1$$

绕直线 $x=1$ 旋转所得的曲面. 证明：由原点(0, 0)旋转得到的点都是曲面的平点.

*15. 给出曲面的一个例子，它有一个孤立的抛物点 p(即，在 p 点的某一邻域中不包含其他的抛物点).

*16. 证明：在紧致的(即，在$\mathbb{R}^3$中是有界的和闭的)曲面必有一个椭圆点.

17. 对不可定向的曲面定义 Gauss 曲率. 能对不可定向曲面定义平均曲率吗?

18. 证明：图 3-1 的 Möbius 带能用参数表示为

$$X(u,v) = \left(\left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u, \quad \left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u, \quad v\cos\frac{u}{2}\right)$$

其 Gauss 曲率是

$$K = -\frac{1}{\left\{\frac{1}{4}v^2 + (2 - v\sin(u/2))^2\right\}^2}$$

*19. 求单叶双曲面

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

的渐近线.

*20. 决定椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的脐点.

*21. 设 S 是具有定向 N 的曲面. $V\subset S$ 是 S 中的开集，$f: V\subset S\to\mathbb{R}$ 是 V 上的可微函数，且恒不为零. v_1 和 v_2 是 V 上的两个可微的切向量场，使在 V 的每一点 p，v_1 与 v_2 垂直且 $v_1\wedge v_2=N$.

a. 证明：V 的 Gauss 曲率 K 为

$$K = \frac{\langle d(fN)(v_1) \wedge d(fN)(v_2), fN\rangle}{f^3}$$

这个公式的优点在于，由对 f 的巧妙的选择，常常可以简化 K 的计算，见 b.

b. 利用上面的结果证明，若 f 是

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

上的限制，则椭球面的 Gauss 曲率是

$$K = \frac{1}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{1}{f^4}$$

22.(Hesse 函数) 设 h：$S\to\mathbb{R}$ 是 S 上的一个可微函数，$p\in S$ 是 h 的临界点(即 $dh_p=0$). 设 $w\in T_p(S)$，

$$\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$$

是一条参数曲线，且 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=w$. 命

$$H_ph(w)=\left.\frac{d^2(h\circ\alpha)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

a. 设 x：$U\to S$ 是 S 在 p 近旁的一个参数表示，证明(这里，p 为 h 的临界点是实质性的条件)：

$$H_ph(u'x_u+v'x_v)=h_{uu}(p)(u')^2+2h_{uv}(p)u'v'+h_{vv}(p)(v')^2$$

并推断 H_ph：$T_p(S)\to\mathbb{R}$ 是 $T_p(S)$上确有定义的二次形式(即，它不依赖于 α 的选择). H_ph 称为 h 在 p 点的 Hesse 函数.

b. 设 h：$S\to\mathbb{R}$ 是 S 相对于 $T_p(S)$的高度函数；即

$$h(q)=\langle q-p,N(p)\rangle,\quad q\in S$$

验证 p 是 h 的临界点，于是，Hesse 函数 H_ph 有意义. 证明：若 $w\in T_p(S)$，$|w|=1$，则

$$H_ph(w)=\text{曲面在 } p \text{ 点沿 } w \text{ 方向的法曲率.}$$

由此推出，相对于 $T_p(S)$的高度函数在 p 点的 Hesse 函数是 S 在 p 点的第二基本形式.

23.(曲面上的 Morse 函数) 可微函数 h：$S\to\mathbb{R}$ 的临界点 $p\in S$ 称为*非退化的*，如果与二次形式 H_ph(指 h 在 p 的 Hesse 函数，参看习题 22)相对应的自伴随线性映照(参看第 3 章的附录)A_ph 是非奇异的，否则就称为*退化的*. S 上的一个可微函数称为 *Morse 函数*，如果它的所有的临界点都是非退化的. 设 h_r：$S\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是 S 对一点 r 的距离函数，即

$$h_r(q)=\sqrt{\langle q-r,q-r\rangle},\quad q\in S,\quad r\in\mathbb{R}^3,\quad r\notin S$$

a. 证明：点 $p\in S$ 是 h_r 的临界点必须且只须直线 pr 是 S 在 p 点的法线.

b. 设 p 是 h_r：$S\to\mathbb{R}$ 的临界点，$w\in T_p(S)$，$|w|=1$，α：$(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ 是一条以弧长为参数的参数曲线，且 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=w$，证明：

$$H_ph_r(w)=\frac{1}{h_r(p)}-k_n$$

其中 k_n 是在 p 点沿 w 方向的法曲率，并推断若$\{e_1,e_2\}$是 $T_p(S)$的标准正交基，且 e_1 和 e_2 是在 p 点的主方向，则自伴随线性映照 A_ph_r 在这组基中的表示是对角化的；进一步，p 为 h_r 的退化临界点的充要条件是 $h_r(p)=1/k_1$ 或 $h_r(p)=1/k_2$，这里 k_1 和 k_2 是在 p 点的主曲率.

c. 证明：集合

$$B=\{r\in\mathbb{R}^3;h_r\text{ 是 Morse 函数}\}$$

是$\mathbb{R}^3$中的开的和稠密的点集，稠密的意思是：在$\mathbb{R}^3$中给定任一点的每一个邻域都有 B 中的点存在(这就证明了在任一正则曲面上有“许多”Morse 函数).

24*.(局部凸性和曲率) 曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$称为在点 $p\in S$ 是*局部凸的*，如果存在 p 的一个邻域 $V\subset S$，使 V 包含在由 $T_p(S)$决定的$\mathbb{R}^3$的一个闭的半空间之内. 进一步，若 V 与 $T_p(S)$只有一个公共点，则 S 称为在 p 点是*严格局部凸的*.

a. 证明：若 S 在 p 点的主曲率非零且具有相同的符号(即，Gauss 曲率 $K(p)>0$)，则 S 在 p 点是严格局部凸的.

b. 证明：若 S 在 p 点是局部凸的，则在 p 点的主曲率不能有相反的符号(于是，$K(p)\geq 0$).

c. 为说明 $K\geq 0$ 并不保证局部凸性，考虑曲面

$$f(x,y)=x^3(1+y^2)$$

它定义在开集

$$U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y^2<\frac{1}{2}\right\}$$

上. 证明：这个曲面的 Gauss 曲率在 U 上是非负的，但在 $(0,0)\in U$ 不是局部凸的(由 R. Sacksteder 得到的一个深入的定理可以知道，这种例子不能扩充到整个 $\mathbb{R}^2$ 上，如果我们坚持要求曲率保持非负的话；参看 5.6 的注 3).

*d. C 中的例子在下面的局部意义中也是很特殊的. 设 p 是曲面 S 上的一点，并存在 p 的一个邻域 $V\subset S$ 使在 V 上的主曲率不能有相反的符号(这里的情况 c 中的例子不会发生). 证明：S 在 p 点是局部凸的.

3.4 向量场[⊖]

在这一节中，将利用常微分方程的基本定理(存在，唯一，以及对初始条件的依赖性)来证明曲面上某些坐标系的存在性.

如果读者愿意假定在本节末尾的推论 2、3 和 4 的结果(没有读这一节对这些结果也能够理解)，本节中的材料在初读时可以略去.

首先，将对我们打算使用的关于微分方程的材料给予几何表示.

在开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的向量场是一个映照，对每一点 $q\in U$，它都对应一个向量 $w(q)\in\mathbb{R}^2$. 向量场 w 称为可微的，如果对它的坐标表示 $q=(x,y)$，$w(q)=(a(x,y),b(x,y))$，a 和 b 都是 U 中的可微函数.

从几何上看，定义说明，对每一点 $(x,y)\in U$，对应的向量的坐标 $a(x,y)$ 和 $b(x,y)$ 可微地依赖于 (x,y) 变化(图 3-24).

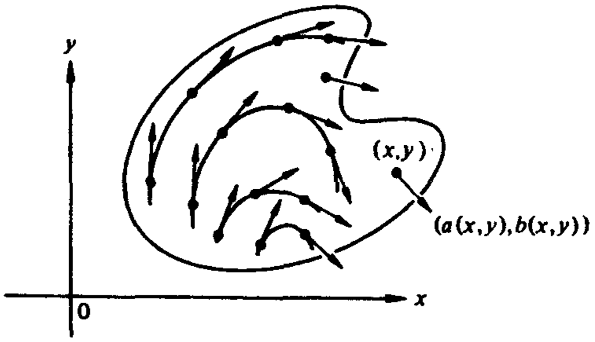


图 3-24

⊖ 初读时这一节可以略去.

以下我们将仅考虑可微的向量场.

在图 3-25 中给出一些向量场的例子.

给定向量场 w，自然要问，是否存在这个向量场的轨线，即，是否存在可微的参数曲线 $\alpha(t)=(x(t),\ y(t))$，$t\in I$，使 $\alpha'(t)=w(\alpha(t))$.

例如，向量场 $w(x,\ y)=(x,\ y)$ 的经过点 $(x_0,\ y_0)$ 的轨线是直线 $\alpha(t)=(x_0e^t,\ y_0e^t)$，$t\in\mathbb{R}$，向量场 $w(x,\ y)=(y,\ -x)$ 的经过点 $(x_0,\ y_0)$ 的轨线是圆 $\beta(t)=(r\sin t,\ r\cos t)$，$t\in\mathbb{R}$，$r^2=x_0^2+y_0^2$.

用常微分方程的语言来说，向量场 w 决定一个常微分方程组，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt}=b(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

w 的轨线就是方程组(1)的解.

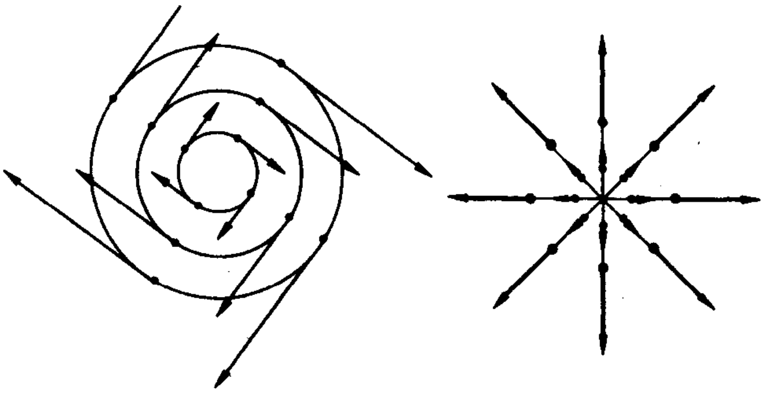


图 3-25

方程组(1)的解的(局部)存在和唯一的基本定理等价于下面的关于轨线的说明(以下，字母 I 和 J 表示直线 $\mathbb{R}$ 中包含原点 $O\in\mathbb{R}$ 的开区间).

定理 1 设 w 是开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的向量场. 给定 $p\in U$，则存在 w 的轨线 α：$I\to U$(即 $\alpha'(t)=w(\alpha(t))$，$t\in I$)，且 $\alpha(0)=p$. 轨线按下述意义是唯一的：w 的任何另一个使 $\beta(0)=p$ 的轨线 β：$J\to U$，必与 α 在 $I\cap J$ 中一致.

(定理 1 的一个重要的补充是，经过 p 点的轨线随 p 点可微地变动. 这一概念能精确地叙述如下.)

定理 2 设 w 是开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的一个向量场，则对每一点 $p\in U$，存在 p 的一个领域 $V\subset U$，区间 I，和映照 α：$V\times I\to U$，使得

1. 对固定的一点 $q\in V$，曲线 $\alpha(q,\ t)$，$t\in I$，是 w 的经过 q 的轨线；即，

$$\alpha(q,0)=q,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial t}(q,t)=w(\alpha(q,t))$$

2. α 是可微的.

定理 2 的几何意义是，在 $t=0$ 经过 p 的某一个邻域 V 的所有的轨线，可"集在一起"构成一个可微的映照. 在这个意义下，我们说轨线可微地依赖于 p(图 3-26).

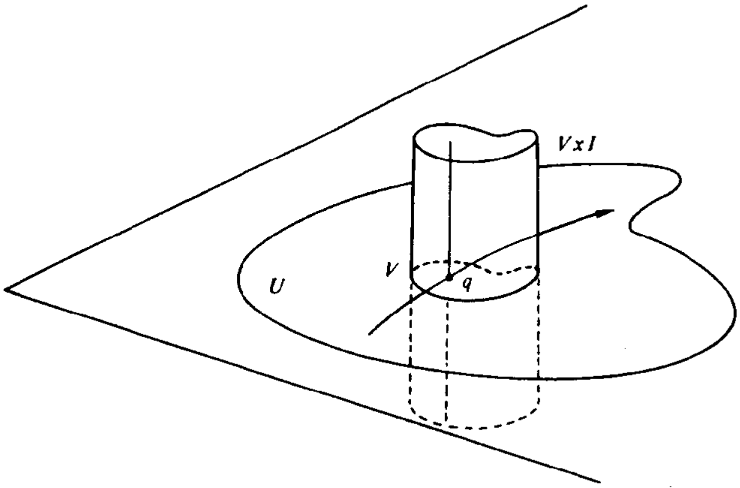


图 3-26

映照 α 称为 w 在 p 点的(局部)流.

在本书中，定理 1 和定理 2 将假定成立，关于证明，可以查阅下面指出的这本书的第 2 章，W. Hurewicz, Lectureson Ordinary Differential Equations, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1958. 为了我们的目的，我们需要这些定理的下面的推论.

引理 设 w 是开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的一个向量场，$p\in U$，且 $w(p)\neq 0$，则存在 p 的一个邻域 $W\subset U$ 和一个可微函数 f: $W\to\mathbb{R}$，使 f 沿 w 的每一轨线为常数，且对所有的 $q\in W$，$df_q\neq 0$.

证明 在$\mathbb{R}^2$中选取笛卡儿坐标系使 $p=(0,\ 0)$，且 $w(p)$的方向就是 x 轴的方向. 设 α: $V\times I\to U$ 是在 p 点的局部流，$V\subset U$，$t\in I$，且 $\tilde{\alpha}$ 是 α 在长方形

$$(V\times I)\cap\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3;x=0\}$$

上的限制(见图 3-27).

由局部流的定义，$d\tilde{\alpha}_p$ 将 t 轴的单位向量映到 w，将 y 轴的单位向量映到自己. 所以，$d\tilde{\alpha}_p$ 是非奇异的. 由此可知，必有 p 点的一个邻域 $W\subset U$，在 W 中 $\tilde{\alpha}^{-1}$是确定的和可微的. $\tilde{\alpha}^{-1}(x,\ y)$在 y 轴上的投影是一个可微函数 $\xi=f(x,\ y)$，它在过$(0,\ \xi)$的轨线上的所有的点有相同的值 ξ. 因为 $d\tilde{\alpha}_p$ 是非奇异的，W 可以取得充分小，使对所有的点 $q\in W$，均有 $df_q\neq 0$. 因此，f 就是所需要的函数. 证毕.

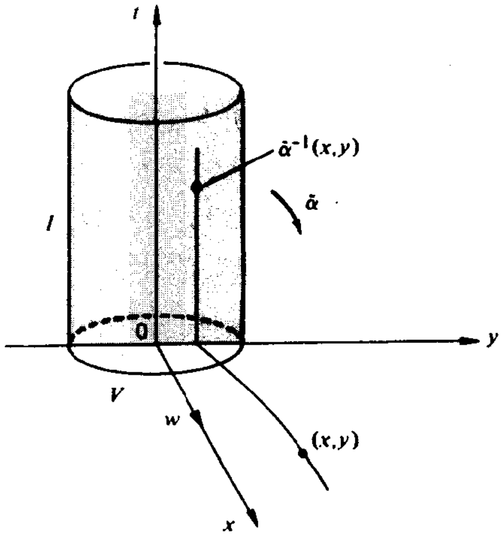


图 3-27

上面的引理中的函数 f 称为 w 在 p 点的邻域中的(局部)初积分. 例如，若 $w(x,\ y)=(y,\ -x)$定义在$\mathbb{R}^2$上，初积分 f: $\mathbb{R}^2-\{(0,\ 0)\}\to\mathbb{R}$ 是 $f(x,\ y)=x^2+y^2$.

与向量场的概念密切相关的是方向场的概念.

在开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的一个方向场 r 是一个对应，对 U 中的每一点 $p\in U$，它都对应$\mathbb{R}^2$中的一条过 p 点的直线 $r(p)$. r 称为在点 $p\in U$ 是可微的，如果存在定义在 p 点的一个邻域 $V\subset U$ 上的一个非零的可微向量场 w，使对每一点 $q\in V$，$w(q)\neq 0$ 且是 $r(q)$ 的一个基；r 称为在 U 中是可微的，如果它对每一点 $p\in U$ 都是可微的.

对 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的每一个非零的可微的向量场 w，由 $r(p)=w(p)$ 所生成的直线，$p\in U$，就对应一个可微的方向场 r.

由定义，每一个可微的方向场在局部都给出一个非零的可微的向量场. 然而，这在整体未必成立. 如果 3-28 所示的曲线的切线给出$\mathbb{R}^2-\{(0, 0)\}$上的一个方向场，但是，为得到一个可微的方向场，无论如何给曲线定向都会得到矛盾.

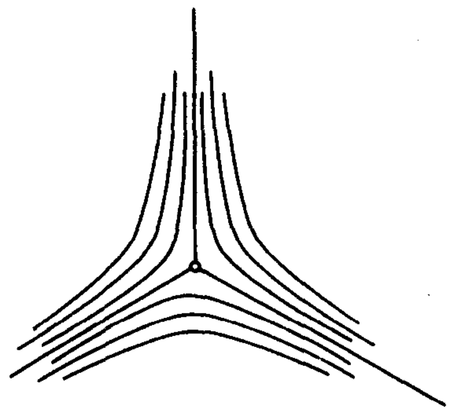


图 3-28　在$\mathbb{R}^2-\{(0, 0)\}$中的不可定向的方向场

一条正则的连通曲线 $C\subset U$ 称为方向场 r 在 $U\subset\mathbb{R}^2$ 中的积分曲线，如果对每一点 $q\in C$，$r(q)$ 都是 C 在 q 的切线.

由前面已经看到的，给定开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的一个可微的方向场 r，对每一点 $q\in U$，都有经过 q 的 r 的积分曲线 C；r 在 U 中决定的向量场过 q 的轨线的轨迹与 C 局部一致. 以下，我们将仅考虑可微的方向场，并且，如无特别声明，凡说到方向场都是指可微的.

现在说明描写方向场的一个自然的方法如下. 在点 $q\in\mathbb{R}^2$ 的两个非零向量 w_1 和 w_2 称为等价的，如果存在非零的实数 λ，使 $w_1=\lambda w_2$. 两个这样的向量表示通过 q 的相同的直线，并且，反之，若两个非零向量属于通过 q 的同一条直线，则它们是等价的. 于是，在开集 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的一个方向场能够这样给出，对每一点 $q\in U$，都指定一对实数 (r_1, r_2)（属于 r 的一个非零向量的坐标），其中，对任意的实数 $\lambda\neq 0$，(r_1, r_2) 和 $(\lambda r_1, \lambda r_2)$ 认为相等.

用微分方程的语言来说，一个方向场 r 通常由方程

$$a(x,y)\frac{dx}{dt}+b(x,y)\frac{dy}{dt}=0 \tag{2}$$

给出. 其意义是，在点 $q=(x, y)$，对应的过 q 的直线包含向量 $(b, -a)$ 或它的任意非零倍（图 3-29）. 向量场 $(b, -a)$ 的轨线的轨迹是 r 的积分曲线. 因为，在上面的考虑中，参数表示并不起作用，所以，常用表示式

$$adx+bdy=0$$

代替方程(2)，它们的意义是一样的.

上面所引进的概念属于$\mathbb{R}^2$的局部性质的范围，它们仅依赖于$\mathbb{R}^2$的"微分结构". 所以，把它们转移到正则曲面并无进一步的困难. 现说明如下.

定义 1　正则曲面 S 的开集 $U\subset S$ 上的一个向量场是一个对应，对 U 中的每一点 $p\in U$，指定一个向量 $w(p)\in T_p(S)$. 向量场 w 称为在 p 点是可微的，如果对 S 在 p 附近的某一个参数表示 $X(u, v)$，向量场表示为

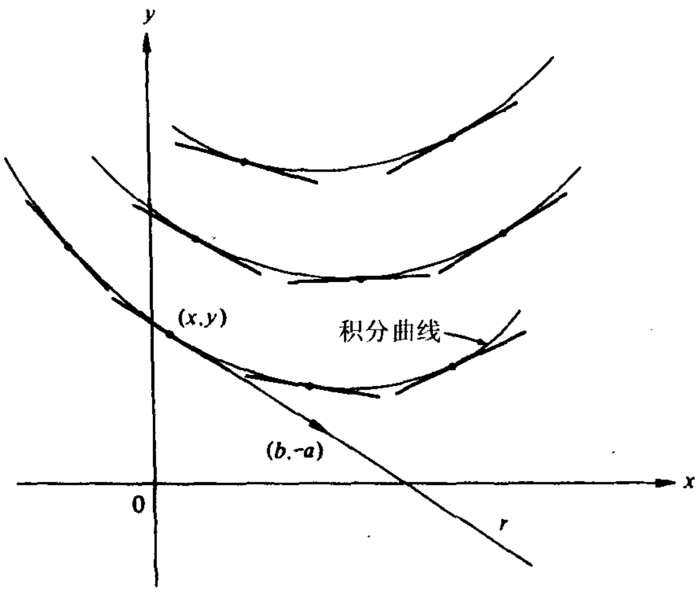


图 3-29　微分方程 $adx+bdy=0$

$$w(p)=a(u,v)X_u+b(u,v)X_v$$

其中 $a(u, v)$和 $b(u, v)$都是可微的．显然，上述定义不依赖于 X 的选取．

类似地，我们能够定义轨线，方向场，和积分曲线等．上面的定理 1，定理 2 和引理都能容易推广到现在的情况，只要把$\mathbb{R}^2$改为 S，叙述都是一样的．

例 1　在通常的环面 T 上，经线取弧长为参数．定义 $w(p)$是过 p 的经线在 p 点的速度向量，这样就得到 T 上的一个向量场(图 3-30)．注意，对所有的 $p\in T$，$|w(p)|=1$．留作习题(习题 2)，证明向量场 w 是可微的．

例 2　在球面 S^2 上，类似的过程应用于 S^2 的半径线，这就得到一个向量场，它在球面上除去北极 N 和南极 S 外有定义．为得到在全球面上的向量场，在所有的半径线上再取相同的参数 t，$-1<t<1$，并定义

$$v(p)=(1-t^2)w(p),p\in S^2-\{N\}\cup\{S\}$$
$$v(N)=v(S)=0$$

则得到定义在 S^2 上的向量场 v(图 3-31)．

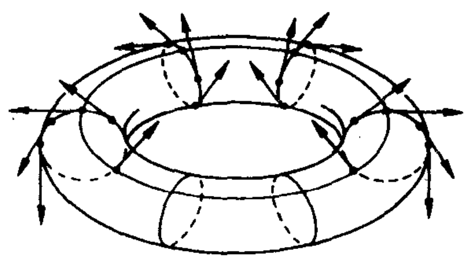


图　3-30

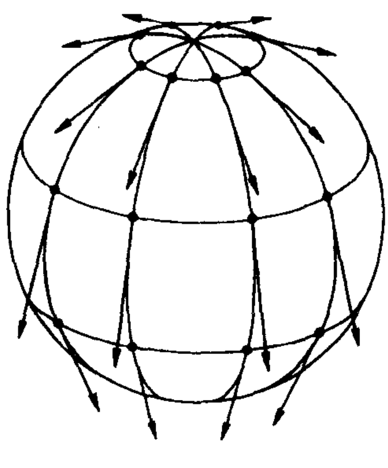


图　3-31

例 3 设 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;z=x^2-y^2\}$是双曲抛物面. S 与平面 $z=$常数$\neq0$ 的交决定一曲线族$\{C_\alpha\}$，使经过 $S-\{(0,0,0)\}$的每一点都有一条曲线 C_α 通过. 这些曲线的切线给出 $S-\{(0,0,0)\}$上可微的方向场 r. 我们要找在 $S-\{(0,0,0)\}$上一个方向场 r'，它在每一点都与 r 垂直，并决定 r'的积分曲线. r'称为 r 的正交场，其积分曲线称为 r 的正交曲线族(参见 2.5 习题 15).

首先给 S 以参数表示

$$X(u,v)=(u,v,u^2-v^2),u=x,v=y$$

曲线族$\{C_\alpha\}$由 $u^2-v^2=$常数$\neq0$ 给出(或更确切地说，由这个集合经 X 的像给出). 若 $u'X_u+v'X_v$ 是某一条曲线 C_α 的正则参数表示的切向量，经对 $u^2-v^2=$常数微分得到

$$2uu'-2vv'=0$$

于是，$(u',v')=(-v,-u)$. 这就给出了 r，在参数表示 X 中，它就是(u,u)或(v,u)的任意非零倍.

现在，设$(a(u,v),b(u,v))$是正交场 r'在参数 X 中的一个表示. 因为

$$E=1+4u^2,F=-4uv,G=1+4v^2$$

且 r'在每一点与 r 正交，故有

$$Eav+F(bv+au)+Gbu=0$$

或

$$(1+4u^2)av-4uv(bv+au)+(1+4v^2)bu=0$$

这就得到

$$va+ub=0 \tag{3}$$

这就在每一点决定了(a,b)(允许差一个非零倍数)，因此，得到了正交场 r'.

现求 r'的积分曲线，设 $u'X_u+v'X_v$ 是 r'的积分曲线的某个正则参数表示的切向量，则(u',v')满足方程(3)；即，

$$vu'+uv'=0$$

或

$$uv=常数$$

这就得到了，$\{C_\alpha\}$的正交曲线族是由曲面 S 和双曲柱面 $xy=$常数$\neq0$ 的交给出的.

这一节的主要结果是下面的定理.

定理 设 w_1 和 w_2 是曲面 S 的开集 U 上的两个向量场，它们在 U 中的某一点 p 是线性独立的. 则存在 p 点的邻域 $V\subset U$ 的参数表示，使对每一点 $q\in V$，这个参数表示过 q 的坐标曲线与 $w_1(q)$和 $w_2(q)$所决定的直线相切.

证明 设 W 是 p 的一个邻域，在其中 f_1 和 f_2 分别是 w_1 和 w_2 的初积分. 由

$$\varphi(q)=(f_1(q),f_2(q)),\quad q\in W$$

定义一个映照

$$\varphi:W\to\mathbb{R}^2$$

因为，f_1 在 w_1 的轨线上是常数，且$(df_1)\neq0$，故在 p 点有

$$d\varphi_p(w_1) = ((df_1)_p(w_1),(df_2)_p(w_1)) = (0,a)$$

其中 $a=(df_2)_p(w_1)\neq 0$，这是因为 w_1 和 w_2 是独立的. 类似地，

$$d\varphi_p(w_2) = (b,0)$$

其中 $b=(df_1)_p(w_2)\neq 0$.

这就说明 $d\varphi_p$ 是非奇异的，因此，φ 是局部微分同胚. 所以，存在 $\varphi(p)$ 的邻域 $\bar{U}\subset\mathbb{R}^2$，由 $X=\varphi^{-1}$ 将它映到 p 的一个邻域 $V=X(\bar{U})$ 上；即，X 是 S 在 p 附近的一个参数表示，它的坐标曲线

$$f_1(q) = \text{常数}, f_2(q) = \text{常数}$$

在 q 点分别与 $w_1(q)$，$w_2(q)$ 所决定的直线相切. 证毕.

应注意，定理并不保证能有曲面的参数表示，使坐标曲线的速度向量为 $w_1(q)$ 和 $w_2(q)$. 将定理的结果应用到作为正则曲线(点集)的坐标曲线；较确切地说，我们有

推论 1 给定在开集 $U\subset S$ 上的两个方向场 r 和 r'，使在 $p\in U$，$r(p)\neq r'(p)$，则存在 p 点邻域中的一个参数表示 X，使 X 的坐标曲线就是 r 和 r' 的积分曲线.

上面的定理的第一个应用是，在正则曲面的任一点附近正交参数表示存在性的证明.

推论 2 对所有的 $p\in S$，都存在 p 点的一个邻域 V 中的参数表示 $X(u, v)$，使坐标曲线 $u=$常数和 $v=$常数在每一点 $q\in V$ 都是正交的(这样的 X 称为正交参数表示).

证明 考虑在 p 附近的任一参数表示 $\bar{X}$：$\bar{U}\to S$，并定义在 $\bar{X}(\bar{U})$ 中的两个向量场：$w_1=\bar{X}_{\bar{u}}$，$w_2=-(\bar{F}/\bar{E})\bar{X}_{\bar{u}}+\bar{X}_{\bar{v}}$，其中 $\bar{E}$，$\bar{F}$，$\bar{G}$ 是在 $\bar{X}$ 中的第一基本形式的系数. 因为 $w_1(q)$ 和 $w_2(q)$ 在每一点 $q\in\bar{X}(\bar{U})$ 都是正交的，应用上面的定理就得到需要的参数表示. 证毕.

定理的第二个应用(较确切地说是推论 1 的应用)是，由渐近方向和主方向给出的坐标的存在性.

在 3.3 中已经看到，渐近线是方程

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$$

的解. 在双曲点 p 的附近，$eg-f^2<0$，上面的方程的左端可以分解为两个不同的线性因子

$$(Au' + Bv')(Au' + Dv') = 0 \tag{4}$$

其中系数由下式决定

$$A^2 = e,\quad A(B+D) = 2f,\quad BD = g$$

因为 $eg-f^2<0$，上列方程组有实解. 于是，方程(4)给出两个方程：

$$Au' + Bv' = 0 \tag{4a}$$

$$Au' + Dv' = 0 \tag{4b}$$

每一个方程决定一个可微的方向场(例如，方程(4a)决定方向 r，它包含非零向量$(B, -A)$)，并且，在上述邻域中的每一点，由(4a)和(4b)决定的方向是不同的. 应用推论 1，在 p 点的一邻域可以选取参数使坐标曲线就是方程(4a)和(4b)的积分曲线.

推论 3 设 $p\in S$ 是 S 的双曲点，则能在 p 的邻域中给出一个参数表示，使坐标曲线就是 S 的渐近线.

例 4 考虑双曲抛物面 $z=x^2-y^2$，这几乎是一个平凡的例子，不过我们可以用它来解释

使用上面所说的方法的过程. 通常我们将整个曲面用参数表示为

$$X(u,v)=(u,v,u^2-v^2)$$

简单的计算表明,

$$e=\frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{1/2}},\quad f=0,\quad g=-\frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{1/2}}$$

于是, 渐近曲线的微分方程为

$$\frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{1/2}}((u')^2-(v')^2)=0$$

它能分解为两个线性方程, 并给出两个方向场:

$$r_1:u'+v'=0,\quad r_2:u'-v'=0$$

这两个方向场的积分曲线是下列两族曲线:

$$r_1:u+v=\text{常数},\quad r_2:u-v=\text{常数}$$

显然, 函数 $f_1(u, v)=u+v$, $f_2(u, v)=u-v$ 分别是对应于 r_1 和 r_2 的初积分. 于是, 令

$$\bar{u}=u+v,\quad \bar{v}=u-v$$

这就得到在整个曲面 $z=x^2-y^2$ 上的新的参数表示, 其坐标曲线就是曲面的渐近线.

在这个特殊的情形, 参数变换在整个曲面上成立. 一般地, 即使整个曲面上的点都是双曲点, 这变换在整体未必是 1 对 1 的.

类似地, 在 S 的非脐点的邻域, 曲率线的微分方程能分解为两个不同的线性因子. 经类似的讨论就能得到

推论 4 设 p 是 S 的非脐点. 则存在 p 的邻域中的参数表示, 使在这个参数表示中的坐标曲线是 S 的曲率线.

习题

1. 证明: 向量场的可微性不依赖于坐标系的选择.

2. 证明: 在环面上的所有的经线取弧长作参数时, 它们的切向量(例 1)所成的向量场是可微的.

3. 证明: 定义在正则曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$上的一个向量场 w 是可微的, 必须且只须映照 w: $S\to\mathbb{R}^3$是可微的.

4. 设 S 是一曲面, X: $U\to S$ 是 S 的参数表示, $a(u, v)$和 $b(u, v)$是可微函数, 则

$$a(u,v)u'+b(u,v)v'=0$$

决定了 $X(U)$上的一个方向场 r, 它在每一点 $X(u, v)$, 对应一条包含向量 bX_u-aX_v 的直线. 证明: 在 $X(U)$上存在 r 的正交场 r'(参看例 3)的充分必要条件是

$$Eb-Fa,Fb-Ga$$

在处处不同时为零(这里 E、F 和 G 是曲面在 X 中的第一基本形式的系数), 且 r'由下式决定

$$(Eb-Fa)u'+(Fb-Ga)v'=0$$

5. 设 S 是一张曲面, X: $U\to S$ 是它的一个参数表示. 如果 $ac-b^2<0$, 证明

$$a(u,v)(u')^2 + 2b(u,v)u'v' + c(u,v)(v')^2 = 0$$

能被分解为二个不同的方程，其中的每一个都定义了 $X(U) \subset S$ 上的一个方向场. 再证明这两个方向场正交的充要条件是

$$Ec - 2Fb + Ga = 0$$

6. 直线 r 是一条运动的直线，运动时与 z 轴相交并保持定角 α，且 r 上的每一点画出一条围绕 z 轴间距为 $c \neq 0$ 的螺旋线，r 所画出的图形是参数曲面

$$X(u,v) = (v\sin\alpha\cos u, v\sin\alpha\sin u, v\cos\alpha + cu)$$

的轨迹(见图 3-32). 容易看出，X 是正则的参数曲面(参看 2.5，习题 13). 把参数(u, v)限制在一个开集 U 上，使 $X(U)=S$ 是一个正则曲面(参看 2.3，命题 2).

a. 求坐标曲线族 $u=$常数的正交曲线族(参看例 3).

b. 利用曲线族 $u=$常数和它们的正交曲线族得到 S 的一个正交参数表示. 证明：在这个新参数($\bar{u}$, $\bar{v}$)中，第一基本形式的系数是

$$\bar{G} = 1, \bar{F} = 0, \bar{E} = \{c^2 + (\bar{v} - c\bar{u}\cos\alpha)^2\}\sin^2\alpha$$

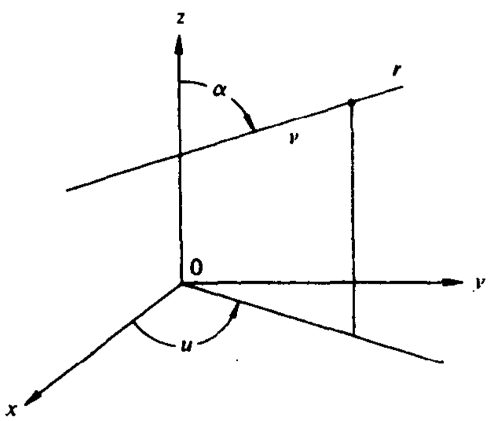


图 3-32

7. 定义可微函数 $f: U \subset S \to \mathbb{R}$ 对 U 中的一个向量场 w 的方向导数 $w(f)(q)$ 为

$$w(f)(q) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\bigg|_{t=0}, \quad q \in U$$

其中 $\alpha: I \to S$ 是一条曲线，且 $\alpha(0)=q$，$\alpha'(0)=w(q)$. 证明：

a. w 在 U 中是可微的充要条件是对 U 中所有的可微函数 f，$w(f)$都是可微的.

b. 设 λ 和 μ 是实数，$g: U \subset S \to \mathbb{R}$ 是 U 上的可微函数；则

$$w(\lambda f + \mu g) = \lambda w(f) + \mu w(f)$$
$$w(fg) = w(f)g + fw(g)$$

8. 证明：若 w 是曲面 S 上的一个可微的向量场，且对某一点 $p \in S$，$w(p) \neq 0$，则必存在 p 点邻域中的一个参数表示 $X(u, v)$，使 $X_u = w$.

9. a. 设 V 和 W 是分别赋予内积 $\langle,\rangle$ 和 $(,)$ 的二维向量空间，$A: V \to W$ 是非异的线性映照. A 称为相似，如果存在实数 $\lambda \neq 0$ 使 $(Av_1, Av_2) = \lambda\langle v_1, v_2\rangle$ 对所有的 v_1，$v_2 \in V$ 成立. 证明：若 A 不是相似，则存在 V 中唯一的一对标准正交向量 e_1 和 e_2，使 Ae_1 和 Ae_2 在 W 中是正

交的.

b. 利用 a 去证明 Tissot 定理：设 φ：$U\subset S_1\to S_2$ 是从曲面 S_1 上 p 点的邻域 U 到曲面 S_2 的微分同胚，$d\varphi$ 在每一点都不是相似. 则必有 S_1 上 p 点邻域中的一个正交的参数表示 X_1：$U\to S_1$，使 $\varphi\circ X_1=X_2$：$U\to S_2$ 也是 S_2 上点 $\varphi(p)\in S_2$ 的邻域中的一个正交参数表示.

10. 设 T 是 2.2 例 6 中的环面，由

$$\varphi(u,v)=((r\cos u+a)\cos v,(r\cos u+a)\sin v,r\sin u)$$

定义一个映照

$$\varphi:\mathbb{R}^2\to T$$

这里 u 和 v 是 $\mathbb{R}^2$ 的笛卡儿坐标. 设 $u=at$，$v=bt$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中过(0，0)的一条直线，并考虑 T 中的曲线 $\alpha(t)=\varphi(at,\ bt)$. 证明：

a. φ 是局部微分同胚.

b. $\alpha(t)$ 是一条正则曲线；$\alpha(t)$ 是闭曲线的充要条件是 b/a 是有理数.

*c. 若 b/a 是无理数，则曲线在 T 中稠密；即，在任一点 $p\in T$ 的每一个邻域中都有 $\alpha(t)$ 的点.

*11. 利用在 $U\subset S$ 上的向量场 w 轨线的局部唯一性去证明下面的结果. 给定 $p\in U$，存在 w 的唯一的轨线 α：$I\to U$，使 $\alpha(0)=p$，且它的下述意义是极大的：任何另一轨线 β：$J\to U$(亦有 $\beta(0)=p$)必是 α 在 J 上的限制(即，$J\subset I$，且 $\alpha\mid J=\beta$).

*12. 证明：若 w 是紧致曲面 S 上的可微向量场，$\alpha(t)$ 是 w 的极大的轨线，且 $\alpha(0)=p$，则 $\alpha(t)$ 对所有的 $t\in\mathbb{R}$ 有定义.

13. 构造在平面的开圆盘(它不是紧致的)上的可微向量场，使它的极大的轨线不能对所有的 $t\in\mathbb{R}$ 定义(这说明习题 12 中的紧致条件是实质性的).

3.5 直纹面和极小曲面[⊖]

在微分几何中，人们发现有相当多的特殊情形(如旋转曲面，平行曲面，直纹面，极小曲面等)，它们或者本身是非常有趣的(如极小曲面)，或者可以作为体现在几何中运用微分方法的威力与局限性的漂亮的例子. 按照这本书的精神，到目前为止我们已经在例题和习题中处理了这些特殊情形.

然而，进一步详细介绍这些专题中的某一些可能是有用的. 现在我们试图这样去做. 在这一节中我们将展开直纹面的理论和给出极小曲面理论的初步介绍. 在整个这一节中将自然地使用在 2.3 中定义的参数曲面的概念.

如果读者需要，整个这一节或其中任一专题均可略去. 除了 B 节中的例 6 可供 A 节参考外，这两个专题是相互独立的，并且，它们的结果在本书的其他部分也没有作实质性的使用.

A. 直纹面

一个(可微的)单参数(直)线族 $\{\alpha(t),\ w(t)\}$ 是一个对应，每一个 $t\in I$，都对应一点 $\alpha(t)\in\mathbb{R}^3$ 和一个向量 $w(t)\in\mathbb{R}^3$，$w(t)\neq 0$，使 $\alpha(t)$ 和 $w(t)$ 连续地依赖于 t，对每一个 $t\in I$，通过

⊖ 初读时可以把这一节略去.

$\alpha(t)$平行于 $w(t)$的直线 L_t 称为直线族在 t 的直线.

给定一个单参数直线族$\{\alpha(t), w(t)\}$，参数曲面

$$X(t,v)=\alpha(t)+vw(t),\quad t\in I, v\in\mathbb{R}$$

称为由族$\{\alpha(t), w(t)\}$生成的直纹面. 直线 L_t 称为母线，曲线 $\alpha(t)$称为曲面 X 的准线. 有时候，直纹面的表示式意味着 x 的轨迹. 应注意，我们也允许 X 有奇点，就是使 $x_t\wedge x_v=0$ 的点(t, v).

例 1 直纹面的最简单的例子是正则曲线的切线面(参看 2.3，例 4)，柱面和锥面. 柱面是由单参数直线族$\{\alpha(t), w(t)\}(t\in I)$生成的直纹面，其中 $\alpha(I)$包含在平面 P 中，$w(t)$与$\mathbb{R}^3$的一个固定方向平行(图 3-33(a)). 锥面是由族$\{\alpha(t), w(t)\}(t\in I)$生成的直纹面，其中 $\alpha(I)\subset P$，且所有的母线都经过一点 $p\notin P$(图 3-33(b)).

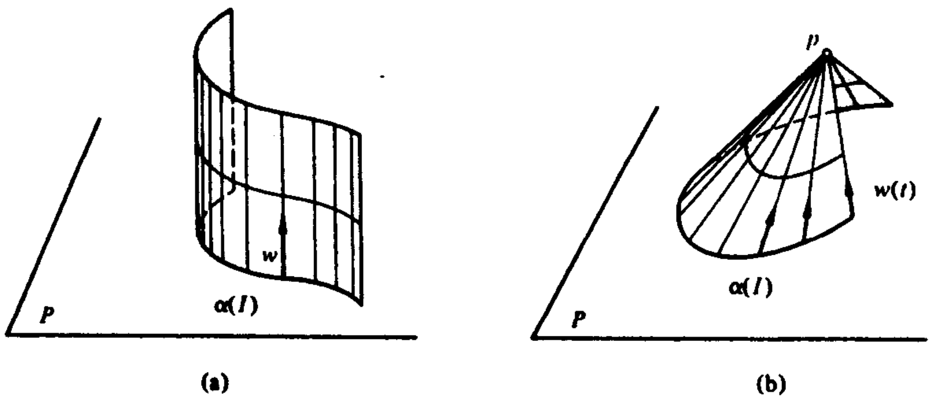


图 3-33

例 2 设 S'是 xy 平面上的单位圆周 $x^2+y^2=1$，$\alpha(s)$是 S'的参数表示，s 是它的弧长. 对每一个 s，命 $w(s)=\alpha'(s)+e_3$，其中 e_3 是 z 轴的单位向量(图 3-34)则

$$X(s,v)=\alpha(s)+v(\alpha'(s)+e_3)$$

是直纹面. 若将 x 写成为

$$X(s,v)=(\cos s-v\sin s,\sin s+v\cos s,v)$$

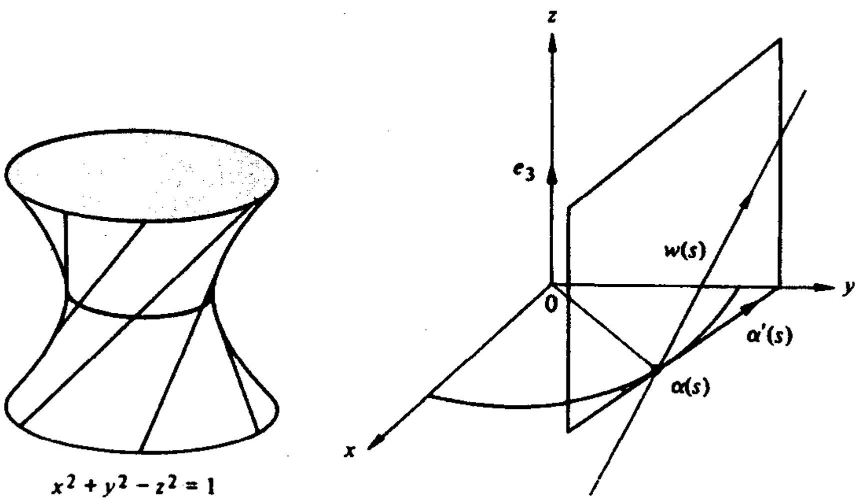


图 3-34 $x^2+y^2-z^2=1$ 作为直纹面

并注意到 $x^2+y^2-z^2=1+v^2-v^2=1$，这就得到了我们较熟悉的形式．这就表明，X 的轨迹是旋转双曲面．

有意思的是，若取 $w(s)=-\alpha'(s)+e_3$，我们得到相同的曲面，这表明旋转双曲面有两族直母线．

我们这样定义的直纹面允许出现奇点．如果我们想要包括切线面和锥面的话，这是必要的．我们即将证明，至少是对满足某些适当条件的直纹面，其奇点(如有的话)将集中在曲面的一条曲线上．

现在开始讨论一般的直纹面．我们不妨假设 $|w(t)|=1$，$t\in I$．为能展开这一理论，我们还要假设一个非平凡性的条件，即对所有的 $t\in I$，$w'(t)\neq 0$，若 $w'(t)$ 的零点是孤立的，则能将曲面分成块使这理论能应用到它们中的每一块．但是，若 $w'(t)$ 的零点有聚点，则情况就变得比较复杂，这里我们将不予处理．

假设 $w'(t)\neq 0$，$t\in I$，通常说成直纹面 X 不是柱面．

如无特别声明，我们总假设直纹面

$$X(t,v)=\alpha(t)+vw(t) \tag{1}$$

不是柱面，且 $|w(t)|=1$，$t\in I$．注意，假定 $|w(t)|\equiv 1$ 就保证了 $\langle w(t), w'(t)\rangle=0$ 对所有的 $t\in I$ 成立．

首先，我们要找一条参数曲线 $\beta(t)$，使 $\langle\beta'(t), w'(t)\rangle=0$，$t\in I$，且 $\beta(t)$ 在 X 的轨迹上；即，

$$\beta(t)=\alpha(t)+u(t)w(t) \tag{2}$$

其中 $u=u(t)$ 是某一实值函数．假设这样的曲线 β 存在，则由

$$\beta'=\alpha'+u'w+uw'$$

和 $\langle w, w'\rangle=0$ 得到

$$0=\langle\beta',w'\rangle=\langle\alpha',w'\rangle+u\langle w',w'\rangle$$

这就得到，$u=u(t)$ 由

$$u=-\frac{\langle\alpha',w'\rangle}{\langle w',w'\rangle} \tag{3}$$

给定．于是，由方程(2)和(3)所确定的曲线 $\beta(t)$ 就是所需要的曲线．

现在将证明曲线 β 不依赖于直纹面的准线 α 的选取．β 称为直纹面的腰曲线，它上面的点称为直纹面的中心点．

为证明前面的断言，设 $\bar{\alpha}$ 是直纹面的另一条准线；即，对所有的 (t, v)，

$$X(t,v)=\alpha(t)+vw(t)=\bar{\alpha}(t)+sw(t) \tag{4}$$

对某一函数 $s=s(t)$ 成立．于是，由方程(2)和(3)得到

$$\beta-\bar{\beta}=(\alpha-\bar{\alpha})+\frac{\langle\bar{\alpha}'-\alpha',w'\rangle}{\langle w',w'\rangle}w$$

其中 $\bar{\beta}$ 是对应于 $\bar{\alpha}$ 的腰曲线．另一方面，由方程(4)得到

$$\alpha-\bar{\alpha}=(s-v)w(t)$$

又因为 $\langle w, w'\rangle=0$，所以，

$$\beta-\bar{\beta}=\left\{(s-v)+\frac{\langle (v-s)w',w'\rangle}{\langle w',w'\rangle}\right\}w=0$$

这就证明了我们的断言.

现取腰曲线作为直纹面的准线，则直纹面可以表示为

$$X(t,u)=\beta(t)+uw(t) \tag{5}$$

由此得到

$$X_t=\beta'+uw',\quad X_u=w$$

和

$$X_t\wedge X_u=\beta'\wedge w+uw'\wedge w$$

又由$\langle w',w\rangle=0$和$\langle w',\beta'\rangle=0$，得到

$$\beta'\wedge w=\lambda w'$$

其中λ是t的某一函数$\lambda=\lambda(t)$. 所以，

$$|X_t\wedge X_u|^2=|\lambda w'+uw'\wedge w|^2=\lambda^2|w'|^2+u^2|w'|^2$$
$$=(\lambda^2+u^2)|w'|^2$$

这就说明，直纹面(5)仅有的奇点必在腰曲线$u=0$上，并且，腰曲线上的点是奇点必须且只须$\lambda(t)=0$. 而

$$\lambda=\frac{(\beta',w,w')}{|w'|^2}$$

其中(β',w,w')是$\langle\beta'\wedge w,w'\rangle$的简写.

现在计算曲面(5)在它的正则点处的 Gauss 曲率. 因为，

$$X_{tt}=\beta''+uw'',\quad X_{tu}=w',\quad X_{uu}=0$$

其第二基本形式的系数为

$$g=0,\quad f=\frac{(X_t,X_u,X_{tu})}{|X_t\wedge X_u|}=\frac{(\beta',w,w')}{|X_t\wedge X_u|^2}$$

因此(因为$g=0$，计算K并不需要e的值)，

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=-\frac{\lambda^2|w'|^4}{(\lambda^2+u^2)|w'|^4}=-\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+u^2)^2} \tag{6}$$

这就表明，在正则点，直纹面的 Gauss 曲率$K\leqslant 0$，并且，$K=0$的点仅在那些与腰曲线相交于奇点的母线上.

方程(6)允许我们给直纹面的(正则的)中心点以几何解释. 事实上，一条母线上的点，也许除中心点外，都是曲面的正则点. 若$\lambda\neq 0$，函数$|K(u)|$是母线上的连续函数，并且，由方程(6)，腰点的特征是$|K(u)|$在那里取极大值.

关于腰曲线的另一个几何解释见习题 4.

注意，在一条直母线上关于中心点对称的点处曲率K有相同的值(这正是“中心”的含意).

函数$\lambda(t)$称为x的分布参数. 因为腰曲线不依赖于准线的选取，故λ也不依赖于准线的选取. 若X是正则的，则λ有下列解释. 曲面在(t,u)的法向量是

$$N(t,u)=\frac{X_t\wedge X_u}{|X_t\wedge X_u|}=\frac{\lambda w'+uw'\wedge w}{\sqrt{\lambda^2+u^2}\,|w'|}$$

另一方面($\lambda \neq 0$),

$$N(t,0) = \frac{w'}{|w'|}$$

因此，若 θ 是 $N(t, u)$ 和 $N(t, 0)$ 所成的角，则

$$\tan\theta = \frac{u}{\lambda} \tag{7}$$

所以，若 θ 是母线上一点的法向量与这条母线上腰点的法向量所成的角，则 $\tan\theta$ 与这两点之间的距离成比例，且比例系数是分布参数的倒数.

例 3 设 S 是双曲抛物面

$$z = kxy, \quad k \neq 0$$

因为，直线 $y=z/tk$，$x=t$，对每一个 $t\neq 0$ 都在 S 上，所以，S 是直纹面. 这个直线族与平面 $z=0$ 的交是曲线

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0$$

取这条曲线为准线，向量 $w(t)$ 平行于直线 $y=z/tk$，$x=t$，得到

$$\alpha(t) = (t,0,0), \quad w(t) = \left(0, \frac{1}{k}, t\right)$$

这就给出直纹面(图 3-35)

$$X(t,v) = \alpha(t) + vw(t) = \left(t, \frac{v}{k}, vt\right), \quad t \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

其轨迹显然与 S 一致.

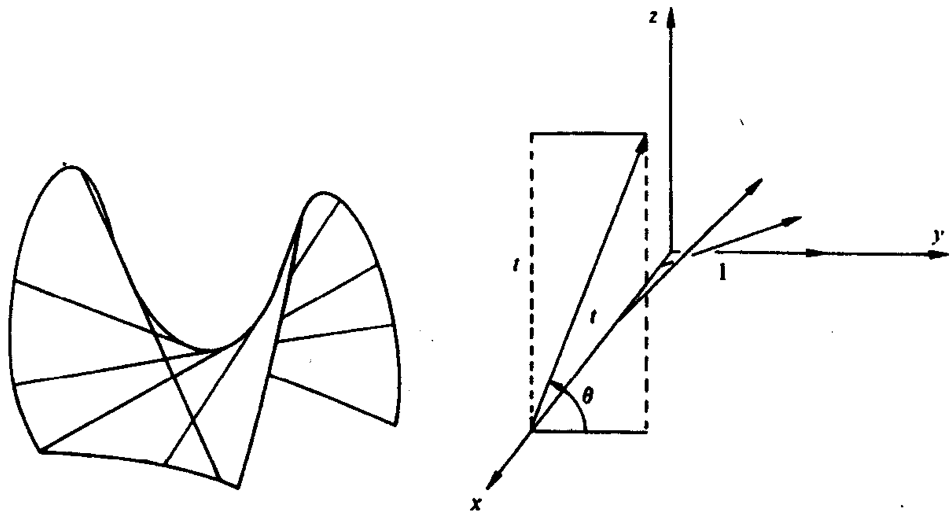


图 3-35 $z=xy$ 作为直纹面

因为 $\alpha'(t)=(1, 0, 0)$，故腰曲线就是 α 本身. 分布参数是

$$\lambda = \frac{1+k^2t^2}{k^2}$$

注意，$w(t)$ 与 $w(0)$ 所成的角 θ 的正切为 $\tan\theta = tk$.

上述注意引导出直纹面的一个有趣的一般性质. 考虑正则直纹面上沿一直母线的法向量

族，它生成另一个直纹面. 由方程(7)和上述注意，这个生成的直纹面恰好是双曲抛物面 $x=kyz$，其中 $1/k$ 是选定母线的分布参数的值.

在直纹面之中，可展曲面是特别重要的. 现在再从任意的直纹面(不必要假设非柱面)

$$X(t,v) = \alpha(t) + vw(t) \tag{8}$$

开始讨论，它是由直线族$\{\alpha(t), w(t)\}$($|w(t)|=1$)生成的. 曲面(8)称为可展的，如果

$$(w,w',\alpha') \equiv 0 \tag{9}$$

为给出条件(9)的几何解释，现计算可展曲面在正则点的 Gauss 曲率. 由得到方程(6)时的类似的计算过程，得到

$$g = 0, \quad f = \frac{(w,w',\alpha')}{|X_t \wedge X_v|^2}$$

由条件(9)，$f\equiv 0$；因此，

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \equiv 0$$

这就说明，在正则点，可展曲面的 Gauss 曲率恒为零.

对可展曲面的另一种几何解释，见习题 6.

现在来区别可展曲面的两种情况，它们并未穷竭所有可能情形.

1. $w(t)\wedge w'(t)\equiv 0$. 这就蕴涵 $w'(t)\equiv 0$. 所以，$w(t)$是常向量，直纹面是柱面，它可以看作是此柱面与法向为 $w(t)$的平面的交线上的柱面.

2. 对所有的 $t\in I$，$w(t)\wedge w'(t)\neq 0$. 这时对一切 $t\in I$ 就有 $w'(t)\neq 0$. 所以，曲面不是柱面，我们可以应用前面的讨论. 我们能决定它的腰曲线(2)，并验证其分布参数

$$\lambda = \frac{(\beta',w,w')}{|w'|^2} \equiv 0 \tag{10}$$

因此，腰曲线是可展曲面的奇点的轨迹. 若对所有的 $t\in I$，$\beta'(t)\neq 0$，则从方程(10)和$\langle\beta', w'\rangle\equiv 0$ 得到 w 与β'平行. 于是，直纹面是β的切线面. 若对所有的$t\in I$，$\beta'(t)=0$，则腰曲线为一点，直纹面是以这一点为顶点的锥面.

当然，上述两种情况并不是所有可能的情形. 通常若所涉及的函数的零点包含聚点，分析起来就复杂得多. 总之，除去这些聚点，可展曲面一定是一些柱面、锥面和切线面片段的联合.

正如我们已经看到的，在正则点，可展曲面的 Gauss 曲率恒为零. 在 5.8 中，我们将证明反过来的一个整体性质，那就是，若一正则曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$作为$\mathbb{R}^3$的子集是闭的，且其 Gauss 曲率恒为零，则必为柱面.

例 4(沿曲面上一条曲线的切平面族的包络) 设 S 是正则曲面，$\alpha=\alpha(s)$是 S 上的一条参数曲线，参数 s 是弧长，且 α 的每一点都不切于渐近方向. 考虑直纹面

$$X(s,v) = \alpha(s) + v\frac{N(s)\wedge N'(s)}{|N'(s)|} \tag{11}$$

其中 $N(s)$是 S 的限制在 $\alpha(s)$上的单位法向量(因为 $\alpha'(s)$都不是渐近方向，故对所有的 s，$N'(s)\neq 0$). 我们将证明，X 是可展曲面，它在 $v=0$ 的邻域是正则的，且沿 $v=0$ 与 S 相切.

但是，在这之前，我们先给曲面 X 以几何解释.

考虑曲面 S 沿曲线 $\alpha(s)$ 的切平面族 $\{T_{\alpha(s)}(S)\}$. 若 Δs 充分小，则族中的两张平面 $T_{\alpha(s)}(S)$ 和 $T_{\alpha(s+\Delta s)}(S)$ 相交于一直线，它平行于向量

$$\frac{N(s)\wedge N(s+\Delta s)}{\Delta s}$$

若让 Δs 趋于零，则直线的极限位置平行于向量

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{N(s)\wedge N(s+\Delta s)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}N(s)\wedge\frac{(N(s+\Delta s)-N(s))}{\Delta s}$$
$$=N(s)\wedge N'(s)$$

其直观意义是，X 的母线是族 $\{T_{\alpha(s)}(S)\}$ 中邻近平面交线的极限位置，X 称为曲面 S 沿曲线 $\alpha(s)$ 的切平面族的包络(图 3-36).

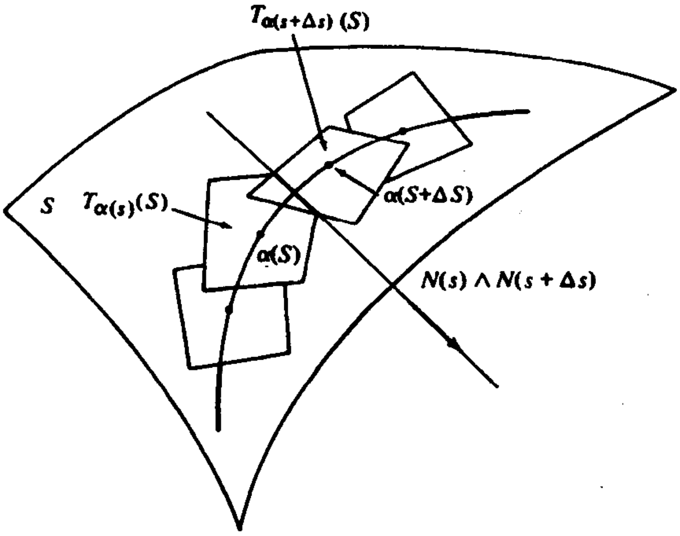


图 3-36

例如，若 α 是球面 S^2 的纬圆的参数表示，则 S^2 的沿 α 的切平面族的包络或为柱面，如果 α 是赤道；或为锥面，如果 α 不是赤道(图 3-37).

为证明 X 是可展曲面，只要验证条件(9)对 X 成立. 事实上，经直接计算就得到

$$\left\langle\frac{N\wedge N'}{|N'|}\wedge\left(\frac{N\wedge N'}{|N'|}\right)',\alpha'\right\rangle=\left\langle\frac{N\wedge N'}{|N'|}\wedge\frac{(N\wedge N')'}{|N'|},\alpha'\right\rangle$$
$$=\frac{1}{|N'|^2}\langle\langle N\wedge N',N''\rangle N,\alpha'\rangle$$
$$=0$$

这就证明了我们的断言.

现在证明，在 $v=0$ 的邻域中 X 是正则的，且沿 α 与 S 相切. 事实上，在 $v=0$，我们有

$$X_s\wedge X_v=\alpha'\wedge\frac{(N\wedge N')}{|N'|}=\langle N',\alpha'\rangle\frac{N}{|N'|}$$
$$=-\langle N,\alpha''\rangle\frac{N}{|N'|}=-\frac{(k_nN)}{|N'|}$$

其中 $k_n=k_n(s)$是 α 的法曲率. 因为 $k_n(s)$处处不为零，这就表明 X 在 $v=0$ 邻域是正则的，且 X 在 $x(s, 0)$的单位法向量与 $N(s)$一致. 所以，X 沿 $v=0$ 与 S 相切，这就完成了我们的证明.

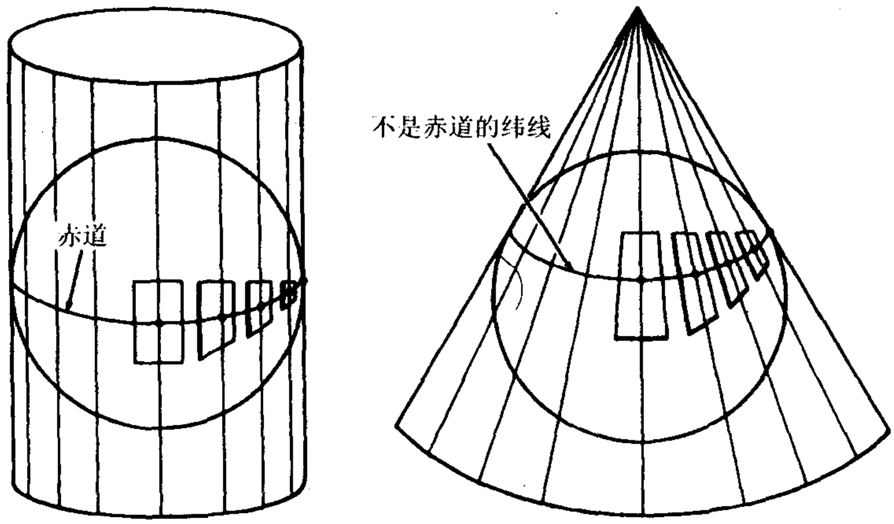


图 3-37 球面沿纬圆的切平面族的包络

现在总结我们的结论如下. 设 $\alpha(s)$是曲面 S 上的一条参数曲线，s 为弧长，且 $\alpha(s)$在每一点的切向都不是渐近方向. 则 S 沿 α 的切平面族的包络是可展曲面，它在 $\alpha(s)$的邻域中是正则的，且沿 $\alpha(s)$与 S 相切.

B. 极小曲面

一张正则的参数曲面称为*极小的*，如果它的平均曲率恒为零. 一张正则曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$称为极小的，如果它的每一个参数表示都是极小的.

为解释极小这个词的含意，需要引进变分的概念. 设 X: $U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$是正则的参数曲面. 选一个有界区域 $D\subset U$(参看 2.5)和一个可微函数 h: $\bar{D}\to\mathbb{R}$，这里 $\bar{D}$ 是区域 D 和 D 的边界 ∂D 的并. $X(D)$的由 h 决定的*法向变分*是下面给出的映照(图 3-38)

$$\varphi:\bar{D}\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^3$$
$$\varphi(u,v,t)=X(u,v)+th(u,v)N(u,v)$$
$$(u,v)\in\bar{D},t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

对每一个固定的 $t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$，映照 X^t: $D\to\mathbb{R}^3$，

$$X^t(u,v)=\varphi(u,v,t)$$

是一个参数曲面，且

$$\frac{\partial X^t}{\partial u}=X_u+thN_u+th_uN$$

$$\frac{\partial X^t}{\partial v}=X_v+thN_v+th_vN$$

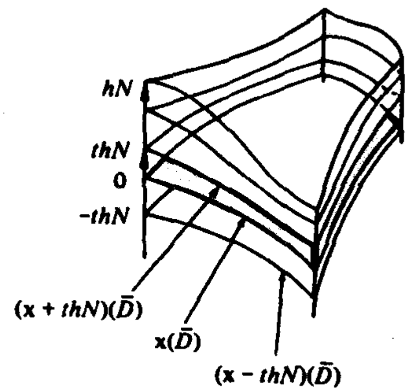


图 3-38 $X(D)$的法向变分

于是，若用 E^t, F^t, G^t 表示 X^t 的第一基本形式的系数，则有

$$E' = E + th(\langle X_u, N_u\rangle + \langle X_u, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u\rangle + t^2h_uh_u$$
$$F' = F + th(\langle X_u, N_v\rangle + \langle X_v, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v$$
$$G' = G + th(\langle X_v, N_v\rangle + \langle X_v, N_v\rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v\rangle + t^2h_vh_v$$

由

$$\langle X_u, N_u\rangle = -e, \langle X_u, N_v\rangle + \langle X_v, N_u\rangle = -2f$$
$$\langle X_v, N_v\rangle = -g$$

和平均曲率 H 为(见 3.3，方程(5))

$$H = \frac{1}{2}\frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2}$$

得到

$$E'G' - (F')^2 = EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R$$
$$= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R$$

其中$\lim\limits_{t\to 0}(R/t) = 0$.

这就说明，若 ε 充分小，X^t 是正则的参数曲面. 此外，$X^t(\bar{D})$的面积 $A(t)$是

$$A(t) = \int_{\bar{D}} \sqrt{E'G' - (F')^2}\,dudv$$
$$= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}}\,\sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

其中 $\bar{R} = R/(EG - F^2)$. 可见，若 ε 充分小，A 是可微函数，且它在 $t=0$ 的导数为

$$A'(0) = -\int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2}\,dudv \tag{12}$$

现在来说明对平均曲率恒为零的曲面使用极小这个名词是恰当的.

命题 1 设 X：$U\to\mathbb{R}^3$是正则的参数曲面，$D\subset U$ 是 U 中的有界区域. 则 X 为极小的充要条件是对所有这样的 D 和 $X(\bar{D})$的所有的法向变分成立 $A'(0)=0$.

证明 若 X 是极小的，即 $H\equiv 0$，条件显然满足. 反之，若条件满足但 $H(q)\neq 0$，q 是 D 中的某一点. 选 h：$\bar{D}\to\mathbb{R}$ 使 $h(q)=H(q)$，而 h 在 q 的一个小邻域外恒为零. 则对由这个 h 决定的变分，$A'(0)<0$，这就得到矛盾. 证毕.

所以，极小曲面 X 的任一有界区域 $X(\bar{D})$对 $X(\bar{D})$的任意法向变分的面积函数是一个临界点. 应注意，临界点未必是极小值点，因此，极小这个词看来未必十分合适. 不过，这个术语已经使用了一个较长的时间，它是由 Lagrange 于 1760 年首先定义的.

极小曲面常常联系于按如下方法得到的肥皂薄膜，将用金属丝做成的框子浸到肥皂水中后再小心地取出来. 假如试验做得好，就能得到以这个框子为边界的肥皂薄膜. 由物理学上的考虑，在它的正则点平均曲率为零. 用这种方法我们能“造出”许多漂亮的极小曲面，图 3-39 就是这样一个曲面.

注 1 应该指出，按照我们的定义，并非所有的肥皂膜都是极小曲面. 我们已假定极小曲面是正则的(可以假定有一些孤立奇点，但是，若要更进一步处理起来就超出了初等的范围). 然而，我们能构造沿一些线都是奇点的肥皂膜. 例如，用立方体形的框子形成的肥皂膜(图 3-40).

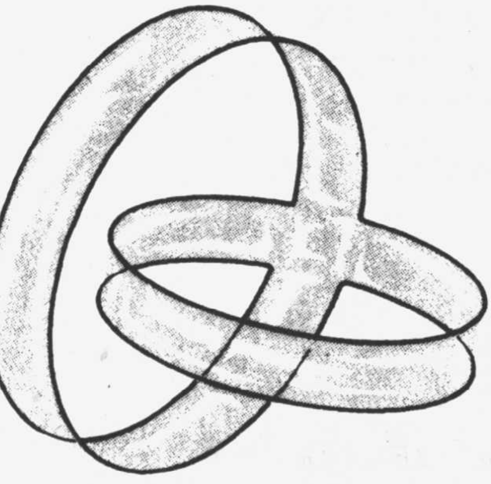


图 3-39

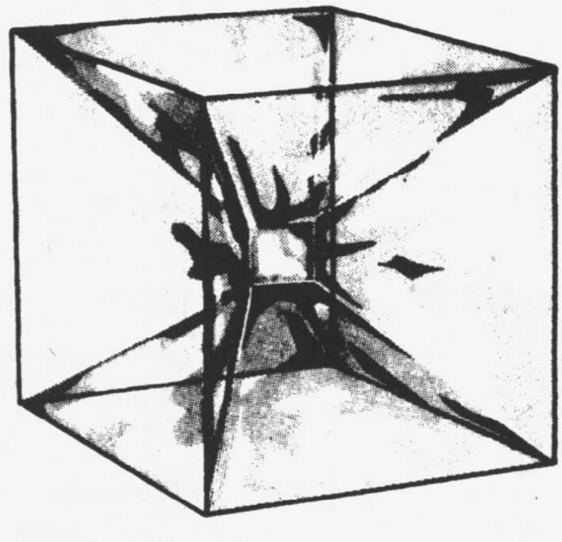


图 3-40

注 2 极小曲面和肥皂膜的联系曾促使了著名的 Plateau 问题的提出(Plateau 是比利时物理学家，他在 1850 年左右曾仔细地做过肥皂膜试验). 这个问题可以粗略地描述如下：对 $\mathbb{R}^3$中的每一条闭曲线 C，证明必存在以 C 为边界的有极小面积的曲面 S. 把问题精确化(允许什么样的曲线和曲面，以及 C 是 S 的边界的含意是什么等)，其本身就是这问题不平凡的一部分. Plateau 问题的一种提法是由 Douglas 和 Radó 在 1930 年同时解决的. 进一步的各种提法(和对高维的种种推广)已经引起数学的一些实质性的进展. 为了解 Plateau 问题的进一步的详细情况和近代文献，有兴趣的读者可以参看 Lawson[20] 的第 2 章(参考文献在本书的末尾).

对任意的参数曲面，由 $\mathscr{H}=HN$ 自然地可以定义平均曲率向量. $\mathscr{H}$ 的方向的几何意义可以从方程(12)得到. 事实上，若选 $h=H$，对这一特殊的变分，有

$$A'(0)=-2\int_{\bar{D}}\langle\mathscr{H},\mathscr{H}\rangle\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv<0$$

这就说明，若沿 $\mathscr{H}$ 的方向变形 $X(\bar{D})$，则面积最初是减少的.

下面给平均曲率向量另一个几何解释，因为它对极小曲面理论有重要的应用.

正则参数曲面 $X=X(u,v)$ 称为是等温的，如果$\langle X_u, X_u\rangle=\langle X_v, X_v\rangle$和$\langle X_u, X_v\rangle=0$.

命题 2 设 $X=X(u,v)$是正则的参数曲面，且 x 是等温的，则

$$X_{uu}+X_{vv}=2\lambda^2\mathscr{H}$$

其中 $\lambda^2=\langle X_u, X_u\rangle=\langle X_v, X_v\rangle$.

证明 因为 X 是等温的，所以，$\langle X_u, X_u\rangle=\langle X_v, X_v\rangle$和$\langle X_u, X_v\rangle=0$，经微分就得到

$$\langle X_{uu},X_u\rangle=\langle X_{vu},X_v\rangle=-\langle X_u,X_{vv}\rangle$$

所以，

$$\langle X_{uu}+X_{vv},X_u\rangle=0$$

类似地，

$$\langle X_{uu}+X_{vv},X_v\rangle=0$$

这就说明，$X_{uu}+X_{vv}$平行于N. 因为X是等温的.

$$H=\frac{1}{2}\frac{g+e}{\lambda^2}$$

所以，

$$2\lambda^2 H=g+e=\langle N,X_{uu}+X_{vv}\rangle$$

因此，

$$X_{uu}+X_{vv}=2\lambda^2\mathscr{H}$$

证毕.

可微函数f：$U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$的 Laplace 算子$\Delta f$定义为

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\quad (u,v)\in U$$

f称为在U中是调和的. 如果$\Delta f=0$. 由命题 2 得到

推论 设$X(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$是参数曲面，且$X$是等温的. 则$X$为极小的充要条件是坐标函数$x$，$y$，$z$是调和的.

例 5(悬链面) 它由下面的参数表示给出

$$X(u,v)=(a\cosh v\cos u,a\cosh v\sin u,av),\quad 0<u<2\pi,-\infty<v<\infty$$

这是由悬链线$y=a\cosh(z/a)$绕z轴旋转得到的曲面(图 3-41). 容易验证，$E=G=a^2\cosh^2 v$，$F=0$，以及$X_{uu}+X_{vv}=0$. 所以，悬链面是极小曲面. 事实上，它是仅有的极小旋转面.

最后的结论可以证明如下. 求曲线$y=f(x)$，使当它绕x轴旋转时，得到极小曲面. 因为，旋转曲面的纬线和经线都是曲面的曲率线(3.3，例 4)，曲线$y=f(x)$的曲率必为由点$f(x)$生成的圆的法曲率的相反值(二者都是主曲率). 而$y=f(x)$的曲率是

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

以及圆的法曲率是它的曲率($=1/y$)在曲面的法向量N上的投影(见图 3-42)，这就得到

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}=-\frac{1}{y}\cos\varphi$$

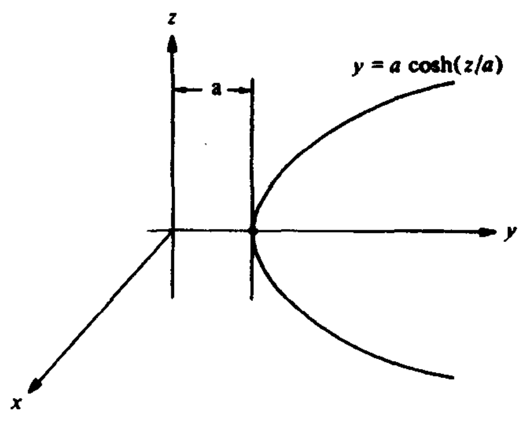


图 3-41

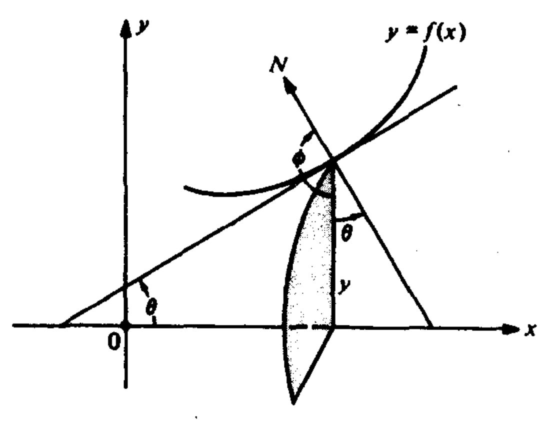


图 3-42

但 $-\cos\varphi=\cos\theta$(见图 3-42)，以及由 $\tan\theta=y'$，我们得到

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\frac{1}{y}\frac{1}{(1+(y')^2)^{1/2}}$$

这就是曲线 $y=f(x)$ 应满足的方程.

显然，必有点 x 使 $f'(x)\neq 0$. 我们仅在使 $f'\neq 0$ 的点的邻域讨论. 在上述方程的两边同乘以 $2y'$，得到

$$\frac{2y'y''}{1+(y')^2}=\frac{2y'}{y}$$

命 $1+(y')^2=z$(因此，$2y'y''=z'$)，于是，

$$\frac{z'}{z}=\frac{2y'}{y}$$

经积分就得到

$$\log z=\log y^2+\log k^2=\log(yk)^2$$

(k 是常数)或

$$1+(y')^2=z=(yk)^2$$

最后一式能写作

$$\frac{kdy}{\sqrt{(yk)^2-1}}=kdx$$

再积分就得到

$$\cosh^{-1}(yk)=kx+c$$

(c 是常数)或

$$y=\frac{1}{k}\cosh(kx+c)$$

所以，在 $f'\neq 0$ 的一点的邻域中，曲线 $y=f(x)$ 是悬链线，但 y' 仅在 $x=0$ 处才能为零，若曲面是连通的，由连续性可知，曲面必为悬链面，这就是我们的结论.

例 6(正螺面) (参看 2.5，例 3)

$$x(u,v)=(a\sinh v\cos u,a\sinh v\sin u,au)$$

容易验证，$E=G=a^2\cosh^2 v$，$F=0$，以及 $X_{uu}+X_{vv}=0$. 所以，正螺面是极小曲面. 除平面外，它是直纹面中仅有的极小曲面.

若假定极小曲面的 Gauss 曲率为零的点是孤立的，我们能对上述结论给出一个证明(关于这假定的证明，可以参看在本节末尾所引的 Osserman 著的极小曲面概观，76 页)，现进行如下.

设此曲面不是平面. 则在曲面的某一邻域 W 中 Gauss 曲率 K 是严格负的. 因为平均曲率为零，W 被两族正交的渐近线所覆盖. 又因为母线是渐近线以及曲面不是平面，我们能选取一点 $q\in W$，使经过 q 的不是母线的渐近线在 q 点有非零挠率. 因为渐近线的密切平面是曲面的切平面，故有邻域 $V\subset W$，使 V 的母线是挠渐近线族的主法线(图 3-43). 这是关于曲线的

一个有趣的练习，证明这种情况在且仅在这些挠曲线是圆柱螺线时才会发生(参看 1.5，习题 18). 所以，V 是螺旋面的一部分. 因为圆柱螺线的挠率是常数，容易看出，正如结论中所说的，整个曲面是正螺面的一部分.

正螺面和悬链面是由 Meusnier 在 1776 年发现的，他还证明了 Lagrange 的把极小曲面作为变分问题的临界点的定义与平均曲率为零的定义是等价的. 在一个相当长的时期内，这些是人们仅知的极小曲面的例子. 直到 1835 年，Scherk 才发现了进一步的一些例子，例 8 中所说的曲面是其中之一. 在习题 14 中，我们将讨论正螺面和悬链面之间的一个有趣的联系.

例 7(Enneper 极小曲面)　Enneper 曲面是参数曲面

$$X(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2, v-\frac{v^3}{3}+vu^2, u^2-v^2\right),$$

$$(u,v)\in\mathbb{R}^2$$

容易看出，它是极小的(图 3-44). 注意，若将(u, v)变为$(-v, u)$，则在曲面上，(x, y, z)变为$(-y, x, -z)$. 所以，若绕 z 轴正转 $\pi/2$，再关于 xy 平面作一对称，曲面保持不变.

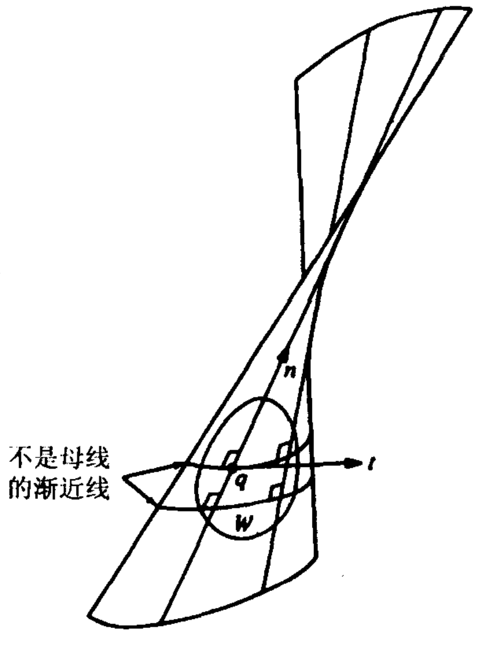


图　3-43

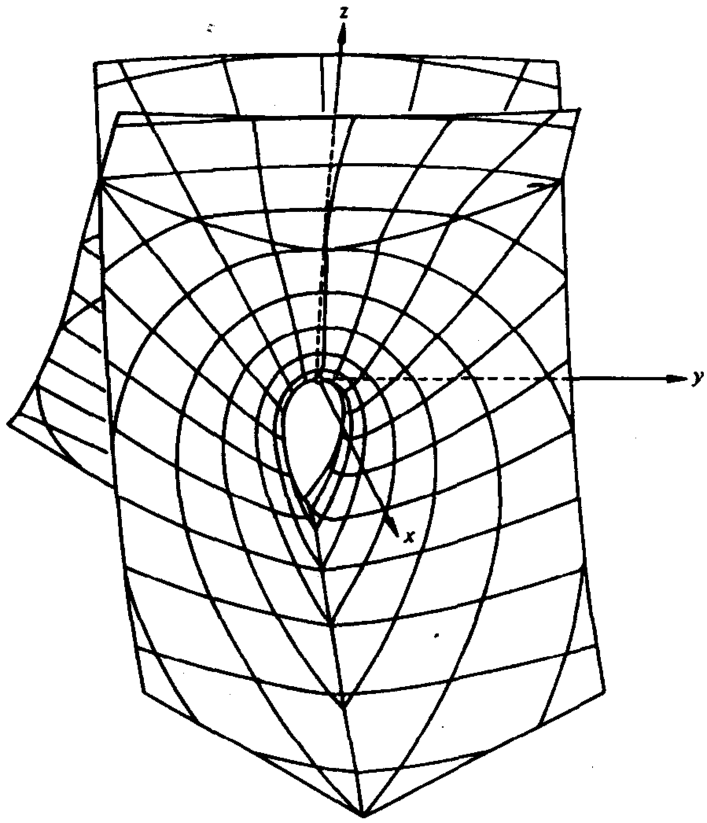


图 3-44　Enneper 曲面. (经同意，由 K. Leichtweiss，"Minimalflächen im Grossen,"Überblicke Math. 2(1969)，7～49，图 4 修改复制).

Enneper 曲面的一个有趣的特点是它的自交性. 这可以说明如下. 命 $u=\rho\cos\theta$, $v=\rho\sin\theta$, 并将 X 写作

$$X(\rho,\theta)=\left(\rho\cos\theta-\frac{\rho^3}{3}\cos3\theta,\rho\sin\theta+\frac{\rho^3}{3}\sin3\theta,\rho^2\cos2\theta\right)$$

于是, 若 $X(\rho_1, \theta_1)=X(\rho_2, \theta_2)$, 直接计算表明,

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=\rho_1^2+\frac{\rho_1^6}{9}-\cos4\theta\frac{2\rho_1^4}{3}\\&=\left(\rho_1+\frac{\rho_1^3}{3}\right)^2-\frac{4}{3}(\rho_1^2\cos2\theta_1)^2\\&=\left(\rho_2+\frac{\rho_2^2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}(\rho_2^2\cos2\theta_2)^2\end{aligned}$$

因此, 由 $\rho_1^2\cos^22\theta_1=\rho_2^2\cos^22\theta_2$, 得到

$$\rho_1+\frac{\rho_1^3}{3}=\rho_2+\frac{\rho_2^3}{3}$$

这就保证 $\rho_1=\rho_2$. 并由此得到 $\cos2\theta_1=\cos2\theta_2$.

例如, 若 $\rho_1=\rho_2$ 和 $\theta_1=2\pi-\theta_2$, 则由

$$y(\rho_1,\theta_1)=y(\rho_2,\theta_2)$$

得到 $y=-y$, 因此, $y=0$; 即, 点(ρ_1, θ_1)和点(ρ_2, θ_2)同属于曲线 $\sin\theta+(\rho^2/3)\sin3\theta=0$. 显然, 对属于这条曲线的每一点$(\rho, \theta)$, 点$(\rho, 2\pi-\theta)$也属于这条曲线, 且

$$x(\rho,\theta)=x(\rho,2\pi-\theta),z(\rho,\theta)=z(\rho,2\pi-\theta)$$

所以, 沿曲面与平面 $y=0$ 的交线曲面自交.

类似地可以证明, 沿曲面与平面 $x=0$ 的交线曲面也是自交的(这对应于 $\rho_1=\rho_2$, $\theta_1=\pi-\theta_2$ 的情形). 容易看出, 以上是 Enneper 曲面仅有的自交情况.

感谢 Alcides Lins Neto 为画出图 3-44 的第一个草图设计了这个例子.

进入下一个例子之前, 在极小曲面和复变量的解析函数之间将建立一个有用的关系. 用$\mathbb{C}$表示复平面, 通常命 $\zeta=u+iv$, $\zeta\in\mathbb{C}$, $(u, v)\in\mathbb{R}^2$, 这样, $\mathbb{C}$ 就与$\mathbb{R}^2$等同起来, 回忆一下, 函数 f: $U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 称为**解析的**, 如果将 f 表示为

$$f(\zeta)=f_1(u,v)+if_2(u,v)$$

实函数 f_1 和 f_2 有连续的一阶偏导数, 且满足下面的 Cauchy-Riemann 方程:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}=\frac{\partial f_2}{\partial v},\quad\frac{\partial f_1}{\partial v}=-\frac{\partial f_2}{\partial u}$$

现设 X: $U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$是正则的参数曲面, 并定义复函数 φ_1, φ_2, φ_3 如下:

$$\varphi_1(\zeta)=\frac{\partial x}{\partial u}-i\frac{\partial x}{\partial v},\quad\varphi_2(\zeta)=\frac{\partial y}{\partial u}-i\frac{\partial y}{\partial v},\quad\varphi_3(\zeta)=\frac{\partial z}{\partial u}-i\frac{\partial z}{\partial v}$$

其中 x, y 和 z 是 X 的分量函数.

引理 当且仅当 $\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2\equiv0$ 时, X 是等温的. 若上条件满足, 当且仅当 φ_1, φ_2 和 φ_3 是解析函数时, X 是极小的.

证明 经简单的计算得到,

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2=E-G+2iF$$

这就证明了引理的第一部分．此外，$x_{uu}+x_{vv}=0$ 的充要条件是

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)=-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)=-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

这就给出对 φ_1，φ_2，φ_3 的 Cauchy-Riemann 方程的一半，而另一半是自动满足的，这就证明了 $X_{uu}+X_{vv}=0$ 必须且只须 φ_1，φ_2 和 φ_3 是解析的．证毕．

例 8(Scherk 极小曲面) 这是由下面的方程给出的，

$$x(u,v)=\left(\arg\frac{\zeta+i}{\zeta-i},\arg\frac{\zeta+1}{\zeta-1},\log\left|\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1}\right|\right),\quad \zeta\neq\pm 1,\zeta\neq\pm i$$

其中 $\zeta=u+iv$，$\arg\zeta$ 是 ζ 的幅角(实轴与 ζ 所成的角)．

容易算得，

$$\arg\frac{\zeta+i}{\zeta-i}=\tan^{-1}\frac{2u}{u^2+v^2-1}$$

$$\arg\frac{\zeta+1}{\zeta-1}=\tan^{-1}\frac{-2v}{u^2+v^2-1}$$

$$\log\left|\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1}\right|=\frac{1}{2}\log\frac{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}{(u^2-v^2-1)^2+4u^2v^2}$$

因此，

$$\varphi_1=\frac{\partial x}{\partial u}-i\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{2}{1+\zeta^2},\quad \varphi_2=-\frac{2i}{1-\zeta^2},\quad \varphi_3=\frac{4\zeta}{1-\zeta^4}$$

因为 $\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi^3\equiv 0$ 和 φ_1，φ_2，φ_3 是解析的，故 X 是极小曲面的等温的参数表示．

从 x，y 和 z 的表示式容易看出，

$$z=\log\frac{\cos y}{\cos x}$$

这个式子表明，Scherk 曲面定义在如图 3-45 所示的棋盘状的图案上(除去这些正方形的顶点，实际上它对应曲面上的竖立的直线)．

极小曲面也许是微分几何中研究得最多的曲面，我们只是稍微接触了一下这个题材．下面列出的是一本很容易读的入门书，R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, Van Nostrand Mathematical Studies, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969．极小曲面理论已发展成为微分几何的一个内容丰富的分支，对其中的一些有趣和不平凡的问题仍一直在进行研究．它与复解析函数和偏微分方程有深入的联系．极小曲面理论和其他漂亮的理论一样具有迷人的性质：它的结果既易于见到和想象，却又难于证明．为给读者增加一些对这一主题的兴趣，我们在结束这个简短的讨论前不加证明地叙述下面一个引人注目的结果．

定理(Osserman) 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的正则的，闭的(作为 $\mathbb{R}^3$ 的子集)极小曲面，且非平面．则 Gauss 映照 N：$S\to S^2$ 的像在球面 S^2 中是稠密的(即，对 S^2 中的任一点，都有与它任意接近的 $N(S)\subset S^2$ 中的点)．

这个定理的证明可以在上面所引的 Osserman 的书中找到．事实上，这个定理在它应用于完备曲面时是稍强一些的，关于完备性的概念见 5.3．

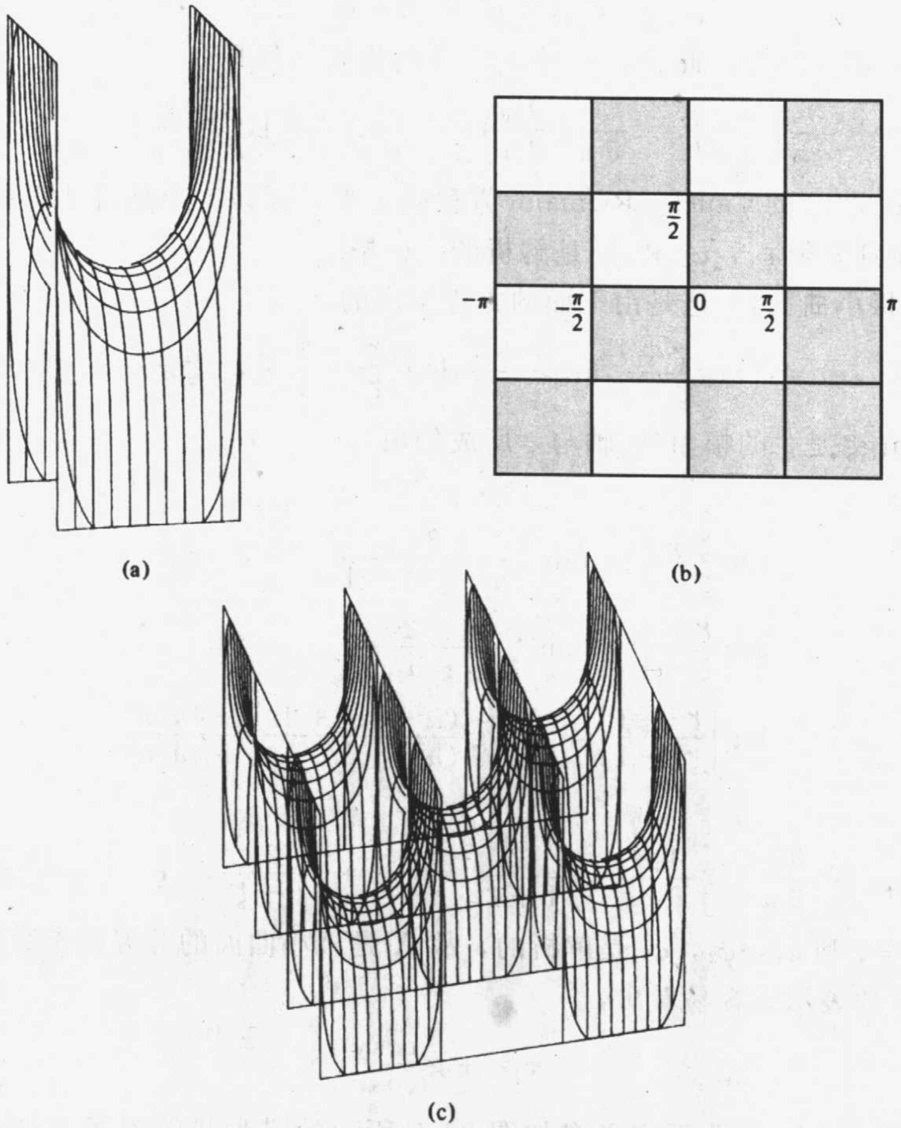


图 3-45　Scherk 的曲面

习题

1. 证明：正螺面(参看 2.5，例 3)是直纹面，它的腰曲线是 z 轴，分布参数是常数.

2. 证明：在旋转双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上，半径最小的纬圆是腰曲线，母线与它交成定角，分布参数是常数.

3. 设 α：$I\to S\subset\mathbb{R}^3$ 是正则曲面 S 上的一条曲线，考虑由直线族 $\{\alpha(t), N(t)\}$ 生成的直纹面，其中 $N(t)$ 是曲面在 $\alpha(t)$ 的法向. 证明：$\alpha(I)\subset S$ 是 S 的曲率线的充要条件是这个直纹面是可展的.

4. 假设非柱面的直纹面

$$X(t,v)=\alpha(t)+vw(t),\quad |w|=1$$

是正则的. $w(t_1)$ 和 $w(t_2)$ 是 X 的两条母线的方向，且 $X(t_1, v_1)$，$X(t_2, v_2)$ 是这两条母

线的公垂线的垂足. 当 $t_2 \to t_1$ 时，这些点趋于一点 $x(t_1, \bar{v})$. 为决定 $(t_1, \bar{v})$，证明下列结论：

a. 公垂线的单位向量收敛于曲面在 $(t_1, \bar{v})$ 一个单位切向量. 总之，在 $(t_1, \bar{v})$，$\langle w' \wedge w, N\rangle = 0$.

b. $\bar{v} = -(\langle \alpha', w'\rangle / \langle w', w'\rangle)$.

所以，$(t_1, \bar{v})$ 是通过 t_1 的母线的中心点，这就给出了腰曲线的另一个几何解释（假定非奇异）.

5. 直劈锥面是直纹面，它的母线 L_t 与一个不与准线 α：$I \to \mathbb{R}^3$ 相交的定轴 r 垂直相交.

a. 给出直劈锥面的一个参数表示，并决定它不是柱面的条件.

b. 给一个非柱面的直劈锥面，并求它的腰曲线和分布参数.

6. 设

$$X(t,v) = \alpha(t) + vw(t)$$

是可展曲面. 证明，在正则点，

$$\langle N_v, X_v\rangle = \langle N_v, X_t\rangle = 0$$

并且，沿固定的一条母线（正则点）可展曲面的切平面不变.

7. 设 S 是正则曲面，$C \subset S$ 是 S 上的正则曲线，且它在每一点的切向都不是渐近方向. 考虑沿 CS 的切平面族的包络. 证明：经过一点 $p \in C$ 的母线的方向与 C 在 p 点的切方向共轭.

8. 证明：若 $C \subset S^2$ 是单位球面 S^2 上的纬圆，则沿 CS^2 的切平面族的包络或为圆柱面，若 C 是赤道；或为圆锥面，若 C 不是赤道.

9.（焦曲面）. 设 S 是没有抛物点或脐点的正则曲面，X：$U \to S$ 是 S 的参数表示，使其坐标曲线为曲率线（当 U 充分小时，这是可能的，参看 3.4，推论 4）. 参数曲面

$$Y(u,v) = X(u,v) + \rho_1 N(u,v)$$

$$Z(u,v) = X(u,v) + \rho_2 N(u,v)$$

称为 $X(U)$ 的**焦曲面**或 $x(U)$ 的**中心曲面**，其中 $\rho_1 = 1/k_1$，$\rho_2 = 1/k_2$；这个名称的来源是由于，例如，$Y(u, v)$ 是在 $X(u, v)$ 的对应于主曲率 k_1 的法截线的密切圆的中心（参看 1.6，习题 21）. 证明：

a. 若 $(k_1)_u$ 和 $(k_2)_v$ 处处不为零，则 Y 和 Z 是正则的参数曲面.

b. 在正则点，对应于 $X(U)$ 的主方向的焦曲面上的方向是共轭的. 这就是说，例如，对所有的 $(u, v) \in U$，Y_u 和 Y_v 是 $Y(U)$ 中的共轭向量.

c. 焦曲面 Y 可以构造如下：考虑 $X(U)$ 上的曲率线 $X(u$，常数)，沿曲线 $X(u$，常数) $X(U)$ 的法线生成一可展曲面（参看习题 3）. 这样的可展曲面的腰曲线在 $Y(U)$ 上，且当 $X(u$，常数) 描出 $X(U)$ 时，这曲线就描出 $Y(U)$（图 3-46）.

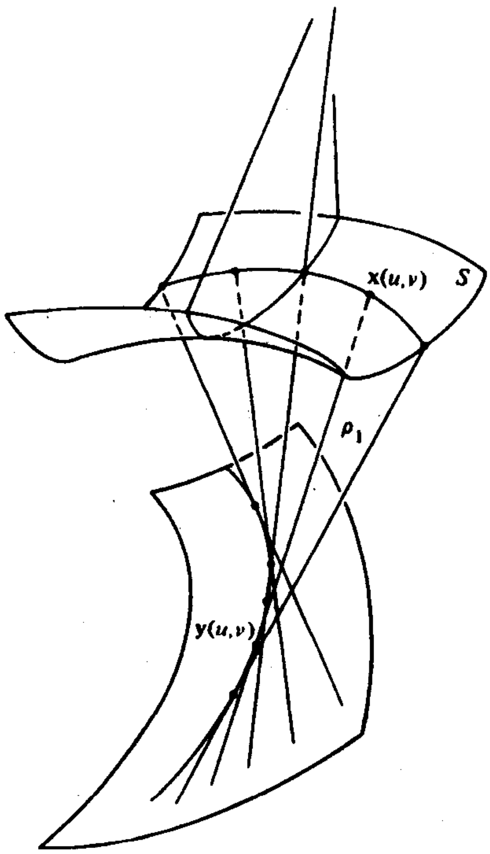


图 3-46　焦曲面的作图

10. 例 4 能被推广如下．一个单参数可微平面族$\{\alpha(t), N(t)\}$是一个对应，对每一个$t\in I$，对应一点$\alpha(t)\in\mathbb{R}^3$和一个单位向量$N(t)\in\mathbb{R}^3$，且使α和N是可微的映照．平面族$\{\alpha(t), N(t)\}(t\in I)$称为切平面族，如果对所有的$t\in I$，$\alpha'(t)\neq 0$，$N'(t)\neq 0$，且$\langle\alpha'(t), N(t)\rangle=0$.

a. 证明：一个可微的单参数切平面族$\{\alpha(t), N(t)\}$决定一个可微的单参数直线族$\{\alpha(t), (N\wedge N')/|N'|\}$，它生成可展曲面

$$X(t,v)=\alpha(t)+v\frac{N\wedge N'}{|N'|} \qquad (*)$$

曲面$(*)$称为切平面族$\{\alpha(t), N(t)\}$的包络.

b. 证明，若对所有的$t\in I$，$\alpha'(t)\wedge(N(t)\wedge N'(t))\neq 0$，则包络$(*)$在$v=0$的邻域中是正则的，且$X$在$(t, 0)$的单位法向量是$N(t)$.

c. 设$\alpha=\alpha(s)$是$\mathbb{R}^3$中的参数曲线，s是弧长，α的曲率$k(s)$和挠率$\tau(s)$处处不为零．证明：密切平面族$\{\alpha(s), b(s)\}$是可微的单参数切平面族，且其包络是$\alpha(s)$的切线面(参看 2.3，例 5).

11. 设$X=x(u, v)$是正则的参数曲面．X的平行曲面是参数曲面

$$Y(u,v)=X(u,v)+aN(u,v)$$

其中a是常数.

a. 证明：

$$Y_u\wedge Y_v=(1-2Ha+Ka^2)(X_u\wedge X_v)$$

其中K和H分别是X的 Gauss 曲率和平均曲率.

b. 证明，在正则点，Y的 Gauss 曲率是

$$\frac{K}{1-2Ha+Ka^2}$$

Y的平均曲率是

$$\frac{H-Ka}{1-2Ha+Ka^2}$$

c. 若曲面X有常数平均曲率$c\neq 0$，并考虑距X为$1/2c$的平行曲面．证明：这个平行曲面有常数 Gauss 曲率$4c^2$.

12. 证明：不存在紧致的(即，在$\mathbb{R}^3$中有界的和闭的)极小曲面.

13. a. 设S是没有脐点的正则曲面．证明：S是极小曲面的充要条件是 Gauss 映照$N: S\to S^2$对所有的$p\in S$和所有的$w_1, w_2\in T_p(s)$，满足

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2)\rangle_{N(p)}=\lambda(p)\langle w_1, w_2\rangle_p$$

其中$\lambda(p)\neq 0$是仅依赖于p的一个数.

b. 设$X: U\to S^2$是单位球面S^2的用$(\theta, \bar{\varphi})\in U$给出的一个参数表示，其中$\theta$是余纬度(参看 2.2，例 1)，$\bar{\varphi}$是由$\theta$决定的纬圆的弧长．考虑$\alpha$中的极小曲面$S$的一点$p$的邻域$V$，使$N: S\to S^2$限制在$V$上是微分同胚(因为$K(p)=\det(dN_p)\neq 0$，由反函数定理，这样的$V$存在)．证明：参数表示$Y=N^{-1}X: U\to S$是等温的(这就给出在没有平点的极小曲面上引入等温参数的方法).

14. 若两个可微函数$f, g: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v},\quad \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial g}{\partial u}$$

容易看出，它们是调和的；在这种情况，f 和 g 称为调和共轭的. 设 X 和 Y 是极小曲面的等温的参数表示，且它们的分量函数是成对地调和共轭，则 X 和 Y 称为共轭的极小曲面. 证明：

a. 正螺面和悬链面是共轭的极小曲面.

b. 给定两个共轭的极小曲面 X 和 Y，对所有的 $t\in\mathbb{R}$，曲面

$$Z=(\cos t)X+(\sin t)Y \qquad (*)$$

也是极小的.

c. 单参数族(*)的所有的曲面有相同的第一基本形式：

$$E=\langle X_u,X_u\rangle=\langle Y_v,Y_v\rangle,\quad F=0,\quad G=\langle x_v,x_v\rangle=\langle Y_u,Y_u\rangle$$

所以，任意两个共轭的极小曲面能被一个单参数的极小曲面族连接起来，且这个族中的曲面的第一基本形式与 t 无关.

附录　自伴随的线性映照和二次形式

在这个附录中，V 表示 2 维的向量空间，并赋予内积$\langle,\rangle$. 下面所有的内容都容易推广到 n 维的向量空间，不过，为简单起见，我们仅处理 $n=2$ 的情形.

线性映照 $A: V\to V$ 称为自伴随的，如果，对所有的 v，$w\in V$，

$$\langle Av,w\rangle=\langle v,Aw\rangle$$

注意，若$\{e_1, e_2\}$是 V 的一组标准正交基，(α_{ij})，i，$j=1$，2，是 A 对这组基的矩阵，则

$$\langle Ae_i,e_j\rangle=\alpha_{ij}=\langle e_i,Ae_j\rangle=\langle Ae_j,e_i\rangle=\alpha_{ji}$$

即矩阵(α_{ij})是对称的.

每一个自伴随的线性映照，都有与之相对应的映照 $B: V\times V\to\mathbb{R}$，其定义为

$$B(w,v)=\langle Av,w\rangle$$

显然，B 是双线性的；即，它对 v 和 w 都是线性的. 此外，A 是自伴随的这一事实就保证了 $B(w, v)=B(v, w)$；即，B 是 V 上的双线性对称形式.

反之，若 B 是 V 上的双线性对称形式，则由$\langle Av, w\rangle=B(w, v)$就能定义一个线性映照 $A: V\to V$，并且，B 的对称性就保证了 A 是自伴随的.

另一方面，对 V 上的每一个对称的双线性形式 B，由

$$Q(v)=B(v,v),\quad v\in V$$

就对应 V 上的一个二次形式 Q，并且，由

$$B(u,v)=\frac{1}{2}[Q(u+v)-Q(u)-Q(v)]$$

B 由 Q 完全决定.

所以，这就得到了 V 上的二次形式和 V 上的自伴随线性映照之间的关系为 1 对 1.

这个附录的目的是，证明(见下面的定理)对给定的一个自伴随的映照 $A: V\to V$，必存在 V 的一组标准正交基，使 A 对这组基的矩阵为对角形. 并且，对角线上的元素是对应的二次

形式限制在 V 的单位圆周上的最大值和最小值.

引理 若函数 $Q(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 限制在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上在(1, 0)有极大值，则 $b=0$.

证明 将圆周 $x^2+y^2=1$ 参数化：

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad t\in(0-\varepsilon,2\pi-\varepsilon)$$

于是，限制在这个圆周上，Q 就变成 t 的一个函数：

$$Q(t)=a\cos^2 t+2b\cos t\sin t+c\sin^2 t$$

因为 Q 在点(1, 0)有极大值，故有

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0}=2b=0$$

因此，$b=0$. 证毕.

命题 对给定的 V 上的一个二次形式 Q，存在 V 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2\}$，使得，若 $v=xe_1+ye_2\in V$，则

$$Q(v)=\lambda_1x^2+\lambda_2y^2$$

其中 λ_1 和 λ_2 分别是 Q 在单位圆 $|v|=1$ 上的最大值和最小值.

证明 设 λ_1 是 Q 在单位圆 $|v|=1$ 上的最大值，e_1 是使 $Q(e_1)=\lambda_1$ 的单位向量. 由 Q 在紧致集合 $|v|=1$ 上的连续性，这样的 e_1 是存在的. 设 e_2 是垂直于 e_1 的单位向量，记 $\lambda_2=Q(e_2)$. 现在证明，基 $\{e_1, e_2\}$ 满足命题的要求.

设 B 是与 Q 相对应的对称双线性形式，$v=xe_1+ye_2$. 则

$$\begin{aligned}Q(v)&=B(v,v)=B(xe_1+ye_2,xe_1+ye_2)\\&=\lambda_1x^2+2bxy+\lambda_2y^2\end{aligned}$$

其中 $b=B(e_1, e_2)$. 由引理，$b=0$，剩下来的只要证明 λ_2 是 Q 在圆 $|v|=1$ 上的最小值. 这可以立即得到，由于，对任何的 $v=xe_1+ye_2(x^2+y^2=1)$，都有

$$Q(v)=\lambda_1x^2+\lambda_2y^2\geqslant\lambda_2(x^2+y^2)=\lambda_2$$

其中已利用 $\lambda_2\leqslant\lambda_1$. 证毕.

向量 $v\neq0$ 称为线性映照 A：$V\to V$ 的一个**特征向量**，如果 $Av=\lambda v$，λ 为其一实数；λ 称为 A 的**特征值**.

定理 设 A：$V\to V$ 是自伴随的线性映照. 则存在 V 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2\}$，使 $Ae_1=\lambda_1e_1, Ae_2=\lambda_2e_2$(即，$e_1$ 和 e_2 是 A 的特征向量，λ_1 和 λ_2 是 A 的特征值). 于是，在基 $\{e_1, e_2\}$ 中，A 是对角形的，且对角线上的元素 λ_1 和 λ_2 (设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2$) 分别是二次形式 $Q(v)=\langle Av, v\rangle$ 在 V 的单位圆上的最大值和最小值.

证明 考虑二次形式 $Q(v)=\langle Av, v\rangle$ 根据上面的命题存在 V 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2\}$，使 $Q\{e_1\}=\lambda_1$，$Q(e_2)=\lambda_2\leqslant\lambda_1$，其中 λ_1 和 λ_2 分别是 Q 在单位圆上的最大值和最小值. 所以，剩下来只要证明

$$Ae_1=\lambda_1e_1,\quad Ae_2=\lambda_2e_2$$

因为 $B(e_1, e_2)=\langle Ae_1, e_2\rangle=0$(由引理)和 $e_2\neq0$，故必有 Ae_1 平行于 e_1 或 $Ae_1=0$. 若 Ae_1 平行于 e_1，则 $Ae_1=\alpha e_1$，又因为 $\langle Ae_1, e_1\rangle=\lambda_1=\langle\alpha e_1, e_1\rangle=\alpha$，就得到了 $Ae_1=\lambda_1e_1$；若 $Ae_1=$

0，则 $\lambda_1=\langle Ae_1, e_1\rangle=0$，亦有 $Ae_1=0=\lambda_1 e_1$. 所以，在任何情况都有 $Ae_1=\lambda_1 e_1$.

利用

$$B(e_1, e_2) = \langle Ae_2, e_1\rangle = 0$$

和

$$\langle Ae_2, e_2\rangle = \lambda_2$$

同样的方法就能证明 $Ae_2=\lambda_2 e_2$. 证毕.

注 上面的结果对 $n(>2)$维向量空间的推广，仅需采取下面的措施. 在前面的命题中，我们选取 Q 在单位球面上的最大值 $\lambda_1=Q(e_1)$，然后说明，将 Q 限制在与 e_1 垂直的子空间 V_1 上为二次形式 Q_1，再把 Q_1 在 V_1 的单位球面上的最大值取为 $\lambda_2=Q_1(e_2)$，并如此继续即可.

第 4 章　曲面的内蕴几何学

4.1　引言

我们在第 2 章引进了曲面 S 的第一基本形式，并且说明了如何用它来计算曲面 S 的一些简单的度量概念(长度，角度，面积等)．其要点是：一旦知道了曲面的第一基本形式，则可以不"离开"曲面来进行这些运算．正因为如此，我们把这些概念称为曲面的内蕴量．

但是，上面列举的这些简单的概念并没有包罗由第一基本形式确定的几何学的所有内容．我们在这一章将要看到，曲面的许多重要的局部性质只用第一基本形式就可表达出来．对这种性质的研究就叫做曲面的内蕴几何．这是本章的目的．

在 4.2，我们将定义等距的概念，它基本上是把"两曲面有相同的第一基本形式"这一直观的说法严格化．

在 4.3，我们要证明著名的 Gauss 公式，它把 Gauss 曲率 K 表示为第一基本形式的系数及其导数的函数．这意味着 K 是一个内蕴量．如果我们想一想 K 曾经是用第二基本形式来定义的，就可知道 Gauss 公式是非常令人惊讶的事实．

在 4.4，我们要开始对内蕴几何作一系统的研究．其结果是：内蕴几何可以通过曲面上向量场的协变导数这一概念来统一地处理．协变导数是平面上向量场的普通导数的推广，在这一章中，它自始至终起着重要的作用．

4.5 用来讨论 Gauss-Bonnet 定理，局部形式和整体形式都讨论．Gauss-Bonnet 定理也许是本书最重要的定理．即使课程较短，也应该尽量讲一讲 4.5．

在 4.6，我们将定义指数映照，并利用指数映照引进两种特殊坐标系——法坐标系和测地极坐标系．

在 4.7，我们将处理前几节遗留下来的有关测地线的一些不易处理的问题．例如，我们要证明：对曲面 S 的每一点 p，均存在一个邻域使得这个邻域是其中任何点的法邻域(法邻域的定义见 4.6)．这个结果及有关的一个结果在第 5 章要用到．但是在初读时，承认这些结果而略去 4.7 或许更方便一些．我们还要证明凸邻域的存在性，但它在本书的其他地方并没有用到．

4.2　等距对应；共形映照

2.5 的例 1 和例 2 揭示了一个有趣的性质：虽然柱面和平面是不同的曲面，但它们的第一基本形式"相等"(至少在我们已经考虑过的坐标邻域中)．这意味着局限于内蕴的度量问题(长度，角度，面积)，平面和柱面的局部性态是一致的．(这在直观上是显然的，如果我们将柱面沿一条母线剪开，则可以把它铺开到平面上)．我们在这一章将会看到：正则曲面的许多其他的重要概念也只依赖于曲面的第一基本形式，因此应该包括在内蕴量的范畴之中．我们就来严格地说一下"两正则曲面具有相同的第一基本形式"这句话的确切含意．

S 和 $\overline{S}$ 将总是代表正则曲面．

定义 1 微分同胚 φ：$S\to\overline{S}$ 是等距对应，如果对于任意的 $p\in S$ 和 w_1，$w_2\in T_p(S)$，均有

$$\langle w_1,w_2\rangle_p=\langle d\varphi_p(w_1),\quad d\varphi_p(w_2)\rangle_{\varphi(p)}$$

此时，曲面 S 和 $\overline{S}$ 称为是等距的.

换言之，微分同胚 φ 是一等距对应，如果微分映照 $d\varphi$ 保持内积的话．由此可知，$d\varphi$ 是线性等距映照．即对所有 $w\in T_p(S)$，有

$$I_p(W)=\langle w,w\rangle_p=\langle d\varphi_p(w),\quad d\varphi_p(w)\rangle_{\varphi(p)}=I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

反之，如果微分同胚 φ 保持第一基本形式，即对所有 $w\in T_p(S)$，

$$I_p(w)=I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

则

$$\begin{aligned}2\langle w_1,w_2\rangle &= I_p(w_1+w_2)-I_p(w_1)-I_p(w_2)\\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1+w_2))-I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1))-I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2))\\ &= 2\langle d\varphi_p(w_1),d\varphi_p(w_2)\rangle\end{aligned}$$

因此，φ 是等距对应.

定义 2 设 V 是点 $p\in S$ 的一个邻域．映照 φ：$V\to\overline{S}$ 称为在 p 的局部等距对应，如果存在 $\varphi(p)\in\overline{S}$ 的一个邻域 $\overline{V}$ 使得 φ：$V\to\overline{V}$ 是等距对应．如果在 S 的每点 p，均存在一个到 $\overline{S}$ 的局部等距对应，则称曲面 S 局部等距于 $\overline{S}$．S 和 $\overline{S}$ 称为局部等距的，如果 S 局部等距于 $\overline{S}$ 而且 $\overline{S}$ 局部等距于 S.

显然，如果 φ：$S\to\overline{S}$ 是微分同胚并且对于 S 的每点 p 均为局部等距对应，则 φ 是一整体等距对应．但也可能出现这种情形：两张曲面局部等距，但不是整体等距，如下例所示.

例 1 设 $\overline{x}(U)$ 是柱面的坐标邻域，其定义如 2.5 的例 2 所述(我们已将该柱面的参数表示 x 改成 $\overline{x}$)．$x(R^2)$ 是 2.5 例 1 所述的平面．映照 $\varphi=x\circ\overline{x}^{-1}$ 是一局部等距对应，事实上，在柱面的一点 $p\in\overline{x}(U)$，每个切向量 w 均为某条曲线 $\overline{x}(u(t)$，$v(t))$ 的切向量，这里 $(u(t)$，$v(t))$ 是在 $U\subset\mathbb{R}^2$ 中的曲线．因此，w 可以表为

$$w=\overline{x}_uu'+\overline{x}_vv'$$

另一方面，$d\varphi(w)$ 是曲线

$$\varphi(\overline{x}(u(t),v(t)))=x(u(t),v(t))$$

的切向量．因此，$d\varphi(w)=x_uu'+x_vv'$．由于

$$E=\overline{E},\quad F=\overline{F},\quad G=\overline{G}$$

所以有

$$\begin{aligned}I_p(w) &= \overline{E}(u')^2+2\overline{F}u'v'+\overline{G}(v')^2\\ &= E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2\\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))\end{aligned}$$

由此可知，柱面 $x^2+y^2=1$ 局部等距于平面.

这个等距对应不可能扩张到整个柱面上，因为柱面甚至不能与平面同胚．这一结论的严格证明会使我们离题太远，但下面直观的推理可以给出证明的思路．平面内的任何简单闭曲线可

以在平面内连续地收缩成一点(图 4-1). 这一性质在同胚对应下肯定保持不变. 但是,柱面上的纬圆(图 4-1)却不具有这种性质. 这就否定了在平面和柱面之间存在同胚映照的可能性.

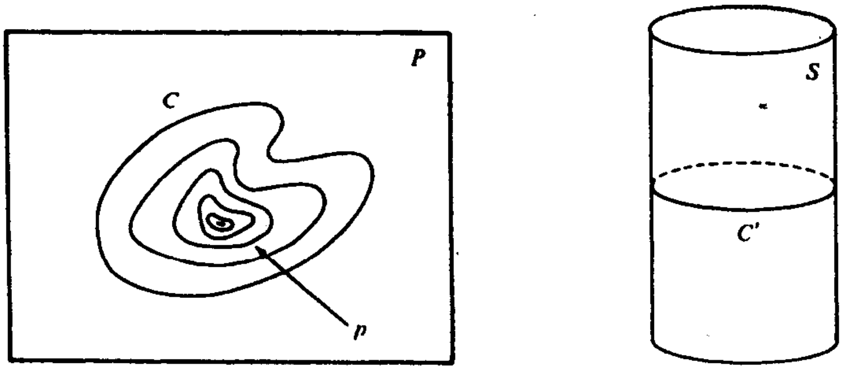


图 4-1 曲线 $C\subset P$ 可以在平面 P 内连续地缩成一点. 但 $C'\subset S$ 却不行

在举更多的例子以前,我们要推广上述的推理,从而得到在局部坐标中判定局部等距的准则.

命题 1 假定存在参数表示 x: $U\to S$ 和 $\bar{x}$: $U\to\bar{S}$ 使得 $E=\bar{E}$, $F=\bar{F}$, $G=\bar{G}$. 则映照 $\varphi=\bar{x}\circ x^{-1}$: $x(U)\to\bar{S}$ 为一局部等距对应.

证明 设 $p\in x(U)$ 及 $w\in T_p(S)$. 则 w 是曲线 $x(\alpha(t))$ 在 $t=0$ 的切向量,其中 $\alpha(t)=(u(t), v(t))$是U 中的一条曲线. 因此,在 $t=0$, w 可以表示为

$$w = x_u u' + x_v v'$$

根据定义,向量 $d\varphi_p(w)$是曲线 $\bar{x}\circ x^{-1}\circ x(\alpha(t))$的切向量. 即曲线 $\bar{x}(\alpha(t))$在 $t=0$ 的切向量(图 4-2).

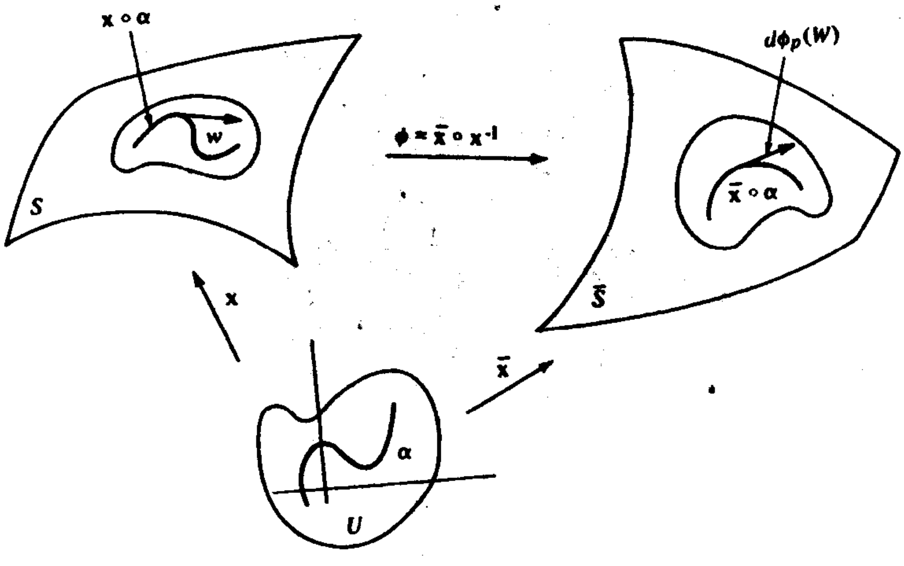


图 4-2

因此,

$$d\varphi_p(w) = \bar{x}_u u' + \bar{x}_v v'$$

由于

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

$$I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = \overline{E}(u')^2 + 2\overline{F}u'v' + \overline{G}(v')^2$$

所以，对所有 $p \in x(U)$ 和所有 $w \in T_p(S)$，均有

$$I_p(W) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

因此，φ 是局部等距对应. 证毕.

例 2 设 S 是一旋转面. 并设 S 的参数表示(参见 2.3 例 4)为

$$x(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

$$a \leqslant v \leqslant b, \quad 0 < u < 2\pi, \quad f(v) > 0$$

S 的第一基本形式关于参数表示 x 的系数为

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2$$

特别地，悬链线 $x = a\cosh v$，$z = av$，$-\infty < v < \infty$，的旋转面有下述参数表示：

$$x(u,v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av)$$

$$0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

对于上述参数表示，曲面的第一基本形式的系数为

$$E = a^2\cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2(1 + \sinh^2 v) = a^2\cosh^2 v$$

此旋转面称为悬链面(见图 4-3).

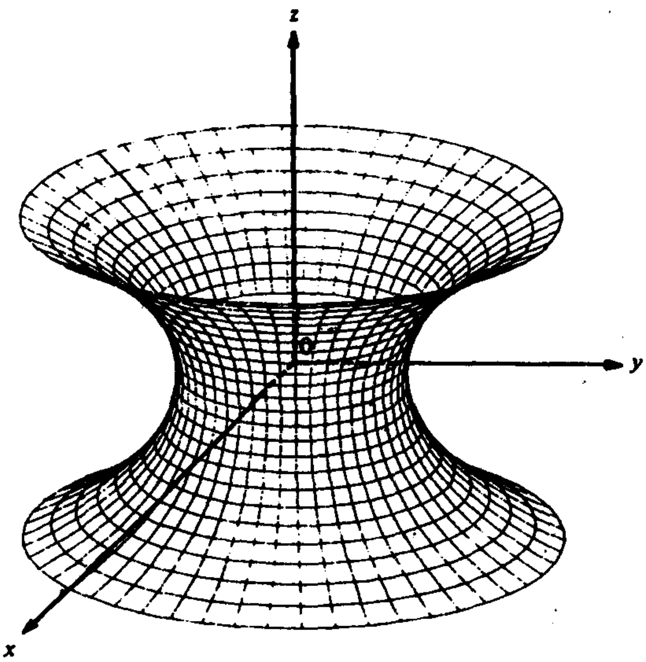


图 4-3 悬链面

我们将证明悬链面局部等距于正螺面(2.5 例 3).

正螺面的一种参数表示为

$$\overline{x}(\overline{u},\overline{v}) = (\overline{v}\cos\overline{u}, \overline{v}\sin\overline{u}, a\overline{u}), \quad 0 < \overline{u} < 2\pi, \quad -\infty < \overline{v} < \infty$$

让我们选取下列参数变换：

$$\overline{u} = u, \quad \overline{v} = a\sinh v, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

这个变换显然是 1 对 1 的，而且 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} = a\cosh v$$

处处不为零．因而，正螺面的一种新的参数表示为

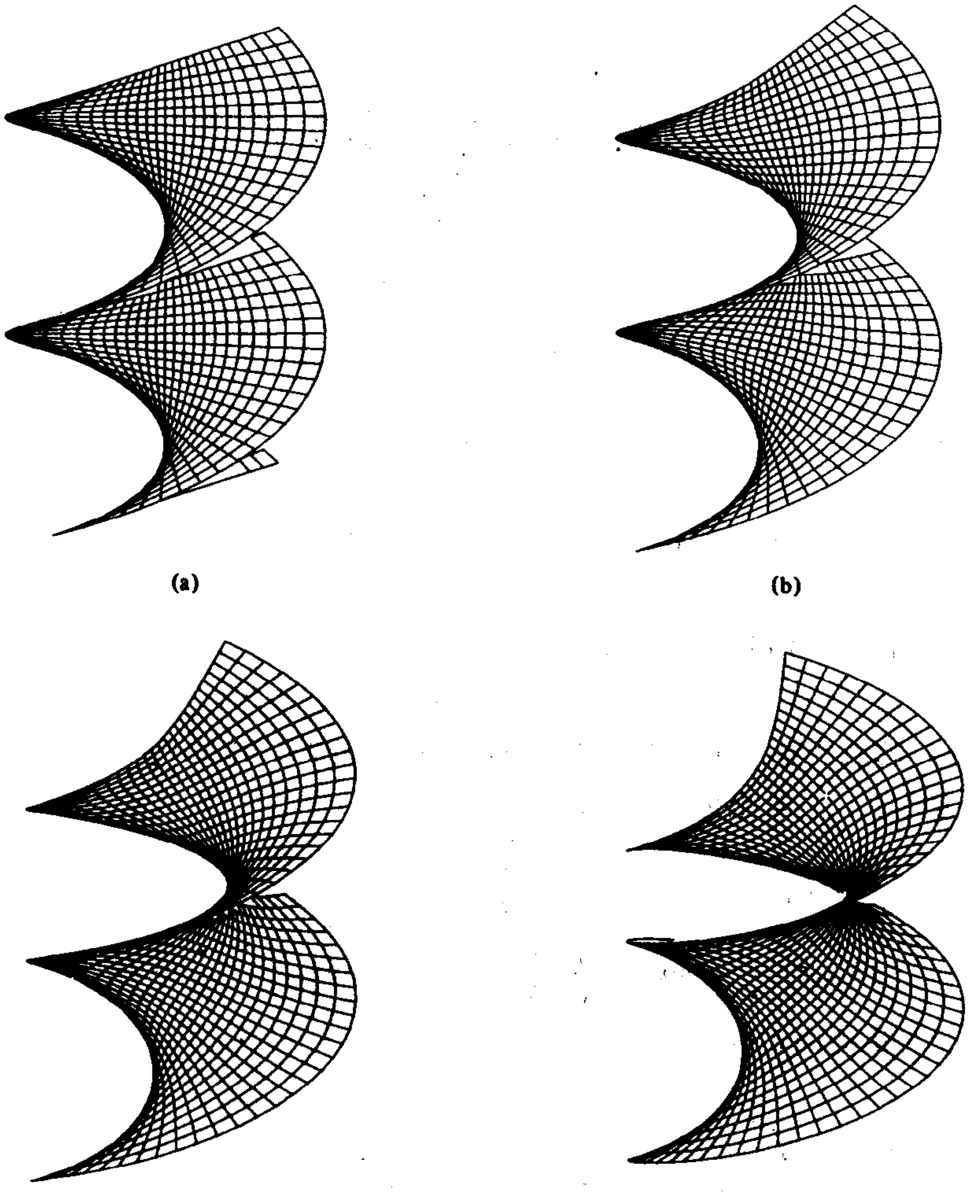
$$\overline{X}(u,v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au)$$

相应的第一基本形式的系数为

$$E = a^2\cosh^2 v,\quad F = 0,\quad G = a^2\cosh^2 v$$

利用命题 1 可以得到悬链面和正螺面局部等距的结论．

图 4-4 给出如何进行等距对应的几何思想．它把正螺面的"一转"(对应于坐标邻域 $0<u<2\pi$)映成除去一条子午线的悬链面．



(a) (b) (c) (d)

图 4-4 正螺面到悬链面等距变形的过程

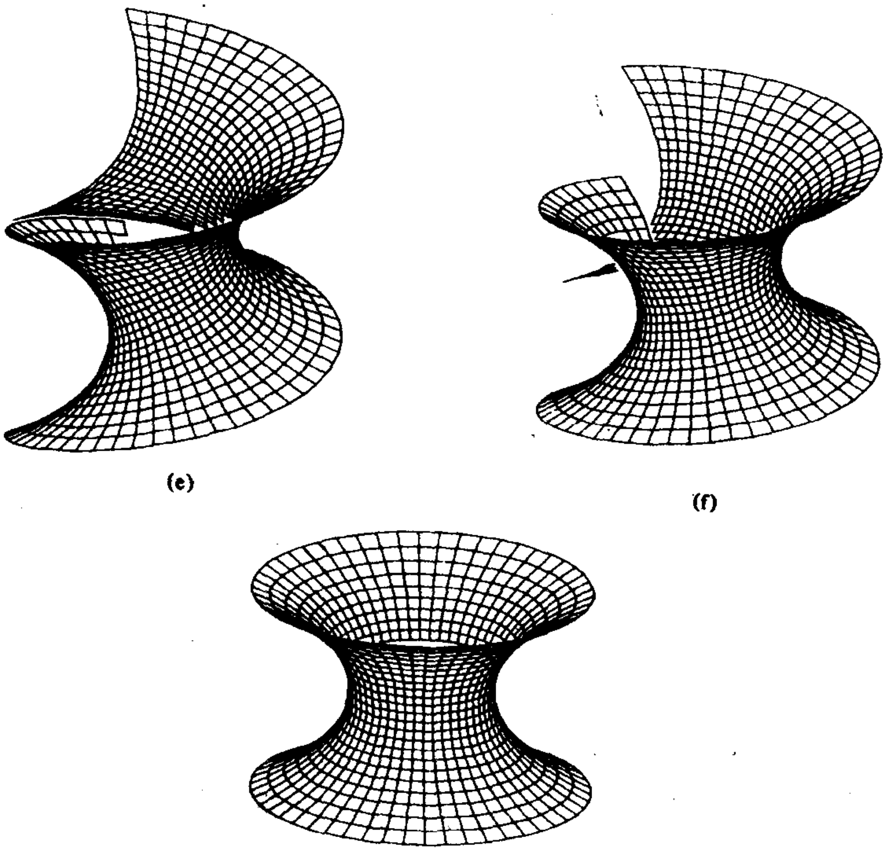


图 4-4 (续)

注 1 正螺面和悬链面的等距对应在第 3 章已经出现过，那里是从极小曲面的角度考虑的；参考 3.5 习题 14.

例 3 我们将证明单叶锥面(去掉顶点)

$$z = +k\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

局部等距于平面. 其想法是证明锥面去掉一条母线可以展成平面的一部分.

设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为开集，其极坐标(ρ，θ)满足

$$0 < \rho < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi\sin\alpha$$

其中 $2\alpha(0<2\alpha<\pi)$是锥顶角(即 $\cot\alpha = k$)，并设映射 F：$U \to \mathbb{R}^3$(图 4-5)为

$$F(\rho,\theta) = \left(\rho\sin\alpha\cos\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right), \quad \rho\sin\alpha\sin\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right), \quad \rho\cos\alpha\right)$$

显然，$F(U)$包含在锥面内，因为

$$k\sqrt{x^2+y^2} = \cot\alpha\sqrt{\rho^2\sin^2\alpha} = \rho\cos\alpha = z$$

更进一步，当 θ 变化范围为(0，$2\pi\sin\alpha$)，则 $\theta/\sin\alpha$ 的变动范围为(0，2π)因此，锥面的所有点除去母线 $\theta=0$ 均被 $F(U)$覆盖.

容易检验 F 和 dF 在 U 中是 1 对 1 的；因此，F 是 U 到除去一条母线的锥面的微分同胚.

现在，我们来证明 F 是等距对应. 事实上，U 可以看成为一正则曲面，其参数表示为

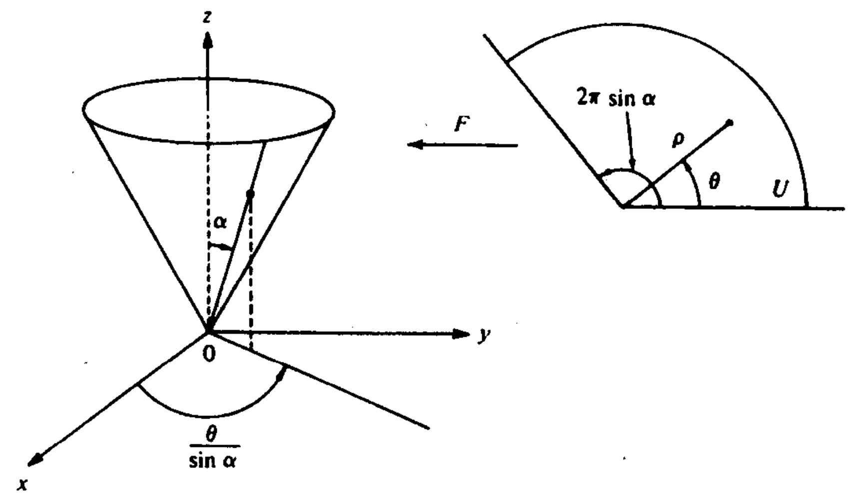


图 4-5

$$\bar{x}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0), \quad 0 < \rho < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi\sin\alpha$$

U 对于上述参数表示的第一基本形式的系数是

$$\bar{E} = 1, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = \rho^2$$

另一方面，锥面的第一基本形式关于参数表示 $F\circ x$ 的系数是

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \rho^2$$

由命题 1 可知，F 是一局部等距.

注 2 我们知道在曲面 S 上可以只用第一基本形式来计算曲线的长度，这一事实允许我们对 S 上的点引进“内蕴”距离的概念. 大体上说，我们定义 S 上两点间的(内蕴)距离 $d(p, q)$ 为 S 上连结 p 和 q 的曲线的长度的下确界. (我们要在 5.3 详细地说明.)这一距离显然要大于或等于 p 到 q 的 $\mathbb{R}^3$ 中的距离 $\| p-q \|$ (图 4-6). 我们将在习题 3 中证明距离 d 在等距对应下保持不变；也就是说，如果 φ: $S\to\bar{S}$ 是一等距对应，则对于 $p, q\in S$，有 $d(p, q) = d(\varphi(p), \varphi(q))$.

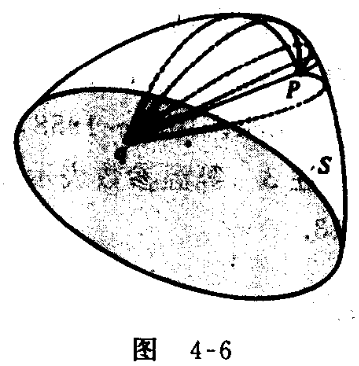


图 4-6

正则曲面的等距对应是关于度量性质的很自然的等价性概念. 正如从可微性的观点考虑，微分同胚的曲面看成是等价的一样；从度量的观点来看，等距的曲面也是等价的.

在研究曲面时，也可以定义其他类型的等价性. 对于我们来说，微分同胚和等距对应是最要紧的. 但是，在讨论某些与复变量的解析函数有关的问题时，引进共形等价也是重要的. 我们现在就来简要地说一说.

定义 3 微分同胚 φ: $S\to\bar{S}$ 称为共形映照，如果对所有 $p\in S$，v_1，$u_2\in T_p(S)$，我们有

$$\langle d\varphi_p(V_1), d\varphi_p(V_2)\rangle = \lambda^2(p)\langle v_1, v_2\rangle_p$$

其中 λ^2 为 S 上处处非零的可微函数；这时曲面 S 和 $\bar{S}$ 称做是共形的. 从 p 点的邻域 V 到 $\bar{S}$ 的映照：φ: $V\to\bar{S}$ 称为 p 点附近的局部共形映照，如果存在 $\varphi(p)$的邻域 $\bar{V}$ 使得 φ: $v\to\bar{v}$ 是共形映照. 如果对于每点 $p\in S$，均存在一个 p 点附近的局部共形映照则称曲面 S 局部共形于 $\bar{S}$.

上述定义的几何意义是共形映照保持角度(不一定保持长度). 事实上，设 α: $I\to S$ 和 β: $I\to S$ 是 S 的二条曲线，交于 $t=0$. 在 $t=0$ 处的夹角为

$$\cos\theta=\frac{\langle\alpha',\beta'\rangle}{|\alpha'||\beta'|},\quad 0<\theta<\pi$$

共形映照 φ: $S\to\overline{S}$ 把这些曲线映成曲线 $\varphi\circ\alpha$: $I\to\overline{S}$ 和 $\varphi\circ\beta$: $I\to\overline{S}$，它们交于 $t=0$，其交角 $\bar{\theta}$ 为

$$\cos\bar{\theta}=\frac{\langle d\varphi(\alpha'),d\varphi(\beta')\rangle}{|d\varphi(\alpha')||d\varphi(\beta')|}=\frac{\lambda^2\langle\alpha',\beta'\rangle}{\lambda^2|\alpha'||\beta'|}=\cos\theta$$

结论得证.

不难证明上述性质表示了局部共形映照的特征(习题 14).

下面是命题 1 在共形映照时的类似命题，其证明也留作习题.

命题 2 设 x: $U\to S$, $\bar{x}$: $U\to\overline{S}$ 为参数表示使得 $E=\lambda^2\overline{E}$, $F=\lambda^2\overline{F}$, $G=\lambda^2\overline{G}$ 在 U 中成立，这里 λ^2 是在 U 中处处非零的可微函数. 则映照 $\varphi=\bar{x}\circ x^{-1}$: $x(U)\to\overline{S}$ 是一局部共形映照.

容易看出，局部共形性质是一等价关系；也就是说，如果 S_1 局部共形于 S_2 且 S_2 局部共形于 S_3，则 S_1 局部共形于 S_3.

共形映照的最重要的性质是下面的定理，但我们将不予以证明.

定理 任何两个正则曲面是局部共形的. 证明的根据是：正则曲面的任何点的一个邻域有一参数表示使得第一基本形式的系数为

$$E=\lambda^2(u,v)>0,\quad F=0,\quad G=\lambda^2(u,v)$$

这种坐标系叫做等温坐标. 一旦假设了正则曲面 S 的等温坐标系的存在性，则 S 显然局部共形于平面，根据复合映照性质，可以局部共形于任何其他的正则曲面.

在任何正则曲面上存在等温坐标系的证明是很细致的，这里不说它了. 感兴趣的读者可以查看 L. Bers, Riemann Surfaces, New York University, Institute of Mathematical Science, New York, 1957～1958, pp. 15～35[○].

注 3 等温参数表示在第 3 章有关极小曲面的内容中已经出现过. 参考 3.5 的命题 2 及习题 13.

习题

1. 设映照 F: $U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 为

$$F(u,v)=(u\sin\alpha\cos v,u\sin\alpha\sin v,u\cos\alpha)$$
$$(u,v)\in U=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\quad u>0\},\quad \alpha=\text{常数}$$

a. 证明 F 是 U 到锥面 C 的局部微分同胚. 锥面 C 的顶点为原点，锥顶角为 2α.

b. F 是局部等距对应吗?

2. 证明命题 1 的“逆”：设 φ: $S\to\overline{S}$ 是等距对应，且 x: $U\to S$ 为 $p\in S$ 附近的参数表示，

○ 也可参看陈省身(S. S. Chern)的文章“An elementary Proof of the existence of isothermal Parameters on a surface”, Proc. AMS, 6(1955), 771～782.

则 $\bar{x}=\varphi\circ x$ 为 $\varphi(p)$ 附近的参数表示且 $E=\bar{E}$，$F=\bar{F}$，$G=\bar{G}$.

*3. 证明：微分同胚 φ：$S\to\bar{S}$ 为等距对应的充要条件是 S 上任何参数曲线的弧长等于 φ 下的像曲线的弧长.

4. 利用球极投影(参见 2.2 习题 16)，证明球面局部共形于平面.

5. 设 α_1：$I\to\mathbb{R}^3$，α_2：$I\to\mathbb{R}^3$ 是正则参数曲线，其参数为弧长. 假设 α_1 的曲率 k_1 和 α_2 的曲率 k_2 满足 $k_1(S)=k_2(S)\neq0$，$S\in I$. 令

$$x_1(S,v)=\alpha_1(S)+v\alpha'_1(S)$$

$$x_2(S,v)=\alpha_2(S)+v\alpha'_2(S)$$

为它们的(正则)切线面(参看 2.3 例 5)且令 V 为(S_0，v_0)的一个邻域，使得 $x_1(v)\subset\mathbb{R}^3$，$x_2(v)\subset\mathbb{R}^3$ 是正则曲面(参看 2.3 命题 2). 证明：$x_1\circ x_2^{-1}$：$x_2(v)\to x_1(v)$是一等距对应.

*6. 设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 为一正则参数曲线，其曲率 $k(t)\neq0$，$t\in I$. 令 $x(t, v)$为它的切线面. 证明：对每点(t_0，v_0)$\in I\times(\mathbb{R}-\{0\})$均存在($t_0$，$v_0$)的一个邻域 v 使得 $x(v)$等距于平面的一个开集.（因此，切线面局部等距于平面.）

7. 设 V 和 W 为(有限维)向量空间，其内积记作$\langle,\rangle$并设 F：$V\to W$ 为线性映照. 证明：下列条件等价：

a. 对所有 v_1，$v_2\in V$ 有$\langle F(v_1), F(v_2)\rangle=\langle v_1, v_2\rangle$.

b. 对所有 $v\in V$，$|F(v)|=|v|$.

c. 若$\{e_1, \cdots, e_n\}$为 V 的标准正交基，则$\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$为 W 的标准正交基.

d. 存在 V 的一组标准正交基$\{v_1, \cdots, v_n\}$使得$\{F(v_1), \cdots, F(v_n)\}$为 W 的标准正交基.

若上述条件中的任何一个被满足，则称 F 为 V 到 W 的**线性等距对应**.（当 $W=V$，线性等距对应常叫做**正交变换**.）

*8. 设映照 G：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 适合

$$|G(p)-G(q)|=|p-q|,\quad \forall p,\quad q\in\mathbb{R}^3$$

（也就是说，G 是**保距映照**). 证明：存在 $P_0\in\mathbb{R}^3$ 和向量空间$\mathbb{R}^3$ 的一线性等距对应 F(参见习题 7)使得对所有 $P\in\mathbb{R}^3$，

$$G(P)=F(P)+P_0$$

9. 设 S_1，S_2 和 S_3 为正则曲面. 证明：

a. 若 φ：$S_1\to S_2$ 为等距对应，则 φ^{-1}：$S_2\to S_1$ 也是等距对应.

b. 若 φ：$S_1\to S_2$，ψ：$S_2\to S_3$ 是等距对应，则 $\psi\circ\varphi$：$S_1\to S_3$ 是等距对应.

这表明正则曲面 S 的等距对应自然构成一个群，叫做 S 的**等距群**.

10. 设 S 为旋转面. 证明：关于旋转轴的旋转是 S 的等距对应.

*11. a. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为正则曲面并设 F：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为$\mathbb{R}^3$ 的保距映照(见习题 8)使得 $F(S)\subset S$. 证明：F 限制在 S 上是 S 的等距对应.

b. 利用上题证明：单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的等距群(见习题 10)包含于$\mathbb{R}^3$ 的正交线性变换群内(实际上一致；见 4.4 的习题 23).

c. 举例说明存在等距对应 φ：$S_1\to S_2$，它不能扩张为保距映照 F：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

*12. 设 $C=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2=1\}$为圆柱面. 构造一等距对应 φ: $C\to C$ 使得 φ 的不动点集，即，集合$\{P\in C; \varphi(P)=P\}$恰好为两个点.

13. 设 V 和 W 为有限维向量空间，其内积为$\langle,\rangle$. 设 G: $V\to W$ 为线性映照. 证明下列条件等价：

a. 存在实常数 $\lambda\neq 0$ 使得

$$\langle G(v_1),G(v_2)\rangle = \lambda^2\langle v_1,v_2\rangle$$

对所有 v_1，$v_2\in V$ 成立.

b. 存在实常数 $\lambda>0$ 使对任意 $v\in V$ 有

$$|G(v)|=\lambda|v|$$

c. 存在 V 的一组标准正交基$\{v_1, \cdots, v_n\}$使得$\{G(v_1), \cdots, G(v_n)\}$是 W 的正交基. 而且向量 $G(v_i)$，$i=1, \cdots, n$ 的长度相等($\neq 0$).

若上述任一条件被满足，则 G 叫做线性共形映照(或相似映照).

14. 我们称可微映照 φ: $S_1\to S_2$ 保角，如果对每个 $p\in S_1$ 和每组 v_1，$v_2\in T_p(S_1)$有

$$\cos(v_1,v_2) = \cos(d\varphi_p(v_1),\quad d\varphi_p(v_2))$$

证明：φ 是局部共形映照的充要条件是 φ 保角.

15. 设 φ: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 由 $\varphi(x, y)=(u(x, y), v(x, y))$确定，其中 u 和 v 是可微函数适合 Cauchy-Riemann 方程

$$u_x = v_y,\quad u_y = -v_x$$

证明：φ 是从$\mathbb{R}^2-Q$ 到$\mathbb{R}^2$ 的局部共形映照，其中 $Q=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2; u_x^2+u_y^2=0\}$.

16. 设 x: $U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，其中

$$U = \{(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2;\quad 0<\theta<\pi,\quad 0<\varphi<2\pi\}$$

$$x(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$$

为单位球面 S^2 的参数表示. 设

$$\log\tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)= u,\quad \varphi = v$$

证明：坐标邻域 $x(U)=V$ 有新的参数表示

$$y(u,v) = (\mathrm{sech}u\cos v,\mathrm{sech}u\sin v,\tanh u)$$

证明：对于参数表示 y，第一基本形式的系数是

$$E = G = \mathrm{sech}^2 u,\quad F = 0$$

因此，y^{-1}：$V\subset S^2\to\mathbb{R}^2$ 是一共形映照，它把 S^2 的子午线和纬线映成平面的直线. 这叫做 Mercator 投影.

*17. 考虑单位球上的一个三角形，它的边为斜驶线(即与子午线的交角为常数的曲线；参看 2.5 的例 4)，并且三角形不包含南北极. 证明：这样的三角形的内角和为 π.

18. 微分同胚 φ: $S\to\bar{S}$ 称为保面积映照，如果任意区域 $R\subset S$ 的面积等于 $\varphi(R)$的面积. 证明：如果 φ 既保面积又共形，则 φ 为等距映照.

19. 设 $S^2=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2=1\}$为单位球. $C=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2=1\}$为外切圆柱面. 设映照 φ: $S^2-\{(0, 0, 1)\cup(0, 0, -1)\}=M\to C$.

其定义如下：对每点 $P\in M$，过 P 点且垂直于 OZ 的直线交 OZ 于点 q. 令 l 为从 q 出发且包含 p 的射线(图 4-7). 定义 $\varphi(P)=C\cap l$.

证明：φ 为保面积微分同胚.

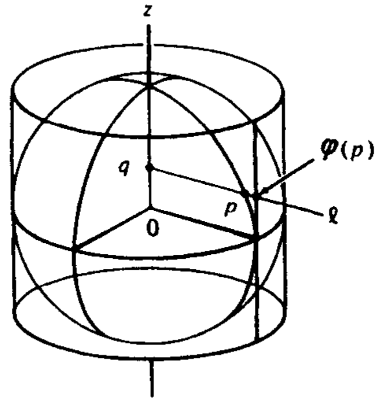


图 4-7

20. 设 x：$U\subset\mathbb{R}^2\to S$ 为旋转面 S 的参数表示：

$$x(u,v)=(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)),\quad f(v)>0$$

$$U=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\quad 0<u<2\pi,\quad a<v<b\}$$

a. 证明：映照 φ：$U\to\mathbb{R}^2$

$$\varphi(u,v)=\left(u,\int\frac{\sqrt{(f'(v))^2+(g'(v))^2}}{f(v)}dv\right)$$

是局部微分同胚.

b. 利用上题证明旋转曲面 S 局部共形于平面. 并可使得每一局部共形映照 θ：$V\subset S\to\mathbb{R}^2$ 把邻域 V 的子午线和纬线映成 $\theta(V)\subset\mathbb{R}^2$ 中的正交直线. (注意这是习题 16 的 Mercator 投影的推广).

c. 证明：映照 ψ：$U\to\mathbb{R}^2$

$$\psi(u,v)=\left(u,\int f(v)\sqrt{(f'(v))^2+(g'(v))^2}dv\right)$$

是一局部微分同胚.

d. 利用上题证明：对旋转曲面 S 的每点 P，存在邻域 $V\subset S$ 和保面积映照 $\bar{\theta}$：$V\to\mathbb{R}^2$.

4.3 Gauss 定理和相容性方程

在第 3 章，通过研究切平面在一点的邻域内的变化而得到各种性质. 为了与曲线相类比，我们将在曲面上的每点配以一个标架(类似于 Frenet 标架)并研究标架向量的导数.

S 通常表示正则可定向并且已定向的曲面. 设 x：$U\subset\mathbb{R}^2\to S$ 为与 S 的定向相一致的参数表示. 在 $x(U)$的每点可配以一个自然标架，它由向量 x_u，x_v 和 N 构成. 研究这种标架是本节的主题.

利用基向量$\{x_u,\ x_v,\ N\}$来表示向量 X_u，X_v 和 N 的导数，我们得到

$$\begin{aligned}
x_{uu}&=\Gamma_{11}^1X_u+\Gamma_{11}^2X_v+L_1N\\
x_{uv}&=\Gamma_{12}^1X_u+\Gamma_{12}^2X_v+L_2N\\
x_{vu}&=\Gamma_{21}^1X_u+\Gamma_{21}^2X_v+\overline{L}_2N\\
x_{vv}&=\Gamma_{22}^1X_u+\Gamma_{22}^2X_v+L_3N\\
N_u&=a_{11}X_u+a_{21}X_v\\
N_v&=a_{12}X_u+a_{22}X_v
\end{aligned}\tag{1}$$

其中 a_{ij}，i，$j=1$，2，已在第 3 章得到. 其余的系数有待确定. 系数 Γ_{ij}^K，i，j，$K=1$，2，叫做 S 关于参数表示 X 的 Christoffel 符号. 因为 $x_{uv}=x_{vu}$，所以有 $\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1$ 和 $\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2$；也就是说，Christoffel 符号关于下标是对称的.

将(1)的前四个关系式与 N 作内积，我们立刻得到 $L_1=e$，$L_2=\overline{L}_2=f$，$L_3=g$，这里 e，

f，g 是 S 的第二基本形式的系数.

为了确定 Christoffel 符号，我们将前四个关系式与 x_u 和 x_v 作内积，得到

$$\begin{cases}\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \dfrac{1}{2}E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \dfrac{1}{2}E_v\end{cases}$$
$$\begin{cases}\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \dfrac{1}{2}E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \dfrac{1}{2}G_u\end{cases} \tag{2}$$
$$\begin{cases}\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \dfrac{1}{2}G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \dfrac{1}{2}G_v\end{cases}$$

注意上述方程已分成三对，并且每一对方程组的判别式为 $EG-F^2\neq 0$. 因此，上述方程是可解的，而且可以用第一基本形式的系数 E，F，G 及其导数来计算 Christoffel 符号. 我们将不给出 Γ_{ij}^K 的明显表达式，因为对于每一具体的情形，解方程组(2)要更容易一些(见下面的例 1). 但是，基于我们能解方程组(2)这一事实，下述推论是非常重要的：所有以 Christoffel 符号表达的几何概念及性质均在等距对应下保持不变.

例 1 我们来计算旋转面的 Christoffel 符号. 旋转面的参数表示(参见 2.3 例 4)为：

$$x(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \quad f(v) \neq 0$$

因为

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2$$

我们得到

$$E_u = 0, \quad E_v = 2ff'$$
$$F_u = F_v = 0$$
$$G_u = 0, \quad G_v = 2(f'f'' + g'g'')$$

其中撇号表示对 v 的导数. 方程组(2)的头两个方程这时就给出

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}$$

接下来方程组(2)的第二对方程给出

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{ff'}{f^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0$$

最后，从方程组(2)的末尾两个方程得到

$$\Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}$$

我们已经知道，x_u，x_v 和 N 的导数关于基$\{X_u, X_v, N\}$的表达式仅涉及 S 的第一基本形式和第二基本形式. 要想得到这些系数的关系，一种办法是考虑表达式

$$(X_{uu})_v - (X_{uv})_u = 0$$

$$(X_{uv})_u-(X_{uu})_v=0$$
$$N_{uv}-N_{vu}=0 \tag{3}$$

把(1)式代入，我们可以将上面的关系式写成

$$A_1X_u+B_1X_v+C_1N=0$$
$$A_2X_u+B_2X_v+C_2N=0 \tag{3a}$$
$$A_3X_u+B_3X_v+C_3N=0$$

其中 A_i，B_i，C_i，$i=1$，2，3，是 E，F，G，e，f，g 及其导数的函数．由于 X_u，X_v，N 线性无关，因此(3a)意味着存在九个关系式：

$$A_i=0,\quad B_i=0,\quad C_i=0,\quad i=1,2,3$$

作为一个例子，我们来确定关系式 $A_1=0$，$B_1=0$，$C_1=0$．利用(1)式，关系式(3)的第一个可以写成

$$\Gamma^1_{11}X_{uv}+\Gamma^2_{11}X_{vv}+eN_v+(\Gamma^1_{11})_vX_u+(\Gamma^2_{11})_vX_v+e_vN$$
$$=\Gamma^1_{12}X_{uu}+\Gamma^2_{12}X_{vu}+fN_u+(\Gamma^1_{12})_uX_u+(\Gamma^2_{12})_uX_v+f_uN \tag{4}$$

再利用(1)式并令 X_v 的系数相等，我们得到

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}+ea_{22}+(\Gamma^2_{11})_v$$
$$=\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}+fa_{21}+(\Gamma^2_{12})_u$$

将已算得的 a_{ij} 的值代入(a_{ij} 的计算参见 3.3)，得到

$$(\Gamma^2_{12})_u-(\Gamma^2_{11})_v+\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}$$
$$=-E\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=-EK \tag{5}$$

这里，我们暂停一下计算而注意这一事实：上述方程证明了下面的 Gauss 定理．

绝妙的定量(Gauss) 曲面的 Gauss 曲率 K 在局部等距对应下保持不变．

实际上如果 x：$U\subset\mathbb{R}^2\to S$ 为 $P\in S$ 附近的参数表示并且 φ：$V\subset S\to S$ 是在 P 点附近的局部等距对应，这里 $V\subset x(U)$ 为 P 的邻域，则 $y=x\circ\varphi$ 为 S 在 $\varphi(P)$ 附近的参数表示．因为 φ 是一等距对应，第一基本形式关于参数表示 X 和 Y 的系数在对应点 q 和 $\varphi(q)$，$q\in V$ 是一致的；因而，相应的 Christoffel 符号也相等．根据方程(5)，K 可以由给定的参数表示下的 Christoffel 符号确定．由此可知，对所有 $q\in V$，$K(q)=K(\varphi(q))$．

上述表达式——K 的值由第一基本形式的系数及其导数确定——称为 Gauss 公式．这一公式首先由 Gauss 在他的著名的文章[1]中所证明．

Gauss 定理及其推论被认为是微分几何的最重要的事实之一．暂时我们只说及下面的推论．

在 4.2 已经证明过：悬链面局部等距于正螺面．从 Gauss 定理可以推出在对应点的 Gauss 曲率相等，这在几何上并非显然．

从本质上说，有意思的是：诸如 Gauss 曲率这样的概念，其定义基本上利用了曲面在空间的位置，但实际上却并不依赖于位置而只依赖于曲面的度量结构(第一基本形式)．

在下一节我们会看到，微分几何的许多别的概念也像 Gauss 曲率一样，它们仅依赖于曲面

的第一基本形式. 因此讨论第一基本形式的几何(我们叫做内蕴几何)是有意义的，因为(一旦给定第一基本形式)它可以独立地发展而无须顾及包含曲面的空间.[○]

为了多看到一点几何的结果，我们回到前面的计算. 令(4)式中 x_u 的系数相等，我们看到关系式 $A_1=0$ 可以写成

$$(\Gamma_{12}^1)_u-(\Gamma_{11}^1)_v+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1=FK \tag{5a}$$

取出方程(4)中 N 的系数，我们得到 $C_1=0$ 的形式为

$$e_v-f_u=e\Gamma_{12}^1+f(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)-g\Gamma_{11}^2 \tag{6}$$

注意关系式(5a)只不过是 Gauss 公式(5)的另一形式(当 $F\neq 0$).

对(3)的第二个表达式使用同一过程，我们看到方程 $A_2=0$ 和 $B_2=0$ 再次给出 Gauss 公式(5). 更进一步，$C_2=0$ 给出

$$f_v-g_u=e\Gamma_{22}^1+f(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1)-g\Gamma_{12}^2 \tag{6a}$$

最后，同样的程序可用于(3)的最后一个表达式，其结果是 $C_3=0$ 为恒等式而 $A_3=0$ 和 $B_3=0$ 再次给出方程(6)和(6a). 方程(6)和(6a)叫做 Mainardi-Codazzi 方程.

Gauss 公式和 Mainardi-Codazzi 方程被称为曲面论的相容性方程.

一个自然的问题是：在第一基本形和第二基本形之间，除了那些已经得到的方程以外，是否还存在另外的相容性关系式? 下面的定理表明答案是否定的. 换句话说，通过逐次导微或任何别的手续，我们不能在系数 E, F, G, e, f, g 及其导数之间得到更多的关系式. 实际上，下面的定理要更明白更严格一些，并且断言第一基本形式和第二基本形式局部地决定了曲面.

定理(Bonnet) 设 E, F, G, e, f, g 是定义在开集 $V\subset\mathbb{R}^2$ 上的可微函数，$E>0$ 和 $G>0$. 假设给定的函数形式上满足 Gauss 方程和 Mainardi-Codazzi 方程，并且 $EG-F^2>0$. 则对每一点 $q\in V$ 存在 q 的邻域 $U\subset V$ 和微分同胚 $x: U\to X(U)\subset\mathbb{R}^3$，使得正则曲面 $x(U)\subset\mathbb{R}^3$ 分别以 E, F, G 和 e, f, g 作为第一基本形式和第二基本形式的系数. 进而，如果 U 连通并且

$$\bar{x}: U\to\bar{x}(U)\subset\mathbb{R}^3$$

是满足同样条件的微分同胚，则在$\mathbb{R}^3$ 中存在平移 T 和正常线性正交变换 ρ 使得 $\overline{X}=T\circ\rho\circ X$.

此定理的证明可以在第 4 章的附录中找到.

为了今后的方便，我们来看一看当坐标邻域不含有脐点而坐标曲线为曲率线时($F=0=f$)，Mainardi-Codazzi 方程如何简化. 这时，方程(6)和(6a)可以写成

$$e_v=e\Gamma_{12}^1-g\Gamma_{11}^2,\quad g_u=g\Gamma_{12}^2-e\Gamma_{22}^1$$

考虑到 $F=0$ 意味着

$$\Gamma_{11}^2=-\frac{1}{2}\frac{E_v}{G},\quad \Gamma_{12}^1=\frac{1}{2}\frac{E_v}{E}$$

$$\Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2}\frac{G_u}{E},\quad \Gamma_{12}^2=\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}$$

我们得到 Mainardi-Codazzi 方程的形式如下：

$$e_v=\frac{E_v}{2}\left(\frac{e}{E}+\frac{g}{G}\right) \tag{7}$$

○ 这一节的其余部分到第 5 章之前都不会用到. 如果略去不读，习题 7 和 8 也要省掉.

$$g_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{e}{E}+\frac{g}{G}\right) \tag{7a}$$

习题

1. 证明：如果 x 为正交参数表示，即 $F=0$，则

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}$$

2. 证明：如果 x 为等温参数表示，即 $E=G=\lambda(u,\ v)$ 且 $F=0$，则

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\Delta(\log\lambda)$$

其中 $\Delta\varphi$ 表示函数 φ 的 Laplace 算子 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$. 由此证明：当 $E=G=(u^2+v^2+C)^{-2}$ 且 $F=0$ 时，则 $K=$常数$=4C$.

3. 证明：曲面

$$x(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\log u)$$
$$\bar{x}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$$

在点 $X(u,\ v)$和 $\overline{X}(u,\ v)$具有相同的 Gauss 曲率，但映照 $\overline{X}\circ X^{-1}$不是等距对应. 这表明 Gauss 定理的"逆"不成立.

4. 证明：球面上任一点的邻域都不能等距对应到平面内去.

5. 如果坐标曲线构成 Tchebyshef 网(参见 2.5 习题 7 和 8)，则 $E=G=1$ 且 $F=\cos\theta$. 证明：

$$K=-\frac{\theta_{uv}}{\sin\theta}$$

6. 利用 Bonnet 定理证明：不存在曲面 $x(u,\ v)$使得 $E=G=1$，$F=0$ 并且 $e=1$，$g=-1$，$f=0$.

7. 是否存在曲面 $x=x(u,\ v)$使 $E=1$，$F=0$，$G=\cos^2u$ 并且 $e=\cos^2u$，$f=0$，$g=1$?

8. 计算平面的开集的 Christoffel 符号：

a. 用笛卡儿坐标.

b. 用极坐标.

对每一情形利用 Gauss 公式计算 K.

9. 论证：下列曲面为什么两两均不局部等距?

a. 球面.

b. 柱面.

c. 鞍面 $z=x^2-y^2$.

4.4 平行移动；测地线

现在我们要系统地讨论内蕴几何. 为了揭示概念的直观含义，在定义和解释时，往往涉及曲面的外围空间. 然而，对于所引进的每个概念，我们都要证明它仅依赖于第一基本形式.

首先，我们要定义向量场的协变导数，它是平面内向量的通常微分在曲面上的类似概念. 回想一下，在正则曲面 S 的开集 $U\subset S$ 上的一个切向量场是一个对应 W，它把每点 $p\in U$ 对应于一个向量 $w(p)\in T_p(S)$. 向量场 w 在 p 点是可微的，如果对曲面 S 在 p 点附近的某一参数表示 $x(u, v)$，w 关于基 $\{x_u, x_v\}$ 的分量 a 和 $b(W=aX_u+bX_v)$ 在 p 点为可微函数. w 在 U 中可微是指 w 在每点 $p\in U$ 可微.

定义 1 设 w 为开集 $U\subset S$ 上的向量场. 设 $p\in U$ 且 $Y\in T_p(S)$. 考虑参数曲线

$$\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U,\quad \alpha(0)=p,\quad \alpha'(0)=Y$$

并设 $w(t)$，$t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$，为向量场 w 在曲线 α 上的限制. 将向量 $\frac{dw}{dt}(0)$ 垂直投影到切平面 $T_p(S)$ 上，所得的向量称为向量场 w 对于向量 y 在 p 点的协变导数. 这个协变导数记成 $\frac{Dw}{dt}(0)$ 或 $(D_yw)(p)$（图 4-8）.

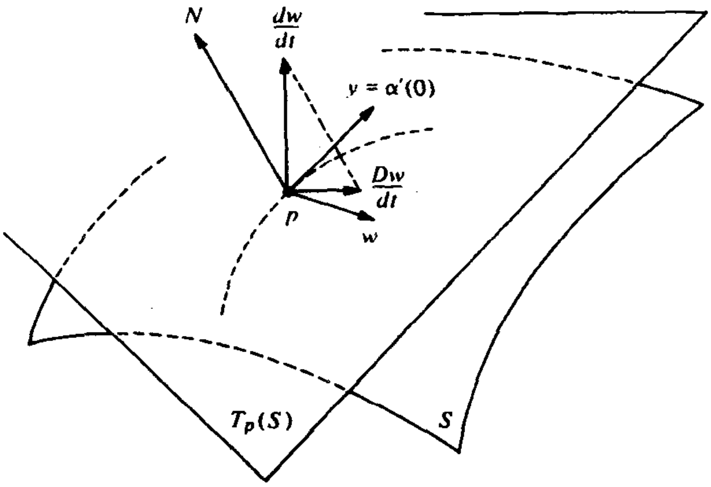


图 4-8 协变导数

上述定义利用了 S 的法向量和一条在 p 点与 Y 相切的特殊曲线 α. 为了证明协变微分是一个内蕴的概念并且与曲线 α 的选择无关，我们要在曲面 S 在 p 点附近的参数表示 $x(u, v)$ 下，给出协变导数的表达式.

设 $x(u(t), v(t))=\alpha(t)$ 是曲线 α 的表达式并设

$$\begin{aligned} w(t) &= a(u(t),v(t))X_u + b(u(t),v(t))X_v \\ &= a(t)X_u + b(t)X_v \end{aligned}$$

为 $W(t)$ 关于参数表示 $X(u, v)$ 的表达式. 则

$$\frac{dw}{dt} = a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b(X_{uu}u' + X_{vv}v') + a'X_u + b'X_v$$

其中撇号是对于 t 的导数.

因为 $\frac{Dw}{dt}$ 是 $\frac{dw}{dt}$ 在切平面上的分量，我们利用 4.3(1) 式中关于 x_{uu}，x_{uv} 和 x_{vv} 的表达式并去掉法向分量，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{Dw}{dt}=&(a'+\Gamma_{11}^1 au'+\Gamma_{12}^1 av'+\Gamma_{12}^1 bu'+\Gamma_{22}^1 bv')X_u\\&+(b'+\Gamma_{11}^2 au'+\Gamma_{12}^2 av'+\Gamma_{12}^2 bu'+\Gamma_{22}^2 bv')X_v\end{aligned}\tag{1}$$

式(1)表明$\frac{Dw}{dt}$仅依赖于向量$(u', v')=Y$而与曲线α的选择无关. 进而，曲面S在式(1)中是以 Christoffel 符号也就是以第一基本形式的面貌出现的，因此，我们的断言得到证实.

特别地，如果S是平面，我们知道可以找到参数表示使得$E=G=1$和$F=0$. 查看一下关于 Christoffel 符号的方程就可知道，这时$\Gamma_{ij}^K=0$. 因而从(1)式看出，这时协变导数就与平面上向量的通常导数一致(几何上这也能从定义 1 看出). 所以，协变导数是平面上向量的通常导数的推广.

式(1)的另一个推论是：对于仅定义在一条参数曲线上的向量场，也可以定义协变导数. 为了说清楚这件事，我们需要一些定义.

定义 2 一条参数曲线α：$[0, l]\to S$是$(0-\varepsilon, l+\varepsilon)$，$\varepsilon>0$，到$S$的可微映照在$[0, l]$上的限制. 如果$\alpha(0)=p$和$\alpha(l)=q$，我们说$\alpha$连结$p$和$q$. 如果对所有$t\in[0, l]$，$\alpha'(t)\neq 0$，就称$\alpha$是正则曲线.

今后，如果没有必要特别标出端点l，则利用记号$[0, l]=I$，这样更方便.

定义 3 设α：$I\to S$为S上的参数曲线. 沿α的向量场w是一种对应，它将每一点$t\in I$对应于一个向量

$$w(t)\in T_{\alpha(t)}(S)$$

向量场w在$t_0\in I$可微，如果对于S在$\alpha(t_0)$附近的某一参数表示$x(u, v)$，$w(t)=aX_u+bX_v$的分量$a(t)$，$b(t)$在t_0为t的可微函数. 如果w对每点$t\in I$均可微，就称w在I可微.

沿曲线α的(可微)向量场的一个例子是α的切向量场$\alpha'(t)$(图 4-9).

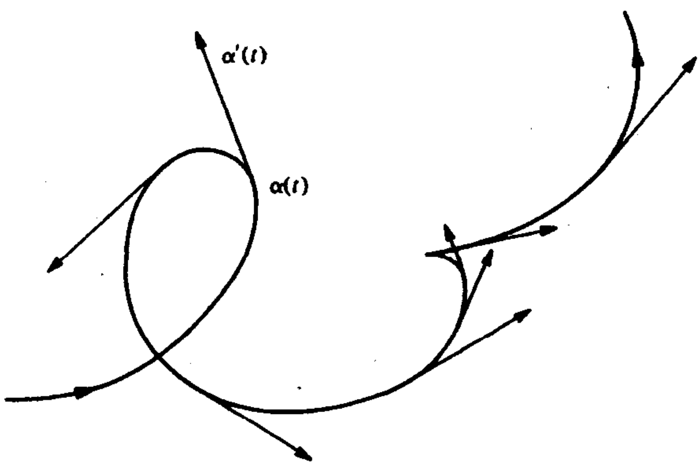


图 4-9 沿曲线α的切向量场

定义 4 设w为沿α：$I\to S$的可微向量场. 则$\frac{Dw}{dt}(t)$，$t\in I$，的表达式(1)有定义，并称为w在t的协变导数.

从曲面的外部看，为了得到沿曲线 α：$I\to S$ 的向量场 w 在 $t\in I$ 的协变导数，我们取 w 对 t 的普通导数 $\frac{dw}{dt}(t)$ 并将它正交投影到切平面 $T_{\alpha(t)}(S)$ 上．因此，当两片曲面沿一条参数曲线 α 相切时，对两曲面来说向量场 w 沿 α 的协变导数相同．

如果 $\alpha(t)$ 是 S 上的一条曲线，我们可以把它看成曲面上一个动点的轨迹．这时 $\alpha'(t)$ 是速度而 $\alpha''(t)$ 是加速度．向量场 $\alpha'(t)$ 的协变导数 $\frac{D\alpha'}{dt}$ 是加速度 $\alpha''(t)$ 的切分量．直观上讲，$\frac{D\alpha'}{dt}$ 是"在曲面 S 上看见的"点 $\alpha(t)$ 的加速度．

定义 5　沿参数曲线 α：$I\to S$ 的向量场 w 称为平行，如果对所有 $t\in I$，$\frac{Dw}{dt}=0$．

对于平面的情形，沿参数曲线的平行向量场就是沿曲线的常值向量场，即向量的长度以及与一固定方向的交角均为常数(图 4-10)．如下面的命题所述，这些性质在任何曲面上也部分地成立．

命题 1　设 w 和 v 是沿 α：$I\to S$ 的平行向量场，则 $\langle w(t),v(t)\rangle$ 为常数．特别地，$|w(t)|$ 和 $|v(t)|$ 是常数而且 $v(t)$ 和 $w(t)$ 的交角为常数．

证明　向量场 W 沿 α 平行这句话的意思是 $\frac{dw}{dt}$ 垂直于曲面在 $\alpha(t)$ 处的切平面；也就是说，

$$\langle v(t),w'(t)\rangle=0,\quad t\in I$$

另一方面，$v'(t)$ 也垂直于 S 在 $\alpha(t)$ 的切平面．因此，

$$\langle v(t),w(t)\rangle'=\langle v'(t),w(t)\rangle+\langle v(t),w'(t)\rangle=0$$

即 $\langle v(t),w(t)\rangle=$ 常数．证毕．

当然，在一任意曲面上，从我们 $\mathbb{R}^3$ 的直观来看平行向量场，也许显得很奇怪．例如，单位球面的子午线(以弧长作参数)的切向量场是 S^2 上的平行向量场(图 4-11)．实际上，由于子午线是 S^2 上的大圆，这种向量场的普通导数垂直于 S^2．因而，它的协变导数为零．

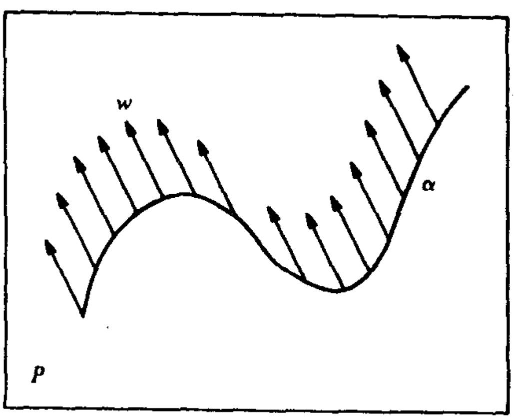


图　4-10

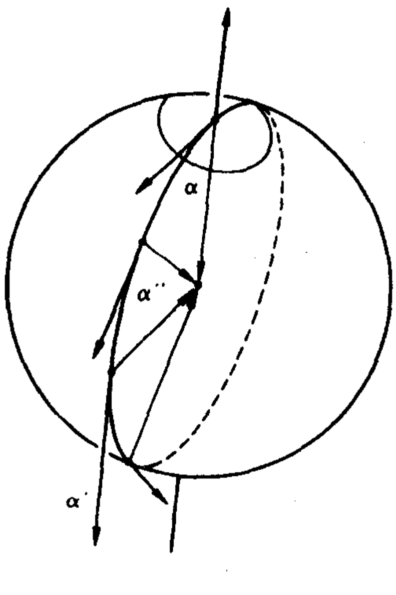


图 4-11　球面上的平行向量场

下面的命题表明：沿着参数曲线 $\alpha(t)$，总存在平行向量场，并由它在一点 t_0 的值完全确定.

命题 2 设 α：$I\to S$ 是 S 上的一条参数曲线并设 $w_0\in T_{\alpha(t_0)}(S)$，$t_0\in I$. 则沿 $\alpha(t)$存在唯一的平行向量场 $w(t)$使得 $w(t_0)=w_0$.

命题 2 的一个初等证明将在本节的后面给出. 但是，熟悉 3.6 的内容的读者会注意到，其证明是微分方程的存在唯一性定理的直接推论.

命题 2 使我们能论及一个向量沿参数曲线的平行移动.

定义 6 设 α：$I\to S$ 是一参数曲线. 并设 $W_0\in T_{\alpha(t_0)}(S)$，$t_0\in I$. 设 W 为沿 α 的平行向量场且有 $w(t_0)=w_0$. 则向量 $w(t_1)$，$t_1\in I$，称为 w_0 沿 α 到 t_1 点的平行移动.

应注意，如果曲线 α：$I\to S$，$t\in I$，是正则的，则平行移动不依赖于 $\alpha(I)$的参数表示. 实际上，如果 β：$J\to S$，$\sigma\in J$，是 $\alpha(I)$的另一正则参数表示，从方程(1)可得

$$\frac{Dw}{d\sigma}=\frac{Dw}{dt}\frac{dt}{d\sigma},\quad t\in I,\quad \sigma\in J$$

由于$\dfrac{dt}{d\sigma}\neq 0$，所以 $w(t)$平行当且仅当 $w(\sigma)$平行.

命题 1 包含了平行移动的一个有趣的性质. 固定两点 p，$q\in S$ 和一条参数曲线 α：$I\to S$，使得 $\alpha(0)=p$，$\alpha(1)=q$. 映照 p_α：$T_p(S)\to T_q(S)$把每一向量 $v\in T_p(S)$映成 v 沿 α 平行移动到 q 的向量. 命题 1 说，这个映照是一等距映照.

平行移动的另一个有趣的性质是：如果二曲面 S 和 $\overline{S}$ 沿参数曲线 α 相切，w_0 是 $T_{\alpha(t_0)}(S)=T_{\alpha(t_0)}(\overline{S})$的一个向量，则向量场 $w(t)$是 w_0 关于曲面 S 的平行移动的充要条件是 $w(t)$是 w_0 关于 $\overline{S}$ 的平行移动. 实际上，w 的协变导数$\dfrac{Dw}{dt}$关于这二张曲面是一样的. 由于平行移动的唯一性，所以结论成立.

利用上述性质，我们能举一个简单、有益的例子来说明平行移动.

例 1 设 C 为定向单位球面上余纬度为 φ 的一条纬圆(图 4-12). w_0 是 C 在一点 p 的单位切向量. 让我们来确定 w_0 沿 C 的平行移动，其中 C 以弧长 S 作参数且在 p 点 $S=0$.

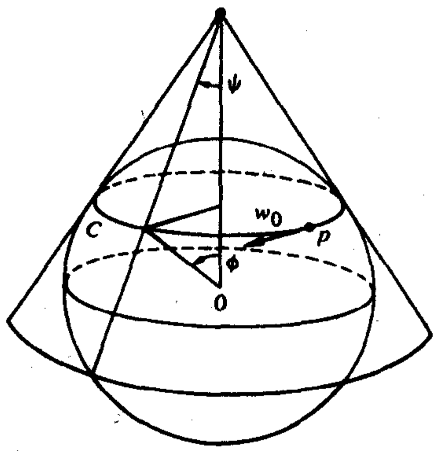


图 4-12

考虑与球面沿 C 相切的锥面. 这个锥的锥顶角 $\psi=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$. 根据上述性质，问题归结为确定 w_0 沿曲线 C 在切锥上的平行移动.

但是，这个锥去掉一条母线等距于平面的一个开集 $U\subset\mathbb{R}^2$(参看 4.2 的例 3)，U 的极坐标形式为

$$0<\rho<+\infty,\quad 0<\theta<2\pi\sin\psi$$

由于在平面上，平行移动与普通的平移一致，所以得到，当 p 点移动了路程 S 时，切向量

$t(S)$与平移向量 $w(S)$之间的定向交角为 $2\pi-\theta$，其中 θ 是相应的中心角(见图 4-13).

有时引进"折曲线"的概念是方便的. 叙述如下：

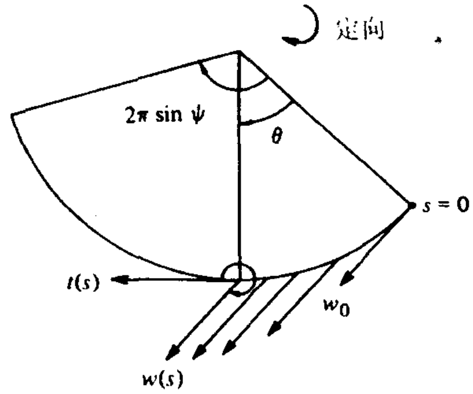


图 4-13

定义 7 映照 α: $[0, l]\to S$ 是一分段正则的参数曲线，如果 α 连续并且存在区间$[0, l]$的一个分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_K < t_{K+1} = l$$

使得 α 限制到$[t_i, t_{i+1}]$，$i=0, 1, \cdots, K$，上为正则参数曲线. 每个，$\alpha\mid_{[t_i, t_{i+1}]}$叫做 α 的正则弧.

平行移动的概念很容易推广到分段正则参数曲线. 比如说，若初值 w_0 位于区间$[t_i, t_{i+1}]$，我们可照通常的办法在正则弧 $\alpha\mid_{[t_i, t_{i+1}]}$上作平行移动；如果 $t_{i+1}\neq l$，我们把 $w(t_{i+1})$作为初值在下一段正则弧 $\alpha\mid_{[t_{i+1}, t_{i+2}]}$上作平行移动，并继续下去.

例 2[○] 例 1 是用有趣的几何办法构造平行移动的一个特例. 设 C 是 S 上的正则曲线并设 C 处处不与渐近方向相切. 考虑 S 沿曲线 C 的切平面族的包络Σ(参看 3.5 例 4). 在 C 的邻域中，包络 Σ 是正则曲面并且与曲面 S 沿 C 相切(在例 1 中，Σ 可以看作一条围绕 C 的带子，这条带子在与球面沿 C 相切的锥面内). 因此，在点 $p\in C$ 的任何向量 $w\in T_p(S)$沿 C 的平行移动，无论对于 S 或对于 Σ 都一样. 更进一步，由于 Σ 是可展曲面，所以 Gauss 曲率恒为零.

本书的后面将要证明 Gauss 曲率恒为零的曲面局部等距于平面(见 4.6 的 Minding 定理). 因此，我们可以将 p 点的邻域 $V\subset\Sigma$ 通过等距对应 φ: $V\to P$ 映到平面 P 内. 为了得到 W 沿 $V\cap C$ 的平行移动，我们把向量 $d\varphi_p(W)$在平面内作普通的平移，然后再用 $d\varphi$ 拉回到 Σ 上(图 4-14).

这从几何上构造了沿 C 的一小段弧的平行移动. 留作习题证明这一构造方法可以逐步扩充到 C 的给定的弧. (利用 Heine-Borel 定理并如同折曲线的情形去作.)

对于平面中的参数曲线 γ: $I\to\mathbb{R}^2$，如果切向量场 $\gamma'(t)$沿着 γ 平行，那么 γ 恰好是平面内的直线，在曲面上满足类似条件的参数曲线叫做测地线.

定义 8 一条非常值的参数曲线 γ: $I\to S$ 称为在 $t\in I$ 是测地的，如果切向量场 $\gamma'(t)$沿 γ 在 t 处平行；亦即

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt}=0$$

γ 是参数测地线，如果 γ 对所有 $t\in I$ 均是测地的.

根据命题 1，我们立刻得到 $|\gamma'(t)|=$常数$=C\neq 0$. 因此我们可以引进弧长 $S=Ct$ 作为参数，并证明了参数测地线 γ 的参数 t 与 γ 的弧长成比例.

注意一条参数测地线可以自相交. (例 6 将说明这一点；见图 4-20.)但是，它的切向量永不为零，所以参数表示是正则的.

显然，测地线是局部的概念. 上面的讨论使我们可以把测地线的定义拓广到 S 的由正则曲线构成的子集上去.

○ 此例用到 3.5 中有关直纹面的内容.

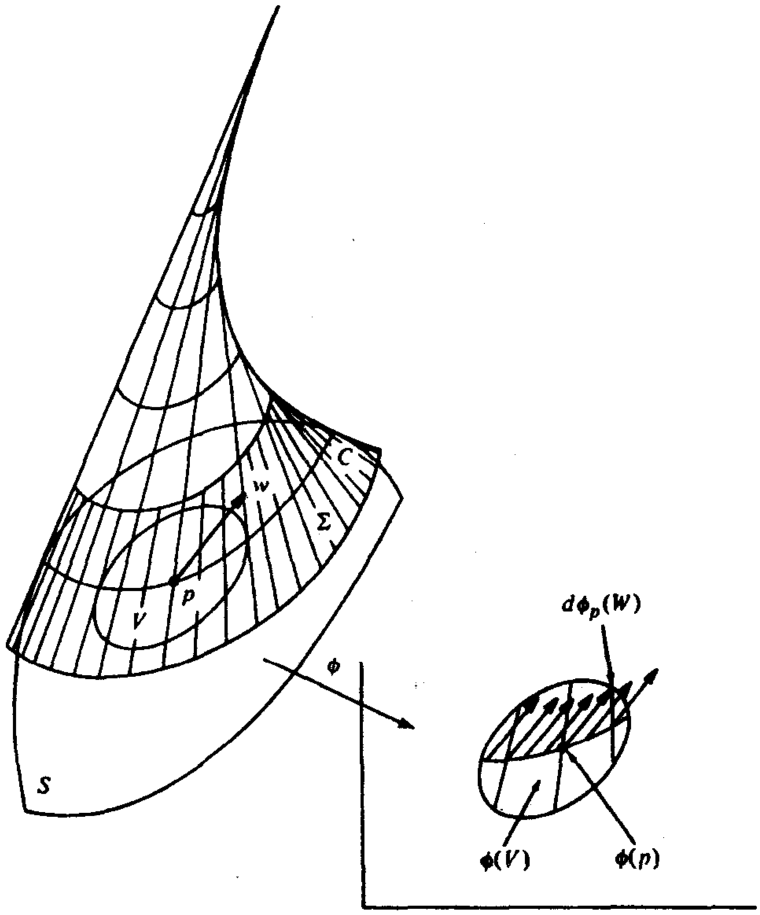


图 4-14 沿 C 的平行移动

定义 8a 曲面 S 上的一条正则连通曲线 C 称为测地线，如果对每点 $p\in C$，C 在 p 的邻域中以弧长作参数的参数表示 $\alpha(S)$ 是参数测地线；亦即，$\alpha'(S)$ 是沿 $\alpha(S)$ 的平行向量场.

注意曲面上的每条直线均适合定义 8a.

从曲面 S 的外部看，定义 8a 等于说 $\alpha''(S)=kn$ 是切平面的法向量，也就是说，平行于曲面的法线. 换句话说，一条正则曲线 $C\subset S(k\neq 0)$ 是测地线的充要条件是 C 在每点 $p\in C$ 的主法向量与曲面 S 在 p 点的法向量平行.

上述性质可以用来从几何上判定一些测地线，如下例所示.

例 3 球面 S^2 的大圆是测地线. 实际上，大圆 C 是球面与通过球心 O 的平面的交线. 由于圆周 C 的圆心是 O，所以 C 在点 $p\in C$ 的主法线与直线 OP 一致. 因为 S^2 是球面，所以与 S^2 的法线处于同一方向，因此结论成立.

本节的后面将证明一般的情形，对任意点 $p\in S$ 和 $T_p(S)$ 中的任意方向，正好存在一条测地线 $C\subset S$，使得 C 通过 p 点并与给定方向相切. 对于球面而言，过每一点，正好存在一个大圆与给定方向相切. 正如上面已经证明了的，这个大圆是测地线. 因此根据唯一性，大圆是球面上仅有的测地线.

例 4 对于圆周 $x^2+y^2=1$ 上的正圆柱面，圆柱面和垂直于轴的平面的交线显然是测地线. 理由是交线在任一点的主法线均与柱面在那点的法线相平行.

另一方面，按照定义 8a 后面的注意，柱面上的直线(母线)也是测地线.

为了说明在柱面上还存在其他的测地线，我们考虑柱面在一点 p 的邻域的参数表示(见 2.5 例 2)，

$$x(u,v) = (\cos u,\sin u,v), \quad p = x(0,0)$$

利用这个表示，曲线 C 在 p 点附近可写成 $x(u(S), v(S))$，其中 S 是 C 的弧长. 如前所述(参见 4.2 的例 1)，x 是局部等距对应，它把 uv 平面中点(0，0)的邻域 v 映入柱面内. 因为测地线的定义是局部性的并在等距对应下保持不变，所以曲线$(u(S), v(S))$必须是在 U 中过点(0，0)的测地线. 但是平面的测地线是直线，因此，除了已得到的情形以外，还有

$$u(S) = aS, \quad v(S) = bS, \quad a^2 + b^2 = 1$$

由此可知，如果一条正则曲线 C 是柱面上的测地线(除了圆和直线)，则局部形式(图 4-15)为

$$(\cos aS, \sin aS, bS)$$

这是一条螺旋线. 这样就确定了正圆柱面上的所有测地线.

注意在柱面上给定两点，如果不在平行于 xy 平面的同一圆上，则可以有无穷多条螺旋线连结这两点. 这个事实说明，柱面上的两点一般可由无穷多条测地线连结，这是与平面上的情形不一样的. 但因为去掉一条母线的柱面等距于平面，所以只有当测地线在柱面上兜"完整的圈子"时，这种情况才能发生.

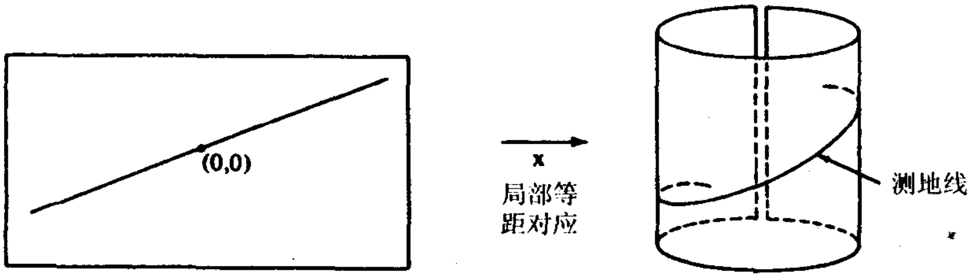


图 4-15 柱面上的测地线

为了与平面作类比，我们注意到平面上的测地线——直线的特征是曲率为零的正则曲线. 定向平面曲线的曲率是曲线的单位切向量场导数的绝对值，其正负号表示曲线的凹凸性与平面定向的关系(参见 1.5 注 1). 为了把正负号也考虑进去，引进下面的定义是有用的.

定义 9 设 w 为定向曲面 S 上沿参数曲线 α: $I\to S$ 的可微单位向量场. 由于 $w(t)$，$t\in I$，是单位向量，所以$\frac{dw}{dt}(t)$与 $w(t)$垂直，因此，

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \wedge w(t))$$

实数 $\lambda=\lambda(t)$，记作$\left[\frac{Dw}{dt}\right]$，称为 w 在 t 的协变导数的代数值.

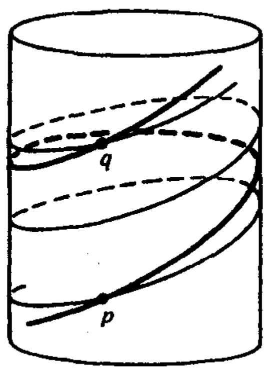


图 4-16 柱面上连结 p 和 q 的两条测地线

注意$\left[\frac{Dw}{dt}\right]$的正负号依赖于 S 的定向，并且$\left[\frac{Dw}{dt}\right]=\left\langle\frac{dw}{dt}\right.$,

$N\wedge w\rangle$.

我们也应该作一个一般性的注记. 从现在起，曲面 S 的定向在即将引进的一些概念中要起重要的作用. 细心的读者已经注意到平行移动和测地线的定义都不依赖于 S 的定向. 与此相反，如果改变曲面 S 的定向的话，下面要定义的测地曲率则要变号.

现在，对于曲面上的一条曲线，我们来定义一个与平面曲线的曲率相类似的概念.

定义 10 设 C 是定向曲面 S 上的定向正则曲线，并设 $\alpha(S)$ 是 C 在点 $p\in S$ 的附近以弧长 S 作参数的参数表示. $\alpha'(S)$ 在 p 点的协变导数的代数值 $\left[\dfrac{D\alpha'(S)}{dS}\right]=k_g$ 称为曲线 C 在 p 点的测地曲率.

一条正则曲线是测地线，其特征是测地曲率为零.

从曲面 S 的外部看，曲线 C 在 p 的侧地曲率 k_g 的绝对值是向量 $\alpha''(S)=k_n$ 的切分量的绝对值，其中 k 是 C 在 p 点的曲率而 n 是 C 在 p 点的主法向量. 回想一下，向量 k_n 的法分量的绝对值是曲线 $C\subset S$ 在 p 点的法曲率 k_n 的绝对值，我们立刻有图 4-17.

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2$$

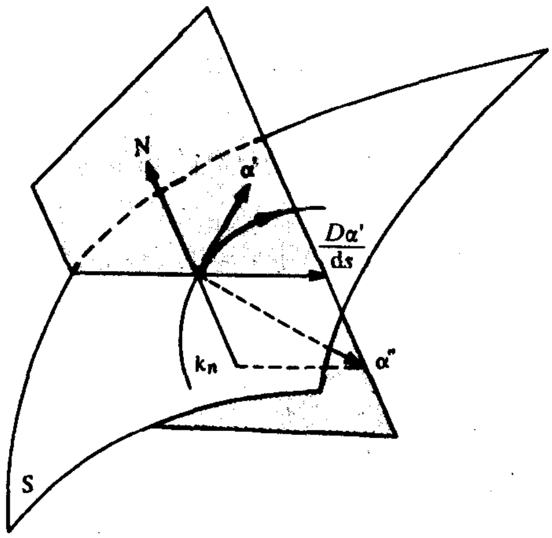


图 4-17

例如，单位球面 S^2 上余纬度为 φ 的纬圆 C，其测地曲率的绝对值可用下述关系来计算（图 4-18）：

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=k_n^2+k_g^2=1+k_g^2$$

即 $k_g^2=\cot^2\varphi$. k_g 的正负号取决于 S^2 的定向和 C 的定向.

这种外蕴解释的另一推论是：当两张曲面沿一条正则曲线 C 相切时，C 对于二曲面的测地曲率的绝对值相同.

注 如果改变曲线 C 的定向或曲面 S 的定向，则 $C\subset S$ 的测地曲率变号.

我们将要给出协变导数代数值的表达式（下面的命题 3）. 为此，我们需要作一些准备.

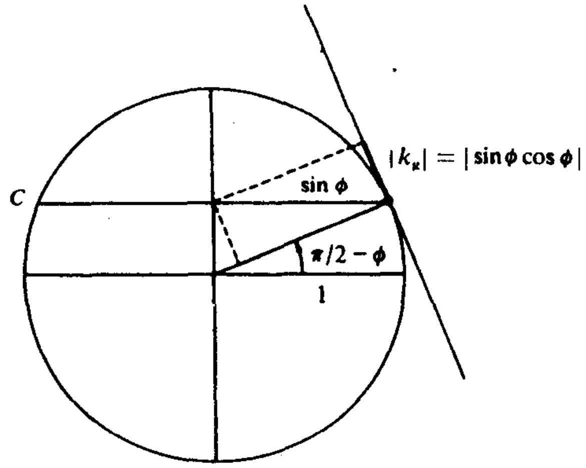


图 4-18 单位球面的纬圆的测地曲率

设 v 和 w 是沿参数曲线 α：$I \to S$ 的可微向量场，且有 $|v(t)| = |w(t)| = 1$，$t \in I$. 我们希望决定一个可微函数 φ：$I \to \mathbb{R}$，使得 $\varphi(t)$，$t \in I$，确定 $v(t)$ 到 $w(t)$ 的符合 S 定向的夹角. 为此，我们考虑沿 α 的可微向量场 $\bar{v}$，使得 $\{v(t), \bar{v}(t)\}$ 对所有 $t \in I$ 构成正定向的标准正交基. 这样，$w(t)$ 可表成

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t)$$

其中，a 和 b 是 I 上的可微函数并且 $a^2 + b^2 = 1$.

下面引理 1 说明：只要确定了从 $v(t_0)$ 到 $w(t_0)$ 的角度 φ_0，则可以可微地扩充到 I 从而得到所要的函数.

引理 1 设 a 和 b 是 I 上的可微函数且 $a^2 + b^2 = 1$. 设 φ_0 满足 $a(t_0) = \cos\varphi_0$，$b(t_0) = \sin\varphi_0$. 则可微函数

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} (ab' - ba')dt$$

适合 $\cos\varphi(t) = a(t)$，$\sin\varphi(t) = b(t)$，$t \in I$，以及 $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

证明 只需证明函数

$$\begin{aligned}&(a - \cos\varphi)^2 + (b - \sin\varphi)^2\\ &= 2 - 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\end{aligned}$$

恒等于零. 或者说

$$A = a\cos\varphi + b\sin\varphi = 1$$

利用 $aa' = -bb'$ 及 φ 的定义，容易得到

$$\begin{aligned}A' &= -a(\sin\varphi)\varphi' + b(\cos\varphi)\varphi' + a'\cos\varphi + b'\sin\varphi\\ &= -b'(\sin\varphi)(a^2 + b^2) - a'(\cos\varphi)(a^2 + b^2) + a'\cos\varphi + b'\sin\varphi\\ &= 0\end{aligned}$$

因此，$A(t) =$ 常数，但因 $A(t_0) = 1$，引理得证. 证毕.

现在我们把二个单位向量场沿一条曲线的协变导数与它们的夹角的变化联系起来.

引理 2 设 $v(t)$ 和 $w(t)$ 是沿曲线 α：$I \to S$ 的可微向量场，而且 $|w(t)| = |v(t)| = 1$，

$t\in I$. 则

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right]-\left[\frac{Dv}{dt}\right]=\frac{d\varphi}{dt}$$

其中 φ(如引理 1 所给出)可微地度量了 v 到 w 的夹角.

证明 引进向量 $\bar{v}=N\wedge v$ 和 $\bar{w}=N\wedge w$. 则

$$W=(\cos\varphi)v+(\sin\varphi)\bar{v} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}&=N\wedge w\\&=(\cos\varphi)N\wedge v+(\sin\varphi)N\wedge\bar{v}\\&=(\cos\varphi)\bar{v}-(\sin\varphi)v\end{aligned} \tag{3}$$

将式(2)关于 t 作微分, 我们得到

$$W'=-(\sin\varphi)\varphi' v+(\cos\varphi)v'+(\cos\varphi)\varphi'\bar{v}+(\sin\varphi)\bar{v}'$$

将上式与 $\bar{w}$ 作内积并利用(3)式, 再注意到 $\langle v,\bar{v}\rangle=0$, $\langle v,v'\rangle=0$, 我们得到

$$\begin{aligned}\langle w',\bar{w}\rangle&=(\sin^2\varphi)\varphi'+(\cos^2\varphi)\langle v',\bar{v}\rangle+(\cos^2\varphi)\varphi'-(\sin^2\varphi)\langle\bar{v}',v\rangle\\&=\varphi'+(\cos^2\varphi)\langle v',\bar{v}\rangle-(\sin^2\varphi)\langle\bar{v}',v\rangle\end{aligned}$$

另一方面, 因为 $\langle v,\bar{v}\rangle=0$, 即 $\langle v',\bar{v}\rangle=-\langle v,\bar{v}'\rangle$, 所以有

$$\langle w',\bar{w}\rangle=\varphi'+(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\langle v',\bar{v}\rangle=\varphi'+\langle v',\bar{v}\rangle$$

因为

$$\langle w',\bar{w}\rangle=\left\langle\frac{dw}{dt},\bar{w}\right\rangle=\left[\frac{Dw}{dt}\right]\langle N\wedge w,\bar{w}\rangle=\left[\frac{Dw}{dt}\right]$$

由此可得

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right]=\langle w',\bar{w}\rangle=\varphi'+\langle v',\bar{v}\rangle=\frac{d\varphi}{dt}+\left[\frac{Dv}{dt}\right]$$

引理得证. 证毕.

下面的说明是上述引理的直接推论. 设 C 是 S 上的正则定向曲线, $\alpha(S)$ 是 C 在 p 点附近弧长 S 作参数的参数表示. 设 $v(S)$ 是沿 $\alpha(S)$ 的平行向量场. 令 $W(S)=\alpha'(S)$, 则有

$$k_g(S)=\left[\frac{D\alpha'(S)}{dS}\right]=\frac{d\varphi}{dS}$$

换言之, 测地曲率是曲线的切线与沿曲线平行的向量场夹角的变化率. 在平面的情形, 平行向量场的方向不变, 测地曲率就是通常的曲率.

现在我们可以得到前面讲过的协变导数代数值的表达式. 一旦我们说及定向曲面的参数表示, 总假定这一参数表示是与曲面的定向相容的.

命题 3 设 $x(u,v)$ 为定向曲面 S 的某一邻域的正交参数表示(即 $F=0$), 以及 $w(t)$ 是沿曲线 $x(u(t),v(t))$ 的可微单位向量场. 则

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right]=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dt}-E_v\frac{du}{dt}\right\}+\frac{d\varphi}{dt}$$

其中 $\varphi(t)$ 是从 x_u 到 $w(t)$ 的定向夹角.

证明 设 $e_1=x_u/\sqrt{E}$, $e_2=x_v/\sqrt{G}$ 为坐标曲线的单位切向量. 注意到 $e_1\wedge e_2=N$, 这里 N

是曲面 S 的定向，利用引理 2，我们有

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right]=\left[\frac{de_1}{dt}\right]+\frac{d\varphi}{dt}$$

其中 $e_1(t)=e_1(u(t),\ v(t))$ 为向量场 e_1 到曲线 $x(u(t),\ v(t))$ 的限制．现在

$$\left[\frac{De_1}{dt}\right]=\left\langle\frac{de_1}{dt},\ N\wedge e_1\right\rangle=\left\langle\frac{de_1}{dt},\ e_2\right\rangle$$

$$=\langle(e_1)_u,\ e_2\rangle\frac{du}{dt}+\langle(e_1)_v,\ e_2\rangle\frac{dv}{dt}$$

另一方面，由于 $F=0$，我们有

$$\langle x_{uu},x_v\rangle=-\frac{1}{2}E_v$$

因此

$$\langle(e_1)_u,\ e_2\rangle=\left\langle\left(\frac{x_u}{\sqrt{E}}\right)_u,\quad\frac{x_v}{\sqrt{G}}\right\rangle=-\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}$$

类似地

$$\langle(e_1)_v,e_2\rangle=\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}$$

将这些关系式代入到 $\left[\frac{Dw}{dt}\right]$ 的表达式，我们最终得到

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right]=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dt}-E_v\frac{du}{dt}\right\}+\frac{d\varphi}{dt}$$

证毕．

作为命题 3 的一个应用，我们来证明平行移动的存在性和唯一性（命题 2）．

命题 2 的证明 首先假设参数曲线 α：$I\to S$ 包含于正交参数表示 $x(u,\ v)$ 的一个坐标邻域内．采用命题 3 的记号，则向量场 w 平行的条件变为

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dt}-E_v\frac{du}{dt}\right\}=B(t)$$

x_u 到 w_0 的定向夹角记作 φ_0．向量场 w 完全由

$$\varphi=\varphi_0+\int_{t_0}^{t}B(t)dt$$

确定，这证明了 w 的存在性和唯一性．

如果 $\alpha(I)$ 不包含在一个坐标邻域内，我们利用 I 的紧致性把 $\alpha(I)$ 分成有限段，使每一段包含在一个坐标邻域内．在这些段的非空交集中，利用前一部分证明的唯一性，容易把结论推广到整个区间．证毕．

命题 3 的另一个应用是测地曲率的下述表达式——Liouville 公式．

命题 4(Liouville) 设 $\alpha(S)$ 是定向曲面 S 上的一条正则定向曲线 C 在一点 $p\in S$ 附近的弧长参数表示．并设 $x(u,\ v)$ 是 S 在 p 点附近的正交参数表示以及 $\varphi(S)$ 是 x_u 与 $\alpha'(S)$ 的定向夹角．则

$$k_g = (k_g)_1\cos\varphi + (k_g)_2\sin\varphi + \frac{d\varphi}{dS}$$

其中$(k_g)_1$和$(k_g)_2$分别为坐标曲线 v=常数和 u=常数的测地曲率.

证明 在命题 3 中置 $w=\alpha'(S)$，我们得到

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dS} - E_v\frac{du}{dS}\right\} + \frac{d\varphi}{dS}$$

沿坐标曲线 v=常数，$u=u(S)$，我们有$\frac{dv}{dS}=0$和$\frac{du}{dS}=1/\sqrt{E}$；因此

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}$$

类似地有

$$(k_g)_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}$$

将这些关系式代入到上面 k_g 的公式中，我们得到

$$k_g = (k_g)_1\sqrt{E}\frac{du}{dS} + (k_g)_2\sqrt{G}\frac{dv}{dS} + \frac{d\varphi}{dS}$$

因为

$$\sqrt{E}\frac{du}{dS} = \left\langle \alpha'(S),\ \frac{x_u}{\sqrt{E}}\right\rangle = \cos\varphi \text{ 及 } \sqrt{G}\frac{dv}{dS} = \sin\varphi$$

我们最后得到想要的

$$k_g = (k_g)_1\cos\varphi + (k_g)_2\sin\varphi + \frac{d\varphi}{dS}$$

证毕.

现在我们将要导出在一个坐标邻域中的测地线方程. 为此，令 γ: $I\to S$ 是 S 中的参数曲线并设 $x(u, v)$是 S 在点 $\gamma(t_0)$，$t_0\in I$，的邻域 v 中的参数表示. 令 $J\subset I$ 是包含 t_0 的开区间，使得 $\gamma(J)\subset V$. 设 $x(u(t), v(t))$，$t\in J$，是 γ: $J\to S$ 关于参数表示 x 的表达式. 因而，切向量场 $\gamma'(t)$，$t\in J$，为

$$w = u'(t)x_u + v'(t)x_v$$

所以 w 为平行向量场等价于微分方程组

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

实际上，在方程(1)中令 $a=u'$和 $b=v'$，并令 x_u 和 x_v 的系数为零，即得上式.

换言之，γ: $I\to S$ 是测地线的充要条件是γ 在每个区间 $J\subset I$ 中适合方程(4)，这里区间 J 使得$\gamma(J)$包含在某一坐标邻域内. 方程组(4)称为 S 的*测地线微分方程*.

这一事实——测地线由方程式(4)决定——的一个重要推论是下述命题.

命题 5 给定一点 $p\in S$ 和一向量 $w\in T_p(S)$，$w\neq 0$，存在 $\varepsilon>0$ 和唯一的一条参数测地线 γ: $(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$ 使得 $\gamma(0)=p$，$\gamma'(0)=w$.

在 4.5 中，我们将说明如何从关于向量场的定理推出命题 5.

注 在命题 5 中取 $w\neq 0$ 的原因是：我们在参数测地线的定义中已经排除了常值曲线(参见定义 8).

在本节的其余部分，我们要讲讲微分方程(4)的一些几何应用．读者如果不想读这些材料，则可以略去．这时，习题 18，20 和 21 也要略去．

例 5 我们利用方程(4)局部地研究旋转面的测地线(见 2.3 例 4)旋转面的参数表示为

$$x = f(v)\cos u, \quad y = f(v)\sin u, \quad z = g(v)$$

按照 4.3 的例 1，Christoffel 符号为

$$\Gamma_{11}^{1} = 0, \quad \Gamma_{11}^{2} = -\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}, \quad \Gamma_{12}^{1} = \frac{ff'}{f^2}$$

$$\Gamma_{12}^{2} = 0, \quad \Gamma_{22}^{1} = 0, \quad \Gamma_{22}^{2} = \frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}$$

将这些量代入方程(4)变为

$$\begin{aligned} &u'' + \frac{2ff'}{f^2}u'v' = 0 \\ &v'' - \frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}(u')^2 + \frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}(v')^2 = 0 \end{aligned} \tag{4a}$$

我们将从这些方程得到一些推论．

首先，以弧长作参数的子午线 $u=$常数，$v=v(S)$为测地线．事实上，由 $u=$常数，(4a)的第一个方程显然成立．第二个方程变为

$$v'' + \frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}(v')^2 = 0$$

因为第一基本形式沿子午线 $u=$常数，$v=v(S)$为

$$((f')^2+(g')^2)(v')^2 = 1$$

所以

$$(v')^2 = \frac{1}{(f')^2+(g')^2}$$

对上式求导数即得

$$2v'v'' = -\frac{2(f'f''+g'g'')}{((f')^2+(g')^2)^2}v' = -\frac{2(f'f''+g'g'')}{(f')^2+(g')^2}(v')^3$$

或者，由于 $v'\neq 0$，

$$v'' = -\frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}(v')^2$$

即，沿着子午线方程组(4a)的第二个也满足，这表明子午线实际上是测地线．

现在我们来确定什么样的纬圆 $v=$常数，$u=u(S)$(以弧长作参数)是测地线．(4a)的第一个方程给出 $u'=$常数，而第二个方程变成

$$\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}(u')^2 = 0$$

为使纬圆 $v=$常数，$u=u(S)$成为测地线，必须有 $u'\neq 0$．因为$(f')^2+(g')^2\neq 0$，$f\neq 0$，故由上述方程得 $f'=0$．

换言之，旋转曲面上的纬圆是测地线的必要条件为：过这纬圆上一点的母线在此点的切线与旋转轴平行(图 4-19)．此条件显然是充分的，因为它意味着此纬圆的主法线与曲面的法线一致(图 4-19)．

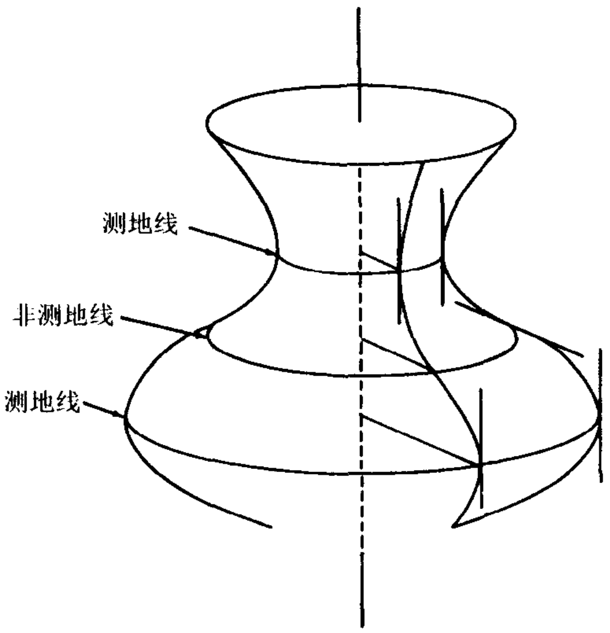


图 4-19

为了今后的应用，我们从方程(4a)的头一个得到一个有趣的几何推论，称为 Clairaut 关系. 注意到方程(4a)中的头一个可写作

$$(f^2u')' = f^2u'' + 2ff'u'v' = 0$$

因此，

$$f^2u' = 常数 = C$$

另一方面，一条测地线和与其相交的纬线所成的交角 θ，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，为

$$\cos\theta = \frac{|\langle x_u, x_u u' + x_v v'\rangle|}{|x_u|} = |fu'|$$

其中$\{x_u, x_v\}$是给定参数表示相关的基向量场. 因为 $f=r$ 是过交点的纬圆的半径，所以得到 Clairaut 关系：

$$r\cos\theta = 常数 = |C|$$

在下一个例子中，我们将说明如何利用这一关系式. 也参看习题 18，20 和 21.

最后，我们要指出方程组(4a)可用不定积分求解. 设 $u=u(S)$，$v=v(S)$是以弧长作参数的测地线，并设这条测地线既不是子午线也不是纬线. 方程组(4a)的第一个可以写成 $f^2u'=$常数$=C\neq0$.

首先注意第一基本形式沿$(u(S), v(S))$为

$$1 = f^2\left(\frac{du}{dS}\right)^2 + ((f')^2+(g')^2)\left(\frac{dv}{dS}\right)^2 \tag{5}$$

结合方程组(4a)的第一个方程，它等价于方程组(4a)的第二个方程. 事实上，将 $f^2u'=C$ 代入到方程(5)，我们得到

$$\left(\frac{dv}{dS}\right)^2((f')^2+(g')^2)=-\frac{C^2}{f^2}+1$$

因此，关于 S 求导，

$$2\frac{dv}{dS}\cdot\frac{d^2v}{dS^2}((f')^2+(g')^2)+\left(\frac{dv}{dS}\right)^2(2f'f''+2g'g'')\frac{dv}{dS}$$
$$=\frac{2ff'C^2}{f^4}\frac{dv}{dS}$$

因为$(u(S),v(S))$不是纬圆，所以上述方程等价于(4a)的第二个方程.（当然，测地线可以与一条非测地的纬线相切，因而 $v'(S)=0$. 但是，Clairaut 关系表明这种情形只能在孤立点发生）.

另一方面，因为 $C\neq 0$(由于此测地线不是子午线)，我们有 $u'(S)\neq 0$. 由此，可以反解 $u=u(S)$得到 $S=S(u)$，因而 $v=v(S(u))$. 将方程(5)乘以$\left(\frac{dS}{du}\right)^2$，则得

$$\left(\frac{dS}{du}\right)^2=f^2+((f')^2+(g')^2)\left(\frac{dv}{dS}\cdot\frac{dS}{du}\right)^2$$

或利用

$$\left(\frac{dS}{du}\right)^2=f^4/C^2\text{，得}$$

$$f^2=C^2+C^2\frac{(f')^2+(g')^2}{f^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

即

$$\frac{dv}{du}=\frac{1}{C}f\sqrt{\frac{f^2-C^2}{(f')^2+(g')^2}}$$

因此

$$u=C\int\frac{1}{f}\sqrt{\frac{(f')^2+(g')^2}{f^2-C^2}}dv+\text{常数}\tag{6}$$

这就是旋转面上既非子午线又非纬线的测地线段的方程.

例 6 我们将要证明在旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上，任何一条非子午线的测地线自身相交无穷多次.

设 p_0 为抛物面上一点并设 P_0 是过 p_0 的半径为 r_0 的纬圆. 设 r 为过 p_0 的参数测地线，与 P_0 的交角为 θ_0. 根据 Clairaut 关系，

$$r\cos\theta=\text{常数}=|C|,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

我们得到 θ 随 r 增加而增加.

因此，随着纬度的增加，θ 也增大. 在某些旋转面上，r 可能渐近地趋于一条子午线. 待一会儿我们要说明对于旋转抛物面，这种情形不可能出现. 也就是说，测地线 r 与所有子午线相交. 因此，r 要在旋转抛物面上绕无穷多圈.

另一方面，随着纬度的减小，角度 θ 也减小并趋向于零，这时对应于半径为 $|C|$ 的纬圆(注意若 $\theta_0\neq 0$ 则 $|C|<r$). 本书的后面要证明在旋转面上没有测地线能渐近地趋向于一条非测地线的纬圆(4.7). 因为在旋转抛物面上没有一个纬圆是测地线，所以，测地线 r 实际上与半径为 $|C|$ 的纬圆相切于某点 p_1. 由于 $\cos\theta$ 的最大值是 1，所以从 p_1 开始 r 的值将要增大，

因此，又出现如前所述的情况．当 r 增大时，测地线将绕着旋转抛物面跑无穷多圈，并且与另一分支相交无穷多次(图 4-20)．

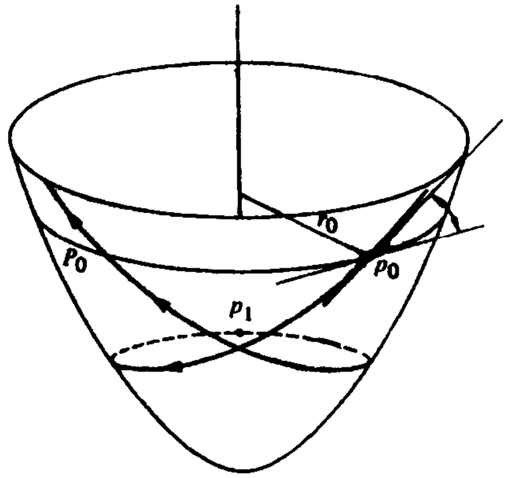


图 4-20

注意如果 $\theta_0=0$，则初始状态是在 p_1 点的状态．

剩下要证的是：当 r 增加时，测地线 r 与抛物面的所有子午线相交．首先注意测地线不能和子午线相切．否则，由命题 5 的唯一性部分，测地线 r 应和子午线重合．因为夹角 θ 随 r 增大，如果 r 不穿过所有子午线，则必须渐近地趋于某一子午线，例如说 M．

我们假设这种情形成立．选择抛物面 $z=x^2+y^2$ 的一个局部坐标系

$$x = v\cos u,\quad y = v\sin u,\quad z = v^2$$

$$0 < v < +\infty,\quad 0 < u < 2\pi$$

使得 M 在相应的坐标邻域中为 $u=u_0$．根据假设，当 $v\to+\infty$ 时，$u\to u_0$．另一方面，测地线 r 在上述坐标系中的方程(参见例 5 方程(6)并选取 r 的定向使 $C>0$)如下

$$u = C\int \frac{1}{v}\sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-C^2}}dv + \text{常数} > C\int \frac{dv}{v} + \text{常数}$$

最后的不等式是由于

$$\frac{1+4v^2}{v^2-C^2} > 1$$

从上述不等式知道当 $v\to\infty$ 时 u 无限增加，这与 r 渐近地趋向于 M 相矛盾．因此，r 与所有子午线相交．这就证明了本例开头所作的结论．

习题

1. a. 证明：如果曲线 $C\subset S$ 既是曲率线又是测地线，则 C 是平面曲线．

b. 证明：如果一条非直线的测地线是平面曲线，则它也是曲率线．

c. 举一个曲率线的例子，使得它是平面曲线但不是测地线．

2. 证明：一条曲线 $C\subset S$ 既是渐近线又是测地线的充要条件是 C 是直线段．

3. 不用命题 5 证明直线是平面的仅有的测地线.

4. 设 v 和 w 是沿曲线 α：$I\to S$ 的向量场. 证明：

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\ w(t)\rangle=\left\langle\frac{Dv}{dt},\ w(t)\right\rangle+\left\langle v(t),\ \frac{DW}{dt}\right\rangle$$

5. 考虑将圆周

$$(x-a)^2+z^2=r^2,\quad y=0,\quad a>r>0$$

绕 z 轴旋转所得的旋转环面. 由点 $(a+r,\ 0)$，$(a-r,\ 0)$，$(a,\ r)$ 生成的纬圆分别称为最大纬圆，最小纬圆和上纬圆. 检验这些纬圆中哪一个是

a. 测地线.

b. 渐近线.

c. 曲率线.

*6. 计算习题 5 中环面的上纬圆的测地曲率.

7. 圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与过 x 轴且和 xy 平面成 θ 角的平面相交.

a. 证明：交线是椭圆 C.

b. 计算：椭圆 C 在其长短轴的顶点处关于柱面的测地曲率的绝对值.

*8. 证明：如果一连通曲面的所有测地线均为平面曲线，则此曲面包含在平面或球面内.

*9. 考虑球面的二条子午线 C_1 和 C_2，它们在交点 p_1 处的夹角为 φ. 将 C_1 在交点 p_1 处的切向量 W_0 分别沿 C_1 和 C_2 平行移动到另一个交点 P_2，记作 W_1 和 W_2. 计算从 W_1 到 W_2 的夹角.

*10. 证明：一条定向曲线 $C\subset S$ 在一点 $P\in C$ 的测地曲率，等于把曲线 C 沿曲面在 P 点的法方向投影到切平面 $T_p(S)$ 上所得的平面曲线的曲率.

*11. 严格叙述并证明：协变导数的代数值在保持定向的等距对应下不变.

*12. 我们称曲面 S 上的一组正则曲线为 S 的**可微曲线族**，如果这组曲线的切线构成可微方向场(见 3.4). 假定曲面 S 允许两组正交测地线构成的可微曲线族. 证明：S 的 Gauss 曲率为零.

*13. 设 V 是曲面 S 在点 P 的一个连通邻域. 并设在 V 中任何二点间的平行移动不依赖于连结这二点的曲线. 证明：V 的 Gauss 曲率为零.

14. 设 S 是定向正则曲面. 令 α：$I\to S$ 是以弧长作参数的曲线. 在点 $P=\alpha(S)$，考虑三个单位向量(Darboux 标架) $T(S)=\alpha'(S)$，$N(S)=$ 曲面 S 在 P 点的法向量，$V(S)=N(S)\wedge T(S)$. 证明：

$$\begin{cases}\dfrac{dT}{dS}=0+aV+bN\\[2ex]\dfrac{dV}{dS}=-aT+0+CN\\[2ex]\dfrac{dN}{dS}=-bT-CV+0\end{cases}$$

其中 $a=a(S)$，$b=b(S)$，$C=C(S)$，$S\in I$. 上述公式是 Frenet 公式关于标架 T，V，N 的类比. 为了建立这些系数的几何意义，证明：

a. $C=-\left\langle\frac{dN}{dS}, V\right\rangle$；由此得出：$\alpha(I)\subset S$ 为曲率线的充要条件是 $C\equiv 0$（C 称为 α 的测地挠率；参看 3.2 的习题 19）.

b. b 是 $\alpha(I)\subset S$ 在 P 点的法曲率.

c. a 是 $\alpha(I)\subset S$ 在 P 点的测地曲率.

15. 设 P_0 是单位球面 S^2 的极点. q 和 r 是赤道上的两点，使得子午线 p_0q 和 p_0r 在 p_0 的夹角为 θ. 考虑子午线 p_0q 在 p_0 点的单位切向量 v，并沿着由子午线 p_0q，纬圆 qr 和子午线 rp_0 构成的闭曲线作平行移动(图 4-21).

a. 确定 v 的最终位置与 v 的夹角.

b. 若点 q 和 r 取在余纬度为 φ 的纬圆上，再做一次 a(参见例 1).

*16. 设 p 是定向曲面 S 的一点并假设存在 p 点的一个邻域，其中的点均为抛物点. 证明：过 p 点的(唯一的)渐近曲线是一条直线的开线段. 举例说明“具有抛物点邻域”的条件是不可少的.

17. 设 $\alpha: I\to S$ 是以弧长作参数的曲线且曲率不为零. 考虑参数曲面(2.3)

$$x(S,v)=\alpha(S)+vb(S),\quad S\in I,\quad -\varepsilon<v<\varepsilon,\quad \varepsilon>0$$

其中 b 是 α 的从法向量. 证明：若 ε 充分小，则 $x(I\times(-\varepsilon,\varepsilon))=S$ 是正则曲面，而 $\alpha(I)$ 是 S 上的一条测地线(因此，每条曲线是由其从法线生成的曲面上的测地线).

*18. 考虑旋转双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上的一条测地线；这条测地线从点 p(p 在上半部分 $z>0$)出发并与过 p 的纬圆成 θ 角，使得 $\cos\theta=\frac{1}{r}$，其中 r 为 p 到 z 轴的距离. 证明：这条测地线沿纬度减小的方向渐近地趋向于纬线 $x^2+y^2=1$，$z=0$(图 4-22).

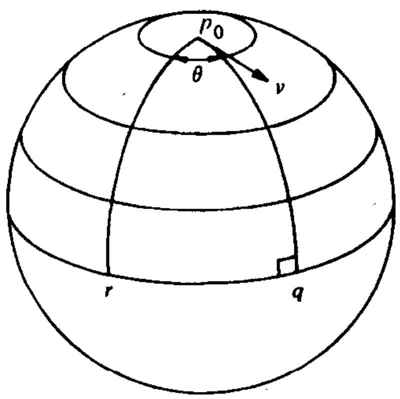


图 4-21

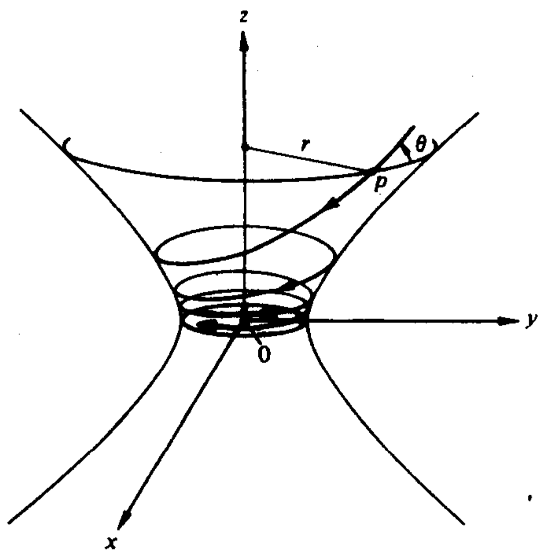


图 4-22

* 19. 证明：当测地线的微分方程(4)用弧长作参数时，除了坐标曲线，(4)的第二个方程是(4)的第一个方程的推论.

* 20. 设 T 为旋转环面. 假定 T 的参数表示为(参见 2-2 例 6)

$$X(u,v)=(r\cos u+a)\cos v,\quad (r\cos u+a)\sin v, r\sin u)$$

证明：

a. 若一条测地线与纬圆 $u=\frac{\pi}{2}$ 相切，则它完全在区域 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内.

b. 设一条测地线与纬圆 $u=0$ 相交，其交角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$. 若

$$\cos\theta<\frac{a-r}{a+r}$$

则它也与纬圆 $u=\pi$ 相交.

21. Liouville 曲面为：存在一局部坐标系 $x(u, v)$ 使其第一基本形的系数适合

$$E=G=U+V,\quad F=0$$

其中 $U=U(u)$ 仅是 u 的函数，$V=V(v)$ 仅是 v 的函数. 注意 Liouville 曲面是旋转面的推广并证明(参见例 5)：

a. Liouville 曲面的测地线可以写成不定积分的形式

$$\int\frac{du}{\sqrt{U-C}}=\pm\int\frac{dv}{\sqrt{V+C}}+C_1$$

其中 C 和 C_1 是由初始条件确定的常数.

b. 设某一测地线与曲线 $v=$ 常数所成的夹角为 θ，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. 则

$$U\sin^2\theta-V\cos^2\theta=\text{常数}$$

(这是 Clairaut 关系式对 Liouville 曲面的类比).

22. 设 $S^2=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$ 并设 $p\in S^2$. 对每一分段正则的参数曲线 α：$[0, l]\to S^2$，$\alpha(0)=\alpha(l)=P$，定义映照 P_α：$T_p(S^2)\to T_p(S^2)$ 如下：把每个向量 $v\in T_p(S^2)$ 对应于 v 沿 α 平移一周回到 p 点的向量. 根据命题 1，P_α 是等距对应. 证明：对于 $T_p(S^2)$ 的任一旋转 R，均存在一条 α 使得 $R=P_\alpha$.

23. 证明：单位球面

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad x^2+y^2+z^2=1\}$$

的等距对应是 $\mathbb{R}^3$ 的线性正交变换在 S^2 上的限制.

4.5 Gauss-Bonnet 定理及其应用

在这一节，我们要阐述 Gauss-Bonnet 定理和一些推论. 在 Gauss-Bonnet 定理的证明中所涉及的几何是十分简单的，其难点在于一些拓扑的事实. 这些事实将不予证明.

Gauss-Bonnet 定理也许是曲面微分几何的最深刻的定理. 此定理的最初形式曾由 Gauss 在一篇著名的讨论曲面上的测地三角形(即其三边均为测地弧)的文章[1]中叙述过. 大体上说，

一个测地三角形 T 三个内角 φ_1，φ_2，φ_3 的和超过 π 的部分等于 Gauss 曲率 K 在 T 上的积分（图 4-23）．也就是说，

$$\sum_{i=1}^{3}\varphi_i-\pi=\iint_T K d\sigma$$

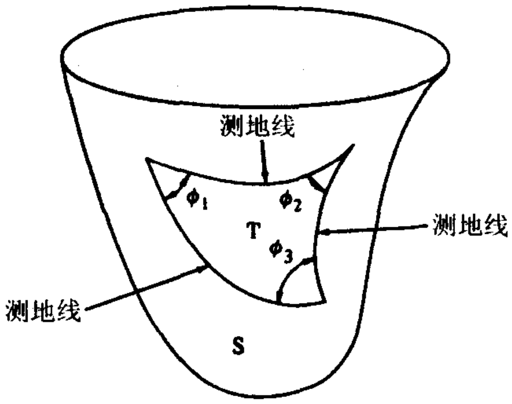


图 4-23　测地三角形

例如当 $K\equiv0$ 时，我们有 $\sum\varphi_i=\pi$．这是中学几何里的 Thales 定理在曲率为零的曲面上的推广．再者，若 $K\equiv1$，则有 $\sum\varphi_i-\pi=T$ 的面积>0．由此可知，在单位球面上，测地三角形的内角和大于 π 并且超过 π 的部分正好是 T 的面积．类似地，在伪球面（3.3 习题 6）上，任何测地三角形的内角和小于 π（图 4-24）．

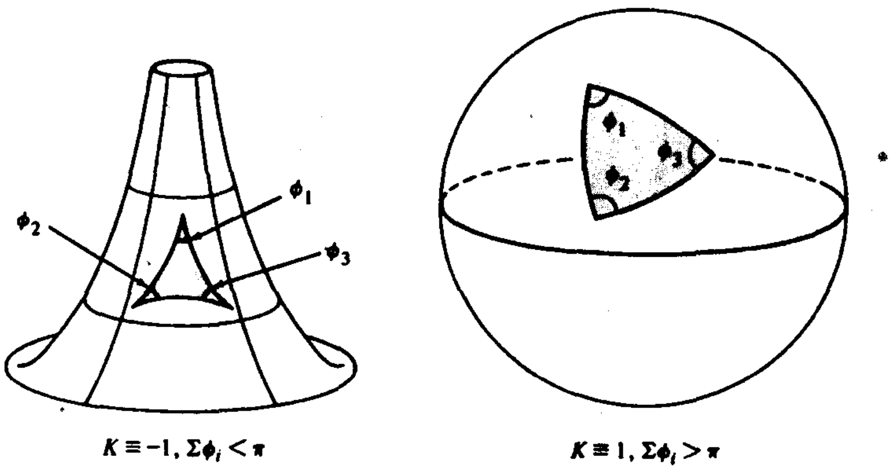


图　4-24

O. Bonnet 把上述定理推广到由一条非测地的简单曲线所界定的区域（见下面的（1）式）．为了再作进一步的推广，比如说，推广到紧致曲面，则需要考虑其拓扑性质．实质上，Gauss-Bonnet 定理的最重要的特点之一是：为紧致曲面的拓扑和它的曲率的积分提供了一个有价值的联系（见下面的推论 2）．

我们现在来细说一下 Gauss-Bonnet 定理的局部形式．首先需要一些定义．

设 α：$[0, l] \to S$ 是从闭区间$[0, l]$到正则曲面 S 的连续映照. 我们称 α 是分段正则的简单闭参数曲线，如果

1. $\alpha(0)=\alpha(l)$；

2. 若 $t_1 \neq t_2$，t_1，$t_2 \in [0, l)$，则 $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$；

3. 存在$[0, l]$的一个分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = l$$

使得 α 在每一子区间$[t_i, t_{i+1}]$，$i=0, \cdots, k$，上是正则可微的.

从直观上看，α 是一条闭曲线(条件 1)，没有自相交点(条件 2)，并且只在有限个点处没有切线(条件 3).

点 $\alpha(t_i)$，$i=0, \cdots, k$，称为 α 的顶点. 轨迹 $\alpha([t_i, t_{i+1}])$叫做 α 的正则弧. α 的轨迹 $\alpha([0, l])$也称为分段正则的闭曲线.

根据正则性条件(3)，对每一顶点 $\alpha(t_i)$，其左极限存在，即对于 $t<t_i$，

$$\lim_{t \to t_i} \alpha'(t) = \alpha'(t_i - 0) \neq 0$$

同时，右极限也存在，即对于 $t>t_i$，

$$\lim_{t \to t_i} \alpha'(t) = \alpha'(t_i + 0) \neq 0$$

现假定曲面 S 已定向. 并设 $\alpha'(t_i-0)$到 $\alpha'(t_i+0)$的夹角的最小的确定值为 $|\theta_i|$，$0<|\theta_i| \leqslant \pi$. 如果 $|\theta_i| \neq \pi$，则令 θ_i 的正负号为行列式$(\alpha'(t_i-0), \alpha'(t_i+0), N)$的符号. 这表明：如果顶点 $\alpha(t_i)$不是一个尖点(图 4-25)，则 θ_i 的正负号由曲面 S 的定向确定. 带符号的角度 θ_i，$-\pi<\theta_i<\pi$，称为 α 在顶点 $\alpha(t_i)$处的外角.

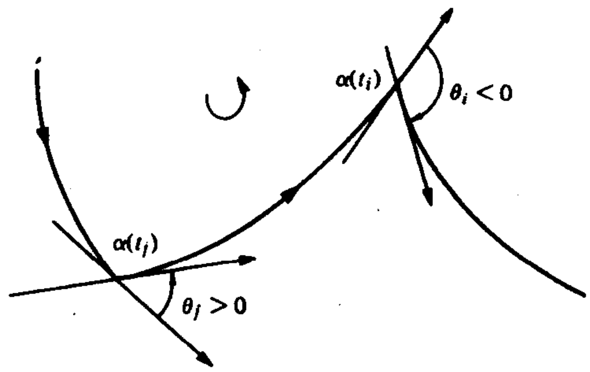


图 4-25

当顶点 $\alpha(t_i)$为尖点时，$|\theta_i|=\pi$. 我们选择 θ_i 的正负号如下：从正则性条件可以看出，存在 $\varepsilon'>0$，使对所有 ε，$0<\varepsilon<\varepsilon'$，行列式$(\alpha'(t_i-\varepsilon), \alpha'(t_i+\varepsilon), N)$的正负号保持不变. 因此，定义 θ_i 的正负号为此行列式的正负号(图 4-26).

设 X：$U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ 为 U 的参数表示并与 S 的定向相容. 再假定 U 同胚于平面的开圆盘.

令 α：$[0, l] \to X(U) \subset S$ 是一条分段正则的简单闭参数曲线，其顶点为 $\alpha(t_i)$，相应的外角为 θ_i，$i=0, \cdots, k$.

令 φ_i：$[t_i, t_{i+1}] \to R$ 为可微函数，表示 $t \in [t_i, t_{i+1}]$处从 X_u 到 $\alpha'(t)$的正向角度(参见 4.4

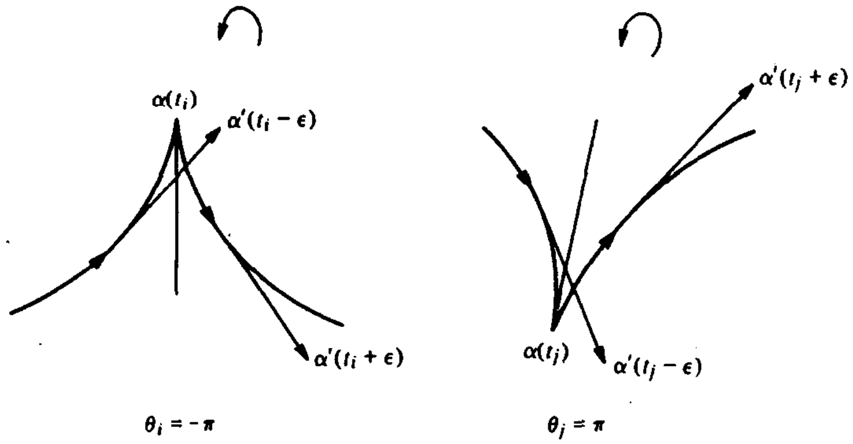


图 4-26 在尖点处外角的正负号

引理 1).

我们要说的第一个不予证明的拓扑事实如下：

定理(切线回转定理) 采用上述记号，有

$$\sum_{i=0}^{K}(\varphi_i(t_{i+1})-\varphi_i(t_i))+\sum_{i=0}^{K}\theta_i=\pm 2\pi$$

其中正负号取决于 α 的定向.

定理是说 α 的切向量与一给定方向的夹角的全变差再加上在顶点的"跳跃"等于 2π.

此定理的一个漂亮的证明已由 H. Hopf 给出，Composition Math. 2(1935)，50～62. 对于 α 没有顶点的情形，Hopf 的证明可以在本书的 5.7(定理 2)找到.

在叙述 Gauss-Bonnet 定理的局部形式之前，我们需要一些术语.

设 S 是定向曲面. 区域 $R\subset S$(一个连通开集及其边界的并集)称为**简单区域**，如果 R 同胚于圆盘并且边界 ∂R 是一条分段正则的简单闭曲线 $\alpha: I\to S$ 的轨迹. 再则，我们称 α 是**正定向的**，如果在属于 α 的正则弧的每点 $\alpha(t)$，S 的正定向的正交基 $\{\alpha'(t), h(t)\}$ 满足条件：$h(t)$ 指向 R 的内部. 更严格一点，对任何曲线 $\beta: I\to R$，如果 $\beta(0)=\alpha(t)$ 且 $\beta'(0)\neq\alpha'(t)$，则 $\langle\beta'(0), h(t)\rangle>0$. 直观的意思是说：如果有人沿曲线 α 且朝着 α 的正方向散步，而人的头朝着 N 的方向，则区域 R 始终在人的左侧(图 4-27). 可以证明：适当选取 α 的二个定向之一能使 α 成为正定向曲线.

现设 $x: U\subset\mathbb{R}^2\to S$ 是与 S 的定向相容的参数表示. $R\subset x(U)$ 是 S 的有界区域. 如果 f 是 S 上的可微函数，容易看到积分

$$\iint_{x^{-1}(R)} f(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

不依赖于参数表示 x 的选择(在 x 的同一定向类中). (其证明与面积的定义相同，参见 2.5.) 因此，这一积分是有几何意义的，称为 **f 在区域 R 上的积分**. 通常记成

$$\iint_R f\,d\sigma$$

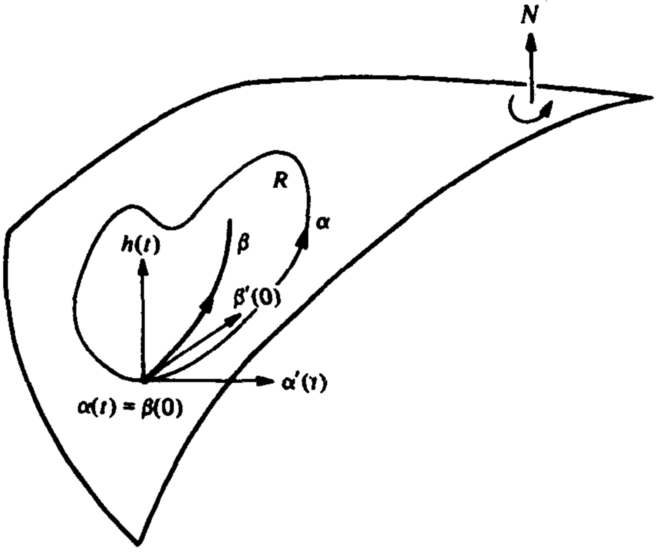


图 4-27 正定向的边界曲线

有了这些定义，我们现在来叙述

Gauss-Bonnet 定理(局部) 设 x: $U\to S$ 是定向曲面 S 的一个正交参数表示(即，$F=0$)，其中 $U\subset\mathbb{R}^2$ 同胚于开圆盘，而 X 与 S 的定向相容. 设 $R\subset x(U)$ 是 S 的一个简单区域并设 α: $I\to S$ 使得 $\partial R=\alpha(I)$. 假定 α 是正定向的并以弧长 S 作参数，而且设 $\alpha(S_0)$, …, $\alpha(S_k)$ 和 θ_0, …, θ_k，分别为 α 的顶点及外角. 则

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}}k_g(S)dS+\iint_R K d\sigma+\sum_{i=0}^{k}\theta_i=2\pi \tag{1}$$

其中 $k_g(S)$ 是 α 的正则弧的测地曲率，K 是 S 的 Gauss 曲率.

注 我们对区域 R 作了限制——R 包含于某个正交参数表示的像集内. 这一限制只不过是为了使证明简化. 以后我们就会看到(整体 Gauss-Bonnet 定理的推论 1)，上述结果对正则曲面的任何简单区域均成立. 这看上去就有点道理，因为方程式(1)不以任何方式涉及到特别的参数表示[○].

证明 设 $u=u(S)$, $v=v(S)$ 是曲线 α 关于参数表示 x 的表达式. 利用 4.4 的命题 3，我们有

$$k_g(S)=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dS}-E_v\frac{du}{dS}\right\}+\frac{d\varphi_i}{dS}$$

其中 $\varphi_i=\varphi_i(S)$ 是一可微函数，它表示在 $[S_i, S_{i+1}]$ 中 x_u 到 $\alpha'(S)$ 的正向交角. 在每段区间 $[S_i, S_{i+1}]$ 上积分上述表达式并将结果相加.

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}}k_g(S)dS=\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}}\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{dv}{dS}-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{du}{dS}\right)dS$$
$$+\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}}\frac{d\varphi_i}{dS}dS$$

○ 如果假定这一结论的真实性，则下面的应用 2 和 6 现在就能够阐明.

现在利用平面 uv 上的 Gauss-Green 定理：若 $P(u, v)$和 $Q(u, v)$是定义在简单区域 $A\subset \mathbb{R}^2$ 上的可微函数，A 的边界为 $u=u(S)$，$v=v(S)$. 则

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}}\left(P\frac{du}{dS}+Q\frac{dv}{dS}\right)dS=\iint_A\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)dudv$$

由此可得，

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}}k_g(S)dS=\iint_{x^{-1}(R)}\left\{\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u\right\}dudv$$
$$+\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}}\frac{d\varphi_i}{dS}dS$$

从 $F=0$ 时的 Gauss 公式(参见 4.3 习题 1)，我们知道

$$\iint_{x^{-1}(R)}\left\{\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u\right\}dudv$$
$$=-\iint_{x^{-1}(R)}K\sqrt{EG}dudv=-\iint_R Kd\sigma$$

另一方面，由回转切线定理

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}}\frac{d\varphi_i}{dS}dS=\sum_{i=0}^{k}(\varphi_i(S_{i+1})-\varphi_i(S_i))$$
$$=\pm 2\pi-\sum_{i=0}^{k}\theta_i$$

因为曲线 α 是正定向的，所以符号应为正号；正如对于平面中的圆周这个特例一样，这是显而易见的.

把这些事实合在一起，我们得到

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}}k_g(S)dS+\iint_R Kd\sigma+\sum_{i=0}^{k}\theta_i=2\pi$$

证毕.

在继续讨论 Gauss-Bonnet 定理的整体形式之前，我们要利用本定理证明中的技巧说一说如何从平行移动来解释 Gauss 曲率.

为此，设 $x: U\to S$ 是在点 $p\in S$ 附近的正交参数表示，并设 $R\subset x(U)$是没有顶点的简单区域且以 p 为 R 的内点. 设 α：$[0, l]\to x(U)$是以弧长 S 为参数的曲线，使得 α 的轨迹为 R 的边界. 设 w_0 是 S 在点 $\alpha(0)$的一个单位切向量并设 $w(S)$, $S\in[0, l]$，是 w_0 沿 α 的平行移动(图 4-28). 利用 4.4 的命题 3 和 uv 平面上的 Gauss-Green 定理，我们得到

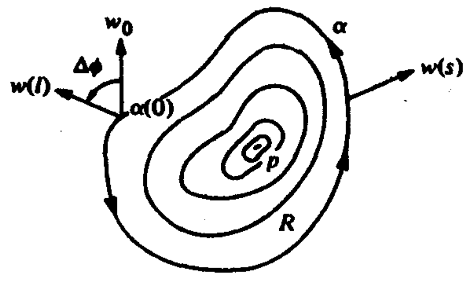


图 4-28

$$0=\int_0^l\left[\frac{Dw}{dS}\right]dS$$
$$=\int_0^l\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dS}-E_v\frac{du}{dS}\right\}dS+\int_0^l\frac{d\varphi}{dS}$$

$$=-\iint_R Kd\sigma+\varphi(l)-\varphi(0)$$

其中 $\varphi=\varphi(S)$是可微函数，代表 x_u 到 $w(S)$的交角. 由此可知，$\varphi(l)-\varphi(0)=\Delta\varphi$ 为

$$\Delta\varphi=\iint_R Kd\sigma \tag{2}$$

从上面的表达式可以看出：$\Delta\varphi$ 既不依赖于 w_0 的选择，也不依赖于 $\alpha(0)$的选择. 对上式取极限(在 3.3 命题 2 的意义下)，我们得到

$$\lim_{R\to P}\frac{\Delta\varphi}{A(R)}=K(p)$$

其中 $A(R)$表示区域 R 的面积. 这样，我们就得到 Gauss 曲率 K 的解释.

为了使 Gauss-Bonnet 定理整体化，我们需要更多的拓扑知识.

设 S 是一正则曲面. 区域 $R\subset S$ 称为**正则的**，如果 R 是紧致的并且边界 ∂R 是有限条互不相交分段正则的简单闭曲线的并(图 4-29(a)的区域是正则区域，而图 4-29(b)则不是). 为方便起见，我们把紧致曲面看作正则区域. 其边界为空集.

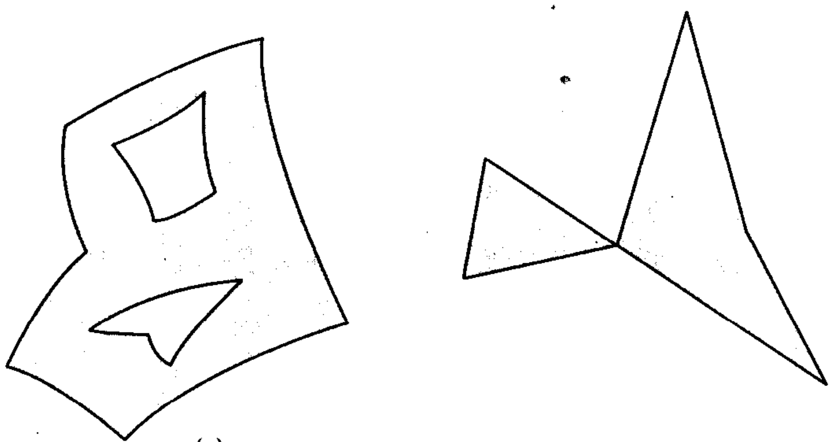


图 4-29

一简单区域叫做**三角形**，如果只有三个顶点且外角 $\alpha_i\neq0$，$i=1, 2, 3$.

一正则区域 $R\subset S$ 的一个**三角剖分**是有限个三角形 T_i，$i=1, \cdots, n$ 的集合 $\mathcal{T}$，使得

1. $\bigcup_{i=1}^{n} T_i=R$.

2. 若 $T_i\cap T_j\neq\phi$，则 $T_i\cap T_j$ 为 T_i 和 T_j 的一条公共边或一个公共顶点.

给定正则区域 $R\subset S$ 的一个三角剖分 $\mathcal{T}$，我们把三角形(面)的个数记作 F，边数记作 E，顶点数记作 V.

$$F-E+V=\chi$$

称为这个三角剖分的 Euler-Poincaré **示性数**.

下面的命题只写出来而不加证明，这些事实可以查看，例如，L. Ahlfors 和 L. Sario, Riemann Surfaces, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1960, 第 1 章.

命题 1 正则曲面的任何正则区域均有一个三角剖分.

命题 2 设 S 为定向曲面. $\{x_\alpha\}$, $\alpha\in A$, 为一族与 S 的定向相容的参数表示. 设 $R\subset S$ 是 S 的一个正则区域. 则存在 R 的一个三角剖分 $\mathcal{T}$ 使得每个三角形 $T\in\mathcal{T}$, 均包含在 $\{x_\alpha\}$ 的某一坐标邻域内. 而且, 如果 $\mathcal{T}$ 的每个三角形的边界是正定向的, 则相邻的三角形在公共边上的方向相反(图 4-30).

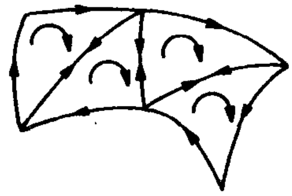


图 4-30

命题 3 设 $R\subset S$ 是曲面 S 的正则区域, 则 Euler-Poincaré 示性数与 R 的三角剖分无关. 因此, 可以记作 $\chi(R)$.

这后一个命题说明 Euler-Poincaré 示性数是正则区域 R 的拓扑不变量. 为了应用 Gauss-Bonnet 定理, 我们提及一个重要的事实: 这一不变量确定了 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致曲面的全部拓扑分类.

应该注意到: 直接计算表明球面的 Euler-Poincaré 示性数是 2, 而环面(带一个柄的球面, 见图 4-31)是零, 双环(带二个柄的球面)是 -2, 而且一般地有, n-环(带 n 个柄的球面)的 Euler-Poincaré 示性数是 $-2(n-1)$.

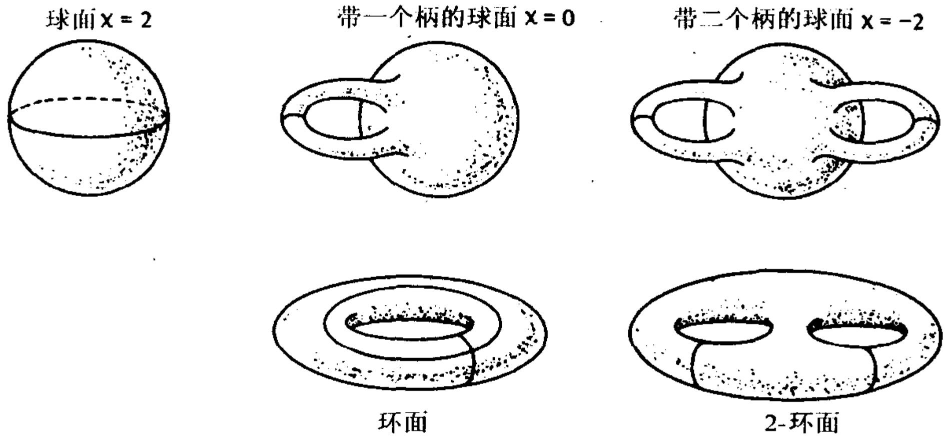


图 4-31

下述命题说明这个表列出了 $\mathbb{R}^3$ 的全部紧致曲面.

命题 4 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是紧致连通的曲面; 则 S 的 Euler-Poincaré 示性数取下列值之一: 2, 0, -2, …, $-2n$, …. 再者, 若 $S'\subset\mathbb{R}^3$ 为另一紧致曲面且 $\chi(S)=\chi(S')$, 则 S 同胚于 S'.

换言之, 每一紧致连通曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 同胚于一个带 g 个柄的球面. 数

$$g=\frac{2-\chi(S)}{2}$$

称为 S 的亏格.

最后, 设 $R\subset S$ 是定向曲面 S 的一正则区域. 而 $\mathcal{T}$ 是 R 的一个三角剖分使得每个三角形 $T_j\in\mathcal{T}$, $j=1$, …, k, 包含在一族参数表示 $\{x_\alpha\}$, $\alpha\in A$ 的某个坐标邻域 $x_j(U_j)$ 内, 这里 $\{x_\alpha\}$ 与 S 的定向相容. 设 f 是 S 上的可微函数. 下述命题表明 f 在区域 R 上的积分是有意义的.

命题 5 记号如上. 和式

$$\sum_{j=1}^{k}\iint_{x_j^{-1}(T_j)} f(u_j,v_j)\sqrt{E_jG_j-F_j^2}du_jdv_j$$

不依赖于三角剖分 $\mathscr{T}$，也不依赖于 S 的参数表示$\{x_j\}$.

因此，上述求和有几何意义并称为 f 在正则区域 R 上的积分. 通常记作

$$\iint_R f d\sigma$$

现在我们着手叙述并证明

整体 Gauss-Bonnet 定理　设 $R\subset S$ 是一定向曲面的正则区域. 令 C_1，…，C_n 是分段正则的简单闭曲线并组成 R 的边界 ∂R. 设每个 C_i 是正定向的并设 θ_1，…，θ_p 是曲线 C_1，…，C_n 的全部外角. 则

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}k_g(S)dS+\iint_R K d\sigma+\sum_{l=1}^{p}\theta_l=2\pi\chi(R)$$

其中 S 为 C_i 的弧长，在 C_i 上的积分表示在 C_i 的每段正则弧上的积分之和.

证明　考虑 R 的三角剖分 $\mathscr{T}$，使得每个三角形均包含在与 S 的定向相容的正交参数表示族的某个坐标邻域内. 由命题 2，这种三角剖分是存在的. 更进一步，如果 $\mathscr{T}$ 的每个三角形的边界是正定向的，则在相邻三角形的公共边上，我们得到相反的定向(图 4-32).

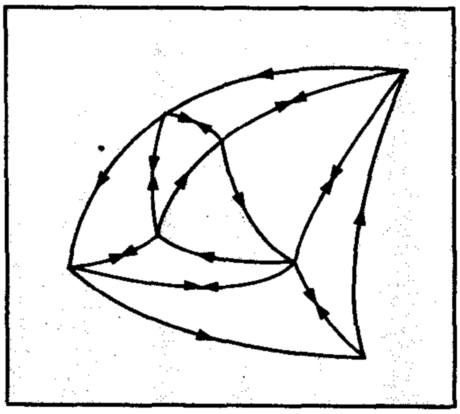


图　4-32

将局部的 Gauss-Bonnet 定理应用到每一个三角形并将结果加到一起，再利用命题 5 并注意每条"内"边以相反的方向跑两次，则有，

$$\sum_i\int_{C_i}k_g(S)dS+\iint_R K d\sigma+\sum_{j,k=1}^{F,3}\theta_{jk}=2\pi F$$

其中 F 为 $\mathscr{T}$ 中的三角形的个数，而 θ_{j1}，θ_{j2}，θ_{j3} 是三角形 T_j 的外角.

现在引进三角形 T_j 的内角 $\varphi_{jk}=\pi-\theta_{jk}$. 因此

$$\sum_{j,k}\theta_{jk}=\sum_{j,k}\pi-\sum_{j,k}\varphi_{jk}=3\pi F-\sum_{j,k}\varphi_{jk}$$

我们将要采用下述记号：

$E_e=\mathscr{T}$ 的外边的个数，

$E_i=\mathscr{T}$ 的内边的个数，

$V_e=\mathscr{T}$ 的外顶点的个数，

$V_i=\mathscr{T}$ 的内顶点的个数.

因为曲线 C_i 是闭曲线，所以 $E_e=V_e$. 再者，容易用归纳法证明

$$3F=2E_i+E_e$$

因而

$$\sum_{j,k}\theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j,k}\varphi_{jk}$$

现在注意，外顶点可能是某条曲线 C_i 的顶点，也可能是由三角剖分引进的顶点．置 $V_e = V_{ec} + V_{et}$，这里 V_{ec} 是曲线 C_i 的顶点数而 V_{et} 是三角剖分的外顶点且不是 C_i 的顶点的个数．因为在每个内顶点的所有角的总和是 2π，我们得到

$$\sum_{j,k}\theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_l(\pi - \theta_l)$$

在上述表达式中，加进并减掉 πE_e，并考虑到 $E_e = V_e$，则有

$$\sum_{j,k}\theta_{jk} = 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_l \theta_l$$

$$= 2\pi E - 2\pi V + \sum_l \theta_l$$

把上面的各个式子放到一起，最后得到

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} k_g(S)dS + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^{p}\theta_l = 2\pi(F - E + V)$$

$$= 2\pi\chi(R)$$

证毕.

因为简单区域的 Euler-Poincaré 示性数显然是 1，所以，我们有(参考注 1)

推论 1 设 R 是 S 的简单区域，则

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{S_i}^{S_{i+1}} k_g(S)dS + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^{k}\theta_i = 2\pi$$

考虑到紧致曲面可以看作一个无边界的区域，因此有

推论 2 设 S 是可定向紧致曲面；则

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S)$$

推论 2 是最引人注目的．我们只要想一想一张同胚于球面的曲面的各种各样的形状就可以发现这是多么令人惊讶：无论曲率函数如何变化，而“全曲率” $\iint K d\sigma$ 总是一样.

下面，我们给出 Gauss-Bonnet 定理的一些应用．为了说明这些应用(以及本节末尾的习题)，我们假定平面拓扑的一个基本事实——Jordan 曲线定理．我们要用的是下列形式：平面上每一分段正则的闭曲线(没有自交点)是一简单区域的边界.

1. 正曲率的紧致曲面同胚于球面.

这种曲面的 Euler-Poincaré 示性数是正数，而球面是 $\mathbb{R}^3$ 中仅有的满足此条件的紧致曲面.

2. 设 S 是负曲率或零曲率的可定向曲面．则从一点 $p \in S$ 出发的二条测地线 γ_1 和 γ_2 不可能再相交于另一点 $q \in S$ 使得 γ_1 和 γ_2 的轨迹构成 S 的一简单区域 R 的边界.

假设不然，则由 Gauss-Bonnet 定理(R 是简单的)，

$$\iint_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$$

其中 θ_1 和 θ_2 是区域 R 的外角．因为测地线 γ_1 和 γ_2 互不相切，我们有 $\theta_i<\pi$，$i=1$，2．另一方面，因为 $K\leqslant 0$，所以得出矛盾．

当 $\theta_1=\theta_2=0$ 时，测地线 γ_1 和 γ_2 构成 S 的一条简单闭测地线(即一条闭的正则曲线并且为测地线)．由此可知，在零曲率曲面或负曲率曲面上，不存在简单闭测地线作为 S 的一简单区域的边界．

3．设曲面 S 同胚于柱面且 Gauss 曲率 $K<0$，则 S 至多有一条简单闭测地线．

假设 S 含有一条简单闭测地线 Γ．根据应用 2 并由于存在同胚对应 φ，将曲面 S 映成挖去一点 q 的平面 P，所以 $\varphi(\Gamma)$是平面 P 中包含 q 点的一个简单区域的边界．

现假设 S 含有另一条简单闭测地线 Γ'．我们断言 Γ' 与 Γ 不相交．否则 $\varphi(\Gamma)$ 和 $\varphi(\Gamma')$ 在两个相继交点 γ_1 和 γ_2 之间的弧构成一个简单区域的边界，这与应用 2 相违背(见图 4-33)．根据上述推理，$\varphi(\Gamma')$也是平面 P 的一个包含点 q 的简单区域 R 的边界．而 R 的内点同胚于柱面，故 $\chi(R)=0$．另一方面．由 Gauss-Bonnet 定理

$$\iint_{\varphi^{-1}(R)} K d\sigma = 2\pi\chi(R) = 0$$

但因 $K<0$，所以这是不可能的．

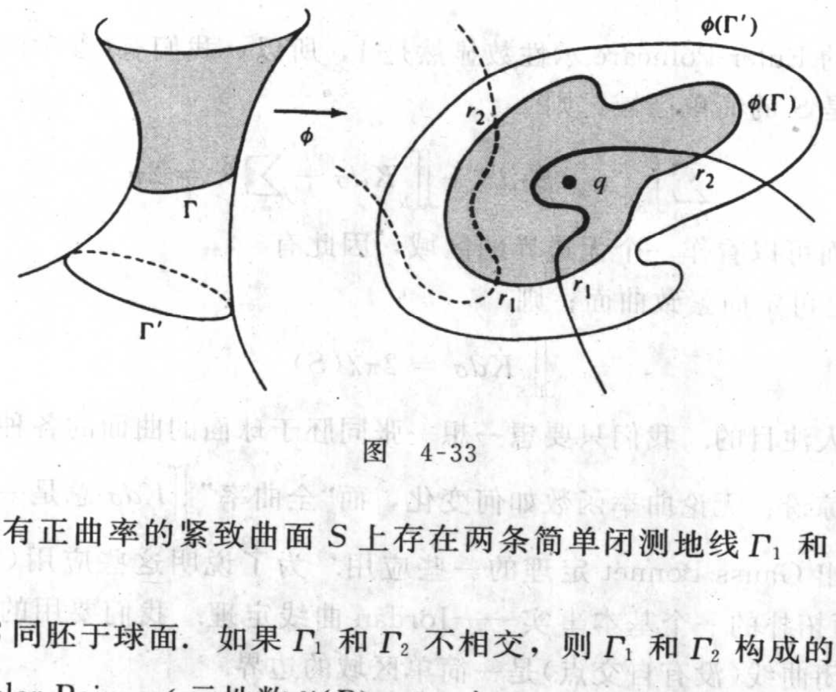


图 4-33

4．如果在一具有正曲率的紧致曲面 S 上存在两条简单闭测地线 Γ_1 和 Γ_2，则 Γ_1 和 Γ_2 必相交．

根据应用 1，S 同胚于球面．如果 Γ_1 和 Γ_2 不相交，则 Γ_1 和 Γ_2 构成的集合是一区域 R 的边界，此区域的 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(R)=0$．由 Gauss-Bonnet 定理

$$\iint_R K d\sigma = 0$$

这与 $K>0$ 相矛盾．

5．我们将要证明由 Jacobi 发现的下述结果：设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 是一条封闭的正则参数曲线，且曲率不为零．假设法向量 $n(S)$在单位球面 S^2 上画出的曲线(法线的指标线是简单曲线)．则 $n(I)$将S^2 分为面积相等的二个区域．

我们可以假定 α 以弧长作为参数．令 $\bar{S}$ 为 $n=n(s)$ 在 S^2 上的弧长．$n(s)$ 的测地曲率 $\bar{K}_g$ 为

$$\bar{K}_g=\langle\ddot{n},n\wedge\dot{n}\rangle$$

其中"·"表示对于 $\bar{S}$ 的微分．因为

$$\dot{n}=\frac{dn}{ds}\cdot\frac{ds}{d\bar{s}}=(-kt-\tau b)\frac{ds}{d\bar{s}}$$

$$\ddot{n}=(-kt-\tau b)\frac{d^2s}{d\bar{s}^2}+(-k't-\tau'b)\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2-(k^2+\tau^2)n\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2$$

并且

$$\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2=\frac{1}{k^2+\tau^2}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\bar{K}_g&=\langle n\wedge\dot{n},\ddot{n}\rangle=\frac{ds}{d\bar{s}}\langle(kb-\tau t),\ddot{n}\rangle\\&=\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3(-k\tau'+k'\tau)=-\frac{\tau'k-k'\tau}{k^2+\tau^2}\frac{ds}{d\bar{s}}\\&=-\frac{d}{ds}\arctan\left(\frac{\tau}{k}\right)\frac{ds}{d\bar{s}}\end{aligned}$$

因此，应用 Gauss-Bonnet 定理到由 $n(I)$ 界定的区域 R 中的一个，并利用 $K\equiv1$，我们有

$$2\pi=\int_R Kd\sigma+\int_{\partial R}\bar{k}_g d\bar{s}=\int_R d\sigma=R\text{ 的面积}$$

因为 S^2 的面积为 4π，结论得证．

6. 设 T 是定向曲面 S 上的测地三角形(即 T 的边均是测地线)．令 θ_1，θ_2，θ_3 是 T 的外角并令 $\varphi_1=\pi-\theta_1$，$\varphi_2=\pi-\theta_2$，$\varphi=\pi-\theta_3$ 是 T 的内角．由 Gauss-Bonnet 定理，

$$\iint_T Kd\sigma+\sum_{i=1}^3\theta_i=2\pi$$

因此，

$$\iint_T Kd\sigma=2\pi-\sum_{i=1}^3(\pi-\varphi_i)=-\pi+\sum_{i=1}^3\varphi_i$$

由此可知，测地三角形的内角和 $\sum_{i=1}^3\varphi_i$ 为

1)等于 π，若 $K=0$；

2)大于 π，若 $K>0$；

3)小于 π，若 $K<0$．

更进一步，$\sum_{i=1}^3\varphi_i-\pi$（角盈）正好等于 $\iint_T Kd\sigma$，如果在 T 上 $K\neq0$，这就是三角形 T 在 Gauss 映射 N：$S\to S^2$（参考 3.3 的式(12)）下的像集 $N(T)$ 的面积．上述结论曾经由 Gauss 本人叙述成他的定理：一测地三角形 T 的角盈等于其球面像 $N(T)$ 的面积．

上述事实与试图证明 Euclid 第五公理(平行公理)这一历史性的争论有联系，从第五公理

可以得到任何三角形的内角和等于 π. 如果把测地线看成直线，可以证明负常曲率的曲面构成一种几何学的(局部)模型，在这种几何学中，除了第五公理及保证直线可以无限延长的公理外，Euclid 的公理均成立. 但是，Hilbert 证明了在 R^3 中不存在测地线可以无限延长的负常曲率的曲面(3.3 习题 6 的伪球面有一条奇线). 因此 R^3 中具有负常 Gauss 曲率的曲面并未提供一个模型来验证第五公理的独立性. 然而，利用抽象曲面的概念，可以避开上述不便，并能建立一种几何模式——除第五公理外所有 Euclid 公理均成立的几何模式. 因此，第五公理是独立的.

在 5.10 和 5.11，我们要证明刚刚提到的 Hilbert 的结果并描述一种非欧几何的抽象模式.

7. **曲面上的向量场**[○] 设 v 是定向曲面 S 上的可微向量场. 我们称 $p\in S$ 是 v 的奇点，若 $v(p)=0$. 奇点 p 称为孤立奇点，若存在 p 在 S 中的邻域 V，使得向量场 v 在 V 中除了 p 外没有其他奇点.

对于向量场 v 的每个孤立奇点 p，我们要定义一个整数，称为 v 的指标. 设 x: $U\to S$ 是在 $p=x(0,0)$点的正交参数表示，且与 S 的定向相容. 设 α: $[0,l]\to S$ 是一分段正则的简单闭参数曲线，使得 $\alpha([0,l])\subset x(U)$为某个包含 p 点的简单区域 R 的边界，且 p 是 R 中的唯一奇点. 令 $v=v(t)$，$t\in[0,l]$，为向量场 v 沿 α 的限制且 $\varphi=\varphi(t)$是 x_u 到 $v(t)$的夹角，如 4.4 的引理 1 所示，可选取 φ 为可微函数(引理 1 容易推广到分段正则曲线的情形). 因为 α 是闭曲线，所以存在一个整数 I

$$2\pi I=\varphi(l)-\varphi(0)=\int_0^l\frac{d\varphi}{dt}dt$$

I 叫做 v 在 p 点的指标.

我们必须证明此定义与所作的选取无关. 首先证明指标与参数表示 x 无关. 设 $w_0\in T_{\alpha(0)}(S)$，$w(t)$是w_0 沿 α 的平行移动. 设 $\psi(t)$是 x_u 到 $w(t)$的可微的夹角. 正如我们在用平行移动来解释 Gauss 曲率 K 时已经看到的(见(2)式)，

$$\psi(l)-\psi(0)=\iint_R Kd\sigma$$

把上述关系式相减，我们得到

$$\iint_R Kd\sigma-2\pi I=(\psi-\varphi)(l)-(\psi-\varphi)(0)=\Delta(\psi-\varphi)\tag{3}$$

因为 $\psi-\varphi$ 不依赖于 x_u，所以指标 I 与参数表示 x 无关.

指标与 α 的选择无关的证明，带有更多的技巧(虽然也很直观)，我们只是说一说证明的大概.

设 α_0 和 α_1 是用来定义指标的两条曲线. 我们要证明对于这两条不同的曲线，v 的指标相同. 首先假定 α_0 和 α_1 的轨迹不相交. 则存在一同胚：把 α_0 和 α_1 界定的区域映到由两个同心圆 C_0 和 C_1 界定的平面区域(环). 因为我们能找到一族同心圆 C_t，使得 C_t 连续依赖于 t 且将 C_0 变形到 C_1，所以，我们得到一族曲线 α_t，α_t 连续依赖于 t 且将 α_0 变形为 α_1(图 4-34). 以 I_t

○ 这一应用需要 3.4 的知识. 如果略去不读，则本节的习题 6～9 也要略去.

表示用曲线 α_t 算出的 v 的指标，因为指标是一个整数，而 I_t 连续依赖于 t，$t\in[0,1]$．所以 I_t 在 t 的变化下保持不变，即如我们所希望的有 $I_0=I_1$．如果 α_0 和 α_1 的轨迹相交，我们选取一条充分小的曲线使其轨迹与 α_0 和 α_1 均不相交．然后利用上面的结果．

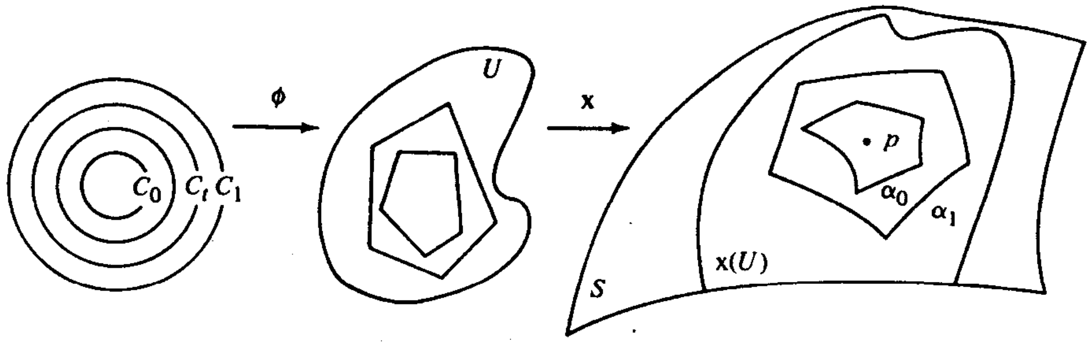


图 4-34

应该注意当 p 不是 v 的奇点时，指标的定义照常有效．然而，这时其结果是指标为零．理由如下：因为 I 不依赖于 x_u，我们可以选择 x_u 就是 v 自身，这样 $\varphi(t)\equiv 0$．

在图 4-35 中，我们用一些例子说明在平面 xy 上以(0，0)为奇点的向量场的指标．图中画出来的曲线是向量场的轨线．

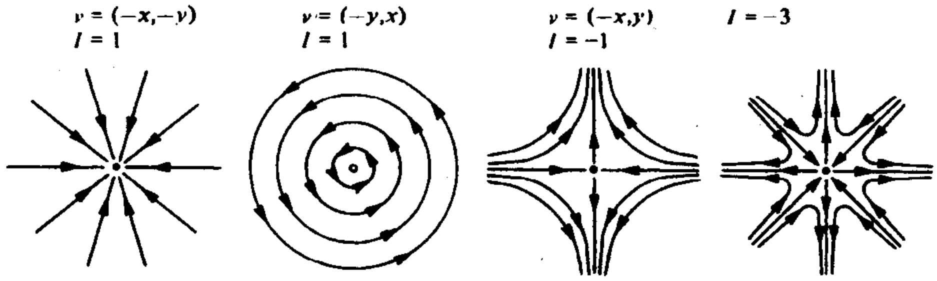


图 4-35

现令 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是一定向紧致曲面，而 v 是只有孤立奇点的可微向量场．注意，这时只有有限个奇点．否则，根据紧致性(参考 2.7 性质 1)，它们有一个极限点——一个非孤立的奇点．设 $\{x_\alpha\}$ 是一族与 S 的定向相容的正交参数表示．设 $\mathcal{T}$ 是 S 的三角剖分，使得

1)每个三角形 $T\in\mathcal{T}$ 包含在 $\{x_\alpha\}$ 的某个坐标邻域内．

2)每个 $T\in\mathcal{T}$ 至多包含一个奇点．

3)每个 $T\in\mathcal{T}$ 的边界不包含奇点且为正定向的．

如果我们对每个三角形 $T\in\mathcal{T}$ 应用(3)式，并将结果加到一起，考虑到每个 $T\in\mathcal{T}$ 的边以相反的方向出现二次，我们得到

$$\iint_S K d\sigma - 2\pi\sum_{i=1}^{k} I_i = 0$$

其中 I_i 是奇点 P_i，$i=1$，…，k 的指标．把此式与 Gauss-Bonnet 定理(参考推论 2)合在一起，最终得到

$$\sum I_i = \frac{1}{2\pi}\iint_S K d\sigma = \chi(S)$$

因此，我们证明了下述定理：

Poincaré 定理 在一紧致曲面 S 上仅有孤立奇点的可微向量场的指标之和，等于 S 的 Euler-Poincaré 示性数.

这是令人注目的结果. 它意味着 $\sum I_i$ 不依赖于向量场 v 而只与 S 的拓扑有关. 例如，在任何同胚于球面的曲面上，所有只具有孤立奇点的向量场，其指标和必为 2. 特别地，这种曲面上不可能有无奇点的可微向量场.

习题

1. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为紧致可定向的正则曲面且不同胚于球面：证明：在 S 上存在点使得 Gauss 曲率分别为正、负和零.

2. 设 T 是一旋转环面. 描述 T 的 Gauss 映照的像集并且不用 Gauss-Bonnet 定理来证明

$$\iint_T K d\sigma = 0$$

计算 T 的 Euler-Poincaré 示性数. 用 Gauss-Bonnet 定理验证上述结果.

3. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为与球面同胚的正则曲面. 设 $\Gamma\subset S$ 是一条简单闭测地线，并设 A 和 B 是 S 的两个以 Γ 为公共边界的区域. 令 N：$S\to S^2$ 为 S 的 Gauss 映照. 证明：$N(A)$和 $N(B)$的面积相等.

4. 计算下列曲面的 Euler-Poincaré 示性数：

a. 椭球面.

*b. 曲面 $S=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^4+z^6=1\}$.

5. 设 C 是定向单位球面 S^2 上余纬度为 φ 的纬圆. 并设 w_0 是 C 在点 P 的单位切向量(参考 4.4 的例 1). 将 w_0 沿 C 作平行移动. 证明：在平移了一圈后，新向量与初始向量 w_0 的夹角 $\Delta\varphi=2\pi(1-\cos\varphi)$. 验证：

$$\lim_{R\to p}\frac{\Delta\varphi}{A} = 1 = S^2 \text{ 的曲率}$$

其中 A 是 S^2 上由 C 界定的区域 R 的面积.

6. 对下列平面向量场，证明(0，0)是孤立奇点并计算其指标：

*a. $v=(x, y)$；

b. $v=(-x, y)$；

c. $v=(x, -y)$；

*d. $v=(x^2-y^2, -2xy)$；

e. $v=(x^3-3xy^2, y^3-3x^2y)$.

7. 奇点的指标能否为零？如果可能，则举一例说明之.

8. 证明：一定向紧致曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 能有一个无奇点的可微向量场的充要条件是 S 与环面同胚.

9. 设 C 是球面 S^2 上正则闭曲线. 设 v 是 S^2 上的一个可微向量场，使其轨线均不与 C 相切. 证明：由 C 界定的二个区域的任何一个都至少包含 v 的一个奇点.

4.6 指数映照；测地极坐标

本节要引进一些特殊的坐标系并着眼于它们的几何应用. 引进这种坐标系的自然途径是借助于指数映照. 现在我们就来讲指数映照.

正如在 4.4 的命题 5 中我们已经学过，在一正则曲面 S 上给定一点 P 和一非零向量 $v\in T_p(S)$，存在唯一的参数测地线 γ：$(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$，使得 $\gamma(0)=P$，$\gamma'(0)=v$. 为了指明测地线与向量 v 的关系，记作 $\gamma(t, v)=\gamma$ 是较方便的.

引理 1 若测地线 $\gamma(t, v)$ 定义在 $t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上，则测地线 $\gamma(t, \lambda v)$，$\lambda\in\mathbb{R}$，$\lambda\neq 0$，定义在 $t\in(-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$ 上并且 $\gamma(t, \lambda v)=\gamma(\lambda t, v)$.

证明 设参数曲线 α：$(-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)\to S$ 的定义为 $\alpha(t)=\gamma(\lambda t)$. 则 $\alpha(0)=\gamma(0)$，$\alpha'(0)=\lambda\gamma'(0)$，并且由 D 的线性性(参见 4.4 式(1)).

$$D_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = \lambda^2 D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$$

由此可知 α 是一条测地线，其初始条件为 $\gamma(0)$ 和 $\lambda\gamma'(0)$，并由唯一性得

$$\alpha(t) = \gamma(t,\lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$$

证毕.

引理 1 的直观意义是：由于测地线的速度是常数，所以我们能适当地调整速度使在预定的时间内跑完全程.

现在引进下述概念. 若 $v\in T_p(S)$，$v\neq 0$，使得 $\gamma(|v|, v/|v|)=\gamma(1, v)$ 有定义，我们就置

$$\exp_p(v) = \gamma(1,v) \text{ 和 } \exp_p(0) = P$$

从几何上说，这一对应是在通过 p 点且以 v 为方向的测地线上，画出(如果可能)一段长度 $|v|$；如此得到的 S 上的点记作 $\exp_p(v)$(图 4-36).

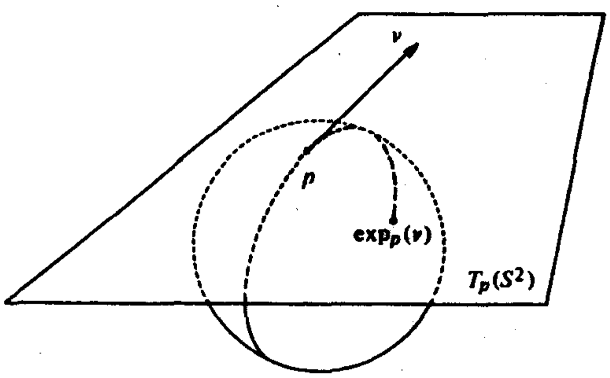


图 4-36

例如，在单位球面 S^2 上，对每个 $v\in T_p(S^2)$，$\exp_p(v)$ 均有定义. 半径为 π，3π，…，$(2n+1)\pi$ 的圆周被映成 p 的对径点 q. 半径 2π，4π，…，$2n\pi$ 的圆周被映回到 p.

另一方面，在由单叶锥面去掉顶点所形成的正则曲面 C 上，对向量 $v \in T_p(C)$，其方向沿连结 P 点和顶点的子午线的方向，若 $|v| \geq d$，d 是 P 点到顶点的距离，则 $\exp_p(v)$没有定义(图 4-37).

在球面的例子中，如果我们从 S^2 挖掉 P 的对径点，那么 $\exp_p(v)$只在 $T_p(S^2)$的以原点为中心以 π 为半径的开圆盘上有定义.

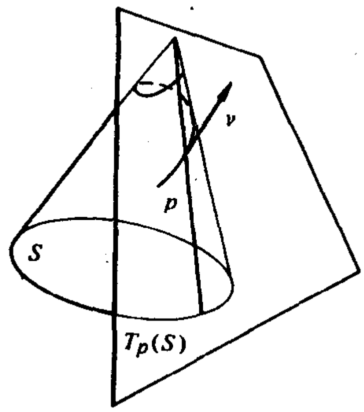


图 4-37

重要的是：$\exp_p(v)$在 P 的某一邻域内总有定义而且可微.

命题 1 给定 $P \in S$，存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\exp_p$ 在 $T_p(S)$的以原点为中心，半径为 ε 的圆盘的内部 B_ε 上有定义且可微.

证明 根据引理 1，对于 $T_p(S)$的每个方向，显然可以把 v 选得充分小使得 $\gamma(t, v)$的定义区间包含 1，因而 $\gamma(1, v) = \exp_p(v)$有定义. 为了证明对所有方向存在一个一致的 ε，我们需要测地线对于初始条件的依赖性定理(见 4.7)，其形式如下：给定 $P \in S$，存在数 $\varepsilon_1 > 0$，$\varepsilon_2 > 0$ 及可微映照

$$\gamma: (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B_{\varepsilon_1} \to S$$

使得对任意 $v \in B_{\varepsilon_1}$，$v \neq 0$，$t \in (-\varepsilon_2; \varepsilon_2)$，曲线 $\gamma(t, v)$是 S 的测地线，且 $\gamma(0, P) = P$，$\gamma'(0, v) = v$，并对 $v=0$ 有 $\gamma(t, 0) = p$.

从这个定理和引理 1 可以得到我们的结论. 事实上，因为 $\gamma(t, v)$对于 $|t| < \varepsilon_2$，$|v| < \varepsilon_1$ 有定义，在引理 1 中置 $\lambda = \varepsilon_2/2$，我们得到 $\gamma(t, (\varepsilon_2/2)v)$对于 $|t| < 2$，$|v| < \varepsilon_1$ 有定义. 因此，取一个以原点为中心，半径为 $\varepsilon < \varepsilon_1\varepsilon_2/2$ 的圆盘 $B_\varepsilon \subset T_p(S)$，则对所有 $W \in B_\varepsilon$，$\gamma(1, w) = \exp_p w$ 有定义. $\exp_p$ 在 B_ε 中的可微性可以从 γ 的可微性推出. 证毕.

上述结果的一个重要的补充是下面的

命题 2 $\exp_p$：$B_\varepsilon \subset T_p(S) \to S$ 在 $T_p(S)$的原点 O 的一个邻域 $U \subset B\varepsilon$ 中为微分同胚.

证明 我们将证明微分 $d(\exp_p)$在 $0 \in T_p(S)$是非奇异的. 为此，我们把 $T_p(S)$在 0 的切空间与 $T_p(S)$本身等同起来，考虑曲线 $\alpha(t) = tv$，$v \in T_p(S)$. 显然 $\alpha(0) = 0$，$\alpha'(0) = v$. 曲线 $(\exp_p 0\alpha)(t) = \exp_p(tv)$在 $t=0$ 的切向量为

$$\frac{d}{dt}(\exp_p(tv))\,|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t,v))\,|_{t=0} = v$$

由此可知
$$(d\exp_p)_0(v) = v,$$
这就证明了 $d\exp_p$ 在 0 非奇异. 应用反函数定理(参考 2.4 命题 3)，就可完成命题的证明. 证毕.

$V \subset S$ 称为点 $P \in S$ 的一个**法邻域**，如果 v 是 $T_p(S)$的原点的一个邻域 U 的像 $V = \exp_p(U)$，使得 $\exp_p$ 限制到 U 上为微分同胚.

因为在点 $P \in S$ 的指数映照是 U 上的微分同胚，故可以用它在 V 上引进坐标. 在这样引进的坐标系中间，最通常的是

1. **法坐标.** 它相应于切平面 $T_p(S)$的直角坐标.
2. **测地极坐标.** 它相应于切平面 $T_p(S)$的极坐标(图 4-38).

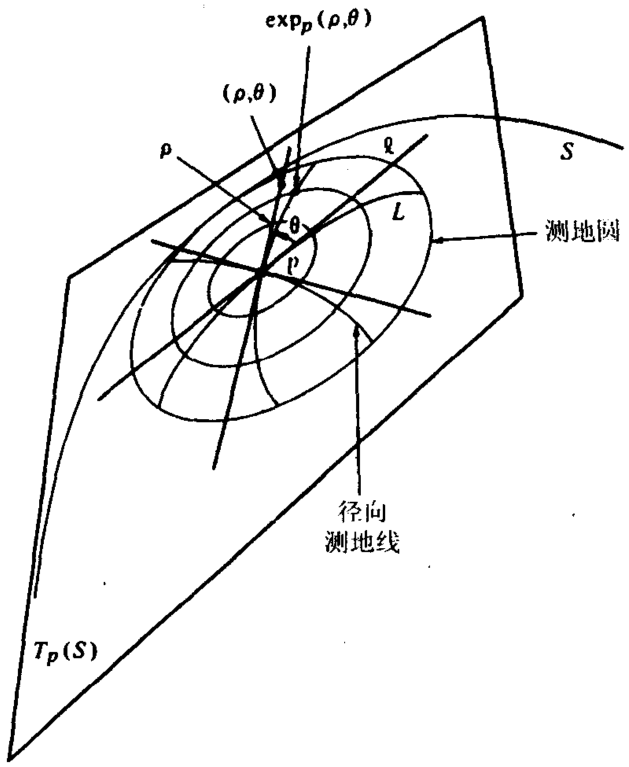


图 4-38 极坐标

我们首先研究法坐标. 它可如下得出：在平面 $T_p(S)$，$P\in S$，中选取二个正交的单位向量 e_1 和 e_2，因为 $\exp_p$：$U\to V\subset S$ 是微分同胚，所以，它可以作为在 P 点的参数表示. 若 $q\in V$，则 $q=\exp_p(W)$，其中 $W=ue_1+ve_2\in U$，因此，我们说 q 的坐标是(u, v). 显然，如此得到的法坐标依赖于 e_1，e_2 的选择.

在以 P 为中心的一个法坐标系中，过 P 点的测地线是 $T_p(S)$中过原点的直线 $u=at$，$v=bt$ 在映射 $\exp_p$ 下的像. 也注意在这种坐标系下，第一基本形式的系数在 P 点为 $E(p)=G(p)=1$，$F(p)=0$.

现在我们来看测地极坐标系. 在平面 $T_p(S)$，$p\in S$ 上，选取极坐极系(ρ, θ)，其中 ρ 是矢径，θ 是极角，$0<\theta<2\pi$，极点是 $T_p(S)$的原点 O. 注意：平面的极坐标系在对应于 $\theta=0$ 的闭射线 l 上没有定义. 置 $\exp_p(l)=L$. 因为 $\exp_p$：$U-l\to V-L$ 仍然是微分同胚，我们可以用坐标(ρ, θ)作参数来表示 $V-L$ 的点，这称为测地极坐标.

我们将采用下面的术语. 在 U 中以 O 为中心的圆经过映照 $\exp_p$：$U\to V$ 所得的像叫做 V 的**测地圆**，而过原点 O 的直线的像叫做 V 的**径向测地线**. 在 $V-L$ 中，这些曲线分别为 $\rho=$常数和 $\theta=$常数.

现在我们来确定第一基本形式关于测地极坐标系的系数.

命题 3 设 X：$U-l\to V-L$ 是测地极坐标系(ρ, θ). 则第一基本形式的系数 $E=E(\rho, \theta)$，$F=F(\rho, \theta)$，$G=G(\rho, \theta)$满足条件

$$E=1,\quad F=0,\quad \lim_{\rho\to 0}G=0,\quad \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=1$$

证明 根据指数映射的定义，ρ 为曲线 $\theta=$常数的弧长. 由此直接可得 $E=1$.

在测地线微分方程(4.4 方程(4))中，利用 $\theta=$常数为测地线，可以推出 $\Gamma_{11}^{2}=0$. 再利用 4.3 定义 Christoffel 符号的关系式(2)的第一个方程，我们得到

$$0=\frac{1}{2}E_{\rho}=\Gamma_{11}^{1}E=\Gamma_{11}^{1}$$

把这代入到 4.3 式(2)的第二个方程，我们有 $F_{\rho}=0$. 因此，$F(\rho,\theta)$不依赖于 ρ.

对每点 $q\in V$，过 q 点的测地圆记作 $\alpha(\sigma)$，这里 $\sigma\in[0,2\pi]$(如果 $q=P$ 则 $\alpha(\sigma)$为一点 $\alpha(\sigma)=P$). 再用 $\gamma(S)$记过 q 点的径向测地线，这里 S 是 γ 的弧长. 有了这些记号，我们可以写

$$F(\rho,\theta)=\left\langle\frac{d\alpha}{d\sigma},\frac{d\gamma}{dS}\right\rangle$$

系数 $F(\rho,\theta)$在 P 点没有定义. 然而，如果固定一条径向测地线 $\theta=$常数，则上述等式的第二项对这条测地线上的每点均有定义. 因为在 P 点有 $\alpha(\sigma)=P$，即$\frac{d\alpha}{d\sigma}=0$，我们得到

$$\lim_{\rho\to 0}F(\rho,\theta)=\lim_{\rho\to 0}\left\langle\frac{d\alpha}{d\sigma},\frac{d\gamma}{dS}\right\rangle=0$$

但 F 不依赖于 ρ，这就表明 $F=0$.

为了证明命题的最后一个结论，我们选取 P 点的一个法坐标系$(\bar{u},\bar{v})$使得坐标变换为

$$\bar{u}=\rho\cos\theta,\quad \bar{v}=\rho\sin\theta,\quad \rho\neq 0,\quad 0<\theta<2\pi$$

回忆一下

$$\sqrt{EG-F^{2}}\doteq\sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^{2}}\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(\rho,\theta)}$$

其中 $\partial(\bar{u},\bar{v})/\partial(\rho,\theta)$是坐标变换的 Jacobi 行列式而 $\bar{E}$，$\bar{F}$，$\bar{G}$ 为第一基本形式在法坐标系中的系数，我们得到

$$\sqrt{G}=\rho\sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^{2}},\quad \rho\neq 0 \tag{1}$$

由于在 p 点 $\bar{E}=\bar{G}=1$，$\bar{F}=0$(法坐标系是在 p 定义的)，我们得到

$$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0,\quad \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho}=1$$

命题得证. 证毕.

注 1 $F=0$ 的几何意义是：在法邻域中，测地圆正交于径向测地线. 这一事实也称为 Gauss 引理.

我们现在来给出测地极坐标的一些几何应用.

首先研究一下常数 Gauss 曲率的曲面. 因为在极坐标系中 $E=1$ 和 $F=0$，Gauss 曲率 K 可以写成

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$$

如果我们希望曲面具有曲率 $K(\rho,\theta)$(在所讨论的坐标邻域内)，则上式可以看作$\sqrt{G}(\rho,\theta)$应满足的微分方程式. 如果 K 是常数，则上式，或等价地

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0 \tag{2}$$

是二阶常系数的微分方程式.

定理(Minding) 任何二个具有相同常数 Gauss 曲率的正则曲面均局部等距. 更严格地讲,设 S_1 和 S_2 为二个正则曲面且具有相同的常数 Gauss 曲率 K. 选取点 $p_1 \in S_1$ 和 $p_2 \in S_2$,及标准正交基$\{\rho_1, \rho_2\} \in T_{p1}(S_1)$,$\{f_1, f_2\} \in T_{p2}(S_2)$. 则存在 P_1 的邻域 V_1 和 P_2 的邻域 V_2 以及等距对应 ψ: $V_1 \to V_2$ 使得 $d\psi(\rho_1) = f_1$,$d\psi(\rho_2) = f_2$.

证明 让我们首先考虑方程(2)并分别研究情形(1)$K=0$,(2)$K>0$ 和(3)$K<0$.

1. 若 $K=0$,则$(\sqrt{G})_{\rho\rho}=0$. 因此,$(\sqrt{G})_\rho = g(\theta)$,其中 $g(\theta)$是 θ 的函数. 因为

$$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$$

所以有$(\sqrt{G})_\rho \equiv 1$. 因此,$\sqrt{G} = \rho + f(\theta)$,$f(\theta)$是 θ 的函数. 又因为

$$f(\theta) = \lim_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0$$

在这一情形,最后我们有

$$E = 1,\quad F = 0,\quad G(\rho,\theta) = \rho^2$$

2. 若 $K>0$,则方程(2)的一般解为

$$\sqrt{G} = A(\theta)\cos(\sqrt{K}\rho) + B(\theta)\sin(\sqrt{K}\rho)$$

其中 $A(\theta)$和 $B(\theta)$是 θ 的函数. 要验证上式是方程(2)的解,只要取微分就行了.

因为$\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0$,我们得到 $A(\theta)=0$. 因此,

$$(\sqrt{G})_\rho = B(\theta)\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}\rho)$$

再由$\lim\limits_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$,我们有

$$B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

所以在这种情形

$$E = 1,\quad F = 0,\quad G = \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}\rho)$$

3. 最后,若 $K<0$,方程(2)的一般解为

$$\sqrt{G} = A(\theta)\cosh(\sqrt{-K}\rho) + B(\theta)\sinh(\sqrt{-K}\rho)$$

利用初始条件,可以推出在这一情形有

$$E = 1,\quad F = 0,\quad G = \frac{1}{-K}\sinh^2(\sqrt{-K}\rho)$$

现在我们着手证明 Minding 定理. 设 V_1 和 V_2 分别是 p_1 和 p_2 的法邻域. 设 φ 是 $T_{p1}(S_1)$ 到 $T_{p2}(S_2)$上的线性等距对应并且 $\varphi(e_1) = f_1$,$\varphi(e_2) = f_2$. 选取 $T_{p1}(S_1)$的极坐标系,其极轴为 l 并设 $L_1 = \exp_{p1}(l)$,$L_2 = \exp_{p2}(\varphi(l))$. 令 ψ: $V_1 \to V_2$ 的定义为

$$\psi = \exp_{p2} \circ \varphi \circ \exp_{p1}^{-1}$$

我们断言 ψ 是所要求的等距对应.

事实上,ψ 在 $V_1 - L_1$ 上的限制 $\bar{\psi}$ 将极点为 p_1 坐标为(ρ, θ)的极坐标邻域映成极点为 p_2 坐

标为$(\rho,\ \theta)$的极坐标邻域. 根据上面对方程(2)的研究，第一基本形式的系数在对应点相等. 由 4.2 命题 1，$\bar{\psi}$是一等距对应. 根据连续性，ψ 在 L_1 的点处仍然保持内积，因此，ψ 是等距对应. 可直接验证 $d\psi(e_1)=f_1$，$d\psi(e_2)=f_2$. 定理得证. 证毕.

注 2 当 K 不是常数但不变号时，表达式$\sqrt{G}K=-(\sqrt{G})_{\rho\rho}$有很好的直观意义. 考虑曲线 $\rho=$常数在两条邻近的测地线 $\theta=\theta_0$ 和 $\theta=\theta_1$ 之间的弧长 $L(\rho)$，

$$L(\rho)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{G(\rho,\theta)}\,d\theta$$

假定 $K<0$，因为

$$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=1 \text{ 和} (\sqrt{G})_{\rho\rho}=-K\sqrt{G}>0$$

所以函数 $L(\rho)$的变化状况如图 4-39(a)所示. 这表明 $L(\rho)$随 ρ 增加而增加；也就是说，当 ρ 增加时测地线 $\theta=\theta_0$ 和 $\theta=\theta_1$ 越来越分开(当然，必须保持在所讨论的坐标邻域内).

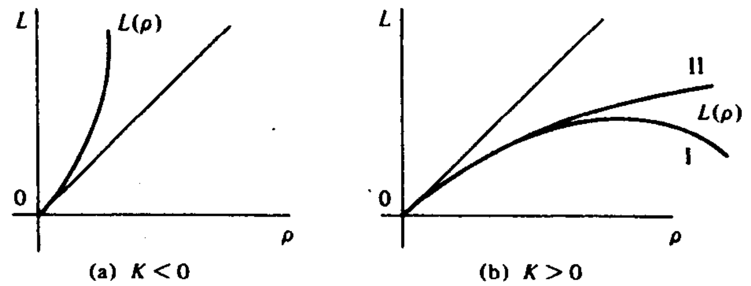


图 4-39 测地线在法邻域内的伸展

另一方面，若 $K>0$，则 $L(\rho)$的变化状况如图 4-39(b)所示. 测地线 $\theta=\theta_0$ 和 $\theta=\theta_1$ 有可能在某个 ρ 以后越来越靠近(情形 I)，也可能仍然分开(情形 II). 这取决于 Gauss 曲率. 例如，在球面上，从一个极点出发的二条测地线过赤道以后，则相互靠近(图 4-40).

在第 5 章(5.4 和 5.5)我们将回到这个问题并说得更为精确.

测地极坐标的另一应用是关于 Gauss 曲率 K 的几何解释.

为此，首先注意 K 在测地极坐标$(\rho,\ \theta)$中的表达式为

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$$

因此，

$$\frac{\partial^3(\sqrt{G})}{\partial\rho^3}=-K(\sqrt{G})_\rho-K_\rho(\sqrt{G})$$

回想一下

$$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0$$

我们得到

$$-K(p)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial\rho^3}$$

另一方面，利用极限来定义$\sqrt{G}$及其对 ρ 的各阶导数在 p 点的值，我们可以写出

$$\sqrt{G}(\rho,\theta)=\sqrt{G}(0,\theta)+\rho(\sqrt{G})_\rho(0,\theta)+\frac{\rho^2}{2!}(\sqrt{G})_{\rho\rho}(0,\theta)$$

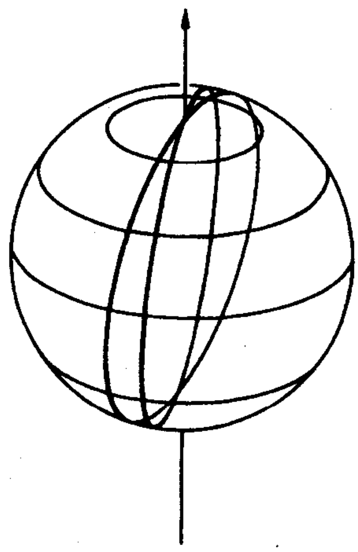


图 4-40

$$+\frac{\rho^3}{3!}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}(0,\theta)+R(\rho,\theta)$$

其中
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{R(\rho,\theta)}{\rho^3}=0$$

以上极限关于 θ 一致成立. 在上式中代入已知值，我们得到

$$\sqrt{G}(\rho,\theta)=\rho-\frac{\rho^3}{3!}K(p)+R$$

有了$\sqrt{G}$的这个值，我们可以计算半径 $\rho=r$ 的测地圆的弧长 L：

$$L=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon}\sqrt{G}(r,\theta)d\theta=2\pi r-\frac{\pi}{3}r^3K(p)+R_1$$

其中
$$\lim_{r\to 0}\frac{R_1}{r^3}=0$$

由此可得
$$K(p)=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r-L}{r^3}$$

上式给出 $K(p)$的一种内蕴解释，它可以用以 p 点为圆心的测地圆 $S_r(p)$的半径及 $S_r(p)$和 $\exp_p^{-1}(S_r(p))$的弧长 L 和 $2\pi r$ 来表达.

利用 $S_r(p)$界定的区域的面积来解释 $K(p)$也可用上述办法很容易得到(见习题 3).

作为测地极坐标的最后一个应用，我们要研究测地线的一些极小性质. 测地线的基本性质是在局部范围内它使弧长达极小. 更精确地，我们有

命题 4 设 p 是曲面 S 上的一点. 则存在点 p 的一个邻域 $W\subset S$，使得如果 γ：$I\to W$ 为参数测地线，且 $\gamma(0)=p$，$\gamma(t_1)=q$，$t_1\in I$，以及 α：$[0, t_1]\to S$ 是连结 p 和 q 的正则参数曲线，则有

$$l_\gamma\leqslant l_\alpha$$

其中 l_α 为曲线 α 的长度. 再者，如果 $l_\gamma=l_\alpha$，则 α 的轨迹与 γ 的轨迹在 p 和 q 间相重合.

证明 设 V 是 p 的法邻域，W 是包含在 V 内由半径为 r 的测地圆界定的闭区域. 设 (ρ, θ)是以 p 为中心的 $\overline{W}-L$ 的测地极坐标，而 $q\in L$.

首先假定 $\alpha((0, t_1))\subset\overline{W}-L$，并置 $\alpha(t)=(\rho(t), \theta(t))$. 先注意

$$\sqrt{(\rho')^2+G(\theta')^2}\geqslant\sqrt{(\rho')^2}$$

而等号成立的充要条件为 $\theta'\equiv 0$；也就是说，$\theta=$常数. 因此曲线 α 在 ϵ 和 $t_1-\epsilon$ 之间的长度 $l_\alpha(\epsilon)$满足

$$l_\alpha(\epsilon)=\int_\epsilon^{t_1-\epsilon}\sqrt{(\rho')^2+G(\theta')^2}dt$$
$$\geqslant\int_\epsilon^{t_1-\epsilon}\sqrt{(\rho')^2}dt\geqslant\int_\epsilon^{t_1-\epsilon}\rho' dt=l_\gamma-2\epsilon$$

而且等号成立的充要条件是 $\theta=$常数和 $\rho'>0$. 在上式中令 $\epsilon\to 0$，我们得到 $l_\alpha\geqslant l_\gamma$ 并且等号成立的充要条件是 α 是径向测地线 $\theta=$常数，其参数表示为 $\rho=\rho(t)$，$\rho'(t)>0$. 由此可知，如果 $l_\alpha=l_\gamma$，则α 和 γ 的轨迹在 p 和 q 间重合.

现在假设 $\alpha((0, t_1))$与 L 相交，并假设第一个交点为 $\alpha(t_2)$. 则根据前面的推理，在 t_0 和

t_2 之间 $l_\alpha \geq l_\gamma$，而 $l_\alpha = l_\gamma$ 意味着 α 和 γ 的轨迹重合. 因为 $\alpha([0, t_1])$ 和 L 是紧集，所以存在 $\bar{t} \geq t_2$，使得或者 $\alpha(\bar{t})$ 是 $\alpha((0, t_1))$ 和 L 的最后一个交点，或者 $\alpha([\bar{t}, t_1]) \subset L$（图 4-41）. 无论怎样，应用上面的证明，均可得到命题的结论.

最后假定 $\alpha([0, t_1])$ 不完全包含在 $\overline{W}$ 中. 设 $t_0 \in [0, t_1]$ 是使得 $\alpha(t_0) = x$ 属于 $\overline{W}$ 的边界的第一个值. 设 $\bar{\gamma}$ 是径向测地线 px 并设 $\bar{\alpha}$ 是曲线 α 在区间 $[0, t_0]$ 上的限制，则显然 $l_\alpha \geq l_{\bar{\alpha}}$（见图 4-42）.

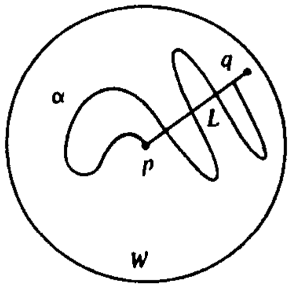


图 4-41

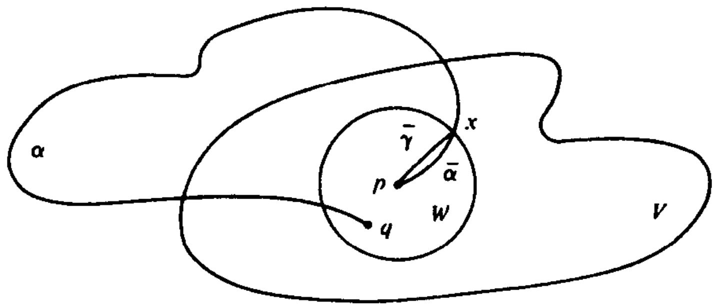


图 4-42

由前面的推理可知 $l_{\bar{\alpha}} \geq l_{\bar{\gamma}}$. 因为 q 是 $\overline{w}$ 的内点，所以 $l_{\bar{\gamma}} > l_\gamma$. 由此，$l_\alpha > l_\gamma$，完成证明. 证毕.

注 3 为了简单起见，我们对正则曲线证明了上述命题. 然而，对于分段正则的曲线命题仍然成立（参见 4.4 定义 7）. 其证明完全类似，故留作习题.

注 4 在证明中也说明命题 4 的最后结论的逆也成立，但不能推广到分段正则的曲线.

上述命题在整体上是不对的，可用球面为例来说明. 球面上两个非对径点可以用二条长度不等的子午线相连结，但只有较短的一条才满足命题的结论. 换言之，如果将一条测地线充分延长，则它可能不是端点间最短的道路. 然而，下述命题说明：如果一条正则曲线是在它上面任意二点间的最短道路，则这条曲线必然是测地线.

命题 5 设 $\alpha: I \to S$ 是正则曲线，其参数与弧长成比例. 假定 α 在任意二点 $t, \tau \in I$ 间的弧长小于或等于连结 $\alpha(t)$ 和 $\alpha(\tau)$ 的任何正则参数曲线的弧长，则 α 是一条测地线.

证明 设 $t_0 \in I$ 是 I 的任何点并设 w 是 $\alpha(t_0) = p$ 的邻域（定义如命题 4）. 设 $q = \alpha(t_1) \in w$. 从命题 4 中等号成立的情形可知 α 在 (t_0, t_1) 上是测地线. 不然的话，α 在 (t_0, t_1) 间的弧长要大于连结 $\alpha(t_0)$ 和 $\alpha(t_1)$ 的径向测地线的长度，这与假设违背. 因为 α 是正则的，所以根据连续性，α 在 t_0 仍然是测地线. 证毕.

习题

1. 证明：在常数曲率曲面上，测地圆的测地曲率为常数.
2. 证明：在测地极坐标（$E=1$，$F=0$）之下的测地线方程为

$$\rho'' - \frac{1}{2}G_\rho(\theta')^2 = 0$$

$$\theta'' + G_\rho/G\rho'\theta' + \frac{1}{2}G_\theta/G(\theta')^2 = 0$$

3. 设 p 为正则曲面 S 上的一点. 证明:

$$K(p)=\lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\frac{\pi r^2-A}{r^4}$$

其中 $K(p)$是 S 在 P 点的 Gauss 曲率，r 是以 p 为中心的测地圆 $S_r(p)$的半径，A 是由 $S_r(p)$界定的区域的圆面积.

4. 证明：在以 p 为中心的法坐标系下，所有 Christoffel 符号在 p 点为零.

5. 在下述曲面中，哪一对是局部等距的?

a. 旋转环面和锥面.

b. 锥面和球面.

c. 锥面和柱面.

6. 设 S 是一曲面而 p 是 S 的一点，设 $S'(p)$是以 p 为圆心的充分小的测地圆，使得 $S'(p)$包含在一个法邻域内. 设 r 和 s 是 $S'(p)$上的二点，C 是 $S'(p)$在 r 和 s 间的弧. 考虑曲线 $\exp_p^{-1}(C)\subset T_p(S)$. 证明：$S(p)$可以选取得充分小，使得

a. 若 $K>0$，则 $l(\exp_p^{-1}(C))>l(C)$，其中 $l(\quad)$表示相应曲线的弧长.

b. 若 $K<0$，则 $l(\exp_p^{-1}(C))<l(C)$.

7. 设(ρ,θ)是一曲面的测地极坐标系$(E=1,F=0)$. 并设 $\gamma(\rho(S),\theta(S))$为测地线且与曲线 $\theta=$常数的交角为 $\varphi(S)$. 为明确起见，曲线 $\theta=$常数的定向为 ρ 增加的方向，而 φ 代表在参数表示(ρ,θ)的定向下，从 $\theta=$常数到 γ 的定向夹角. 证明:

$$\frac{d\varphi}{dS}+(\sqrt{G})_\rho\frac{d\theta}{dS}=0$$

*8.(“小”测地三角形内角和的 Gauss 定理). 设△是曲面 S 上的测地三角形(即其边为测地线段). 假定三角形足够小，以致包含在它某个顶点的法坐标邻域内. 直接证明(即不用 Gauss-Bonnet 定理):

$$\iint_\Delta K\,dA=\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\right)-\pi$$

其中 K 是 S 的 Gauss 曲率，而 $0<\alpha_i<\pi$，$i=1,2,3$，是三角形△的内角.

9.(测地圆的局部等周不等式). 设 $p\in S$ 并设 $S_r(p)$为以 p 为中心半径为 r 的测地圆. 设 L 是 $S_r(p)$的弧长，而 A 是 $S_r(p)$界定的区域的面积.

证明:

$$4\pi A-L^2=\pi^2r^4K(p)+R$$

其中 $K(p)$是 S 在 P 点的 Gauss 曲率，而且

$$\lim_{r\to 0}\frac{R}{r^4}=0$$

因此，如果 $K(p)>0$(或<0)并且 r 充分小，则 $4\pi A-L^2>0$(或<0). (比较 1.7 的等周不等式).

10. 设 S 是连通曲面并设 φ，ψ: $S\to S$ 是 S 的二个等距对应. 假定存在一点 $p\in S$ 使得 $\varphi(p)=\psi(p)$并且对所有 $v\in T_p(S)\,d\varphi_p(v)=d\psi_p(v)$. 证明：对所有 $q\in S$，$\varphi(q)=\psi(q)$.

11.（小测地三角形的自由迁移性） 设 S 是常数 Gauss 曲率的曲面. 选取点 p_1，$p'_1\in S$ 并设 v 和 v' 分别为 p_1 和 p'_1 的法邻域. 在 v 中选取测地三角形 $p_1p_2p_3$（测地一词是指边 $\widehat{p_1p_2}$，$\widehat{p_2p_3}$，$\widehat{p_3p_1}$ 均为测地线弧）. 而 p'_1，p'_2，p'_3 为 v' 中适合下条件的点：

$$l(p_1,p_2)=l(p'_1,p'_2)$$
$$l(p_2,p_3)=l(p_2,p_3)$$
$$l(p_3,p_1)=l(p_3,p_1)$$

（这里 l 表示测地弧的长度）. 证明：存在等距对应 θ：$V\to V'$，把第一个三角形映到第二个上.（这是中学几何的一个定理——平面上对应边相等的两个三角形全等——推广到常曲率曲面的局部形式.）

12. 微分同胚 φ：$S_1\to S_2$ 称为*测地映照*，如果对于 S_1 的任意测地线 $C\subset S_1$，正则曲线 $\varphi(C)\subset S_2$ 也是 S_2 的测地线. 如果 U 是 $p\in S_1$ 的一个邻域，则 φ：$U\to S_2$ 称为*局部测地映照*，若在 S_2 中存在 $\varphi(p)$ 的一个邻域 V 使得 φ：$U\to V$ 是测地映照.

a. 证明：若 φ：$S_1\to S_2$ 为测地映照又是共形映照，则 φ 是相似，即

$$\langle v,w\rangle_p=\lambda\langle d\varphi_p(v),d\varphi_p(w)\rangle,\quad p\in S_1,\quad v,\quad w\in T_p(S_1)$$

其中 λ 是常数.

b. 设 $S^2=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$ 是单位球面，$S^-=\{(x,\ y,\ z)\in S^2;\ z<0\}$ 为下半球面，而 P 是平面 $z=-1$. 证明：中心投影映照 φ：$S^-\to P$ 是测地映照，φ 的定义为把 S^- 上的点 p 对应于 S^2 的中心和 p 点的连线与平面 P 的交点.

*c. 证明：对常曲率曲面 S 的每点 p，存在一个到平面去的局部测地映照.

13.（Beltrami 定理） 在习题 12 的 C 中，已经证明对常曲率 K 的曲面 S 上的每点 $p\in S$，均存在到平面的局部测地映照. 为了证明逆定理（Beltrami 定理）：如果正则连通的曲面 S，在每点 $p\in S$ 均存在一个到平面的局部测地映照，则 S 有常曲率，必须证明下述结论：

a. 在一曲面以 $(u,\ v)$ 为参数的某一邻域内，如果 $v=v(u)$ 是一条测地线且不与 $u=$ 常数相重合，则

$$\frac{d^2v}{du^2}=\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{du}\right)^3+(2\Gamma_{12}^1-\Gamma_{22}^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+(\Gamma_{11}^1-2\Gamma_{12}^2)\frac{dv}{du}-\Gamma_{11}^2$$

*b. 设 S 在点 $p\in S$ 的邻域 V 中，存在一个到平面 $\mathbb{R}^2$ 的局部测地映照 φ：$V\to\mathbb{R}^2$，则可以选取 V 的参数表示 $(u,\ v)$ 使得

$$\Gamma_{22}^1=\Gamma_{11}^2=0,\quad \Gamma_{22}^2=2\Gamma_{12}^1,\quad \Gamma_{11}^1=2\Gamma_{12}^2$$

*c. 若存在 $p\in S$ 的邻域 V 到平面的测地映照，则在 V 内，曲率 K 满足关系式：

$$KE=\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2-(\Gamma_{12}^2)_u \tag{a}$$
$$KF=\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-(\Gamma_{12}^2)_v \tag{b}$$
$$KG=\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1-(\Gamma_{12}^1)_v \tag{c}$$
$$KF=\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1-(\Gamma_{12}^1)_u \tag{d}$$

*d. 若存在 $p\in S$ 的邻域 V 到平面的测地映照，则在 V 内，曲率 K 为常数.

e. 利用上述结果及关于连通性的标准推理，证明 Beltrami 定理.

14.（完整群）　设 S 是正则曲面，$p\in S$. 对每条分段正则的参数曲线 α: $[0, l]\to S$，$\alpha(0)=\alpha(l)=p$，假定映照 p_α：$T_p(S)\to T_p(S)$如下：把每个向量 $v\in T_p(S)$映为它沿 α 平行移动回到 P 点的向量. 根据 4.4 的命题 1，P_α 是 $T_p(S)$的线性等距对应. 如果 β: $[l, \bar{l}]\to S$ 是另一条分段正则的参数曲线且 $\beta(l)=\beta(\bar{l})=p$，定义曲线 $\beta\circ\alpha$: $[0, l+\bar{l}]\to S$ 为先走过 α 再走过 β；即：$\beta\circ\alpha(s)=\alpha(s)$，若 $s\in[0, l]$. 而 $\beta\circ\alpha(s)=\beta(s)$，若 $s\in[l, \bar{l}]$.

a. 考虑集合

$H_p(S)=\{P_\alpha$：$T_p(S)\to T_p(S)$；对于所有连结 p 到 P 的 $\alpha\}$，

其中 α 是分段正则的. 在上述集合中，定义运算 $P_\beta\circ P_\alpha=P_{\beta\circ\alpha}$；也就是说，$P_\beta\circ P_\alpha$ 是先作 P_α 再作 P_β 的通常的复合. 证明：对于这个运算，$H_p(S)$是一个群（实际上，这是 $T_p(S)$的线性等距群的子群）. $H_p(S)$称为 S 在 P 点的完整群.

b. 证明：$K\equiv 0$ 的曲面上所有点的完整群退化为恒等元素.

c. 证明：若 S 是连通曲面，则任意两点 p，$q\in S$ 的完整群 $H_p(S)$和 $H_q(S)$同构. 因此，我们可以讨论曲面的（抽象）完整群.

d. 证明：球面的完整群同构于 2×2 旋转矩阵群（参考 4.4 习题 2）.

4.7　测地线的一些进一步的性质；凸邻域[⊖]

在这一节，我们要说明如何从向量场的存在性，唯一性和对初始条件的依赖性的一般理论导出关于测地线的具体性质（特别是 4.4 的命题 5）.

在参数表示 $x(u, v)$下，测地线方程为

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

其中 Γ_{ij}^k 是局部坐标 u 和 v 的函数. 置 $u'=\xi$ 和 $v'=\eta$，上述方程可以写成一般形式

$$\begin{aligned} \xi' &= F_1(u,v,\xi,\eta) \\ \eta' &= F_2(u,v,\xi,\eta) \\ u' &= F_3(u,v,\xi,\eta) \\ v' &= F_4(u,v,\xi,\eta) \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $F_3(u, v, \xi, \eta)=\xi$，$F_4(u, v, \xi, \eta)=\eta$.

采用下述记号是方便的：(u, v, ξ, η)将代表$\mathbb{R}^4$ 的一个点，$\mathbb{R}^4$ 可以看作是笛卡儿积 $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$；$(u, v)$将代表第一个因子的点，而$(\xi, \eta)$代表第二个因子的点.

方程组(2)等价于$\mathbb{R}^4$ 的一个开集上的向量场，其定义与$\mathbb{R}^2$ 的向量场完全类似（参考 3.4）. 轨线的存在性和唯一性定理（3.4 的定理 1）对此情形仍然成立（实际上，定理对$\mathbb{R}^n$ 成立；参见 S. Lang，Analysis I，Addison-Wesley，Reading，Mass.，1968，pp. 383 ～ 386），可叙述如下：

在开集 $U\subset\mathbb{R}^4$ 上给定方程组(2)并给定一点

$$(u_0, v_0, \xi_0, \eta_0)\in U$$

⊖　本节初读时可以略去，但在第 5 章中，要用到命题 1 和 2（不读本节也能理解）.

则方程组(2)有唯一的轨线 α：$(-\varepsilon, \varepsilon)\to U$，满足

$$\alpha(0) = (u_0, v_0, \xi_0, \eta_0)$$

为了把上述结果应用到正则曲面 S，我们应该注意，给定 p 的坐标邻域 V 的参数表示 $x(u, v)$，二元组(q, v)，$q\in V$，$v\in T_q(S)$的集合可以等同于集合 $V\times\mathbb{R}^2=U\subset\mathbb{R}^4$. 为此，我们借助于基$\{x_u, x_v\}$把每个 $T_q(S)$，$q\in V$，与$\mathbb{R}^2$ 等同起来. 以后谈到二元组(q, v)集合的可微性和连续性，就是指由这样的等同诱导出的可微性及连续性.

假定了上面说过的定理，则 4.4 的命题 5 的证明是显然的. 实际上，在 $p\in S$ 附近的参数表示 $x(u, v)$之中，测地线方程为定义在 $U\subset\mathbb{R}^4$ 上的一组形如(2)的方程. 然后，基本定理意味着：给定一点 $q=(u_0, v_0)\in V$ 和一非零切向量 $v=(\xi_0, \eta_0)\in T_q(S)$，则存在 V 中唯一的参数测地线

$$\gamma = \pi\circ\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to V$$

其中 $\pi(q, v)=q$ 是 $V\times\mathbb{R}^2\to V$ 的投影.

由方程(2)确定的向量场对于初始条件的依赖性定理也是重要的. 本质上这与平面的情形完全一样：给定一点 $p\in(u_0, v_0, \xi_0, \eta_0)\in U$，则存在 p 的邻域 $V=V_1\times V_2$(其中 V_1 是(u_0, v_0)的邻域，而 V_2 是(ξ_0, η_0)的邻域)，开区间 I，以及可微映照 α：$I\times V_1\times V_2\to U$，使得对于固定的$(u, v, \xi, \eta)=(q, v)\in V$，曲线 $\alpha(t, q, V)$，$t\in I$，是(2)通过(q, v)的轨线.

为了对正则曲面 S 应用这一结论，我们在 $p\in S$ 引进参数表示，使得 V 为坐标邻域并和上面一样，将二元组(q, v)，$q\in V$，$v\in T_q(S)$的集合与 $V\times\mathbb{R}^2$ 等同. 选取$(p, 0)$作为初始条件，我们得到区间$(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$，$p$ 点的邻域 $V_1\subset V$，原点在$\mathbb{R}^2$ 的邻域 V_2 以及可微映照

$$\gamma:(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)\times V_1\times V_2\to V$$

使得如果$(q, v)\in V_1\times V_2$，$v\neq 0$，则曲线

$$t\to\gamma(t,q,v),\quad t\in(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)$$

是适合 $\gamma(0, q, v)=q$，$\gamma'(0, q, v)=v$ 的测地线. 并且如果 $v=0$，则此曲线退化为点 q. 这里 $\gamma=\pi\circ\alpha$，$\pi(q, v)=q$ 是投影 $U=V\times\mathbb{R}^2\to V$，而 α 是上述定义的映照.

回到曲面上，集合 $V_1\times V_2$ 是

$$\{(q,v);\quad q\in V_1,\quad v\in V_q(0)\subset T_q(S)\}$$

其中 $V_q(0)$代表 $T_q(S)$的原点的邻域. 这样，如果将 γ 限制到$(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)\times\{p\}\times V_2$，我们可以选取$\{p\}\times V_2=B_{\varepsilon_1}\subset T_p(S)$并得到

定理 1 给定 $p\in S$，存在数 $\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$ 和可微映照

$$\gamma:(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)\times B_{\varepsilon_1}\to S,\quad B_{\varepsilon_1}\subset T_p(S)$$

使得对任意 $v\in B_{\varepsilon_1}$，$v\neq 0$，$t\in(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$，曲线 $t\to\gamma(t, v)$是 S 的测地线并满足 $\gamma(0, v)=p$，$\gamma'(0, v)=V$. 对于 $v=0$，则有 $\gamma(t, 0)=p$.

在 4.6 的命题 1 的证明中已用过这个结果.

上述定理相应于 p 固定的情形. 为了处理一般情形，让我们用 $B_r(q)$表示以 q 为圆心，半径为 r 的一条(小)测地圆所界定的区域，$B_r(q)$及其边界的并集记作 $\overline{B}_r(q)$.

设 $\varepsilon>0$ 使得 $\overline{B}_\varepsilon(p)\subset V_1$. 设 $B_\delta(q)(0)\subset\overline{V}_q(0)$是集合 $\overline{V}_q(0)$中的最大开圆盘，而 $\overline{V}_q(0)$是

$V_q(0)$与其极限点的并集，令 $\varepsilon_1=\inf\delta(q)$，$q\in\overline{B}_\varepsilon(p)$．显然 $\varepsilon_1>0$．因此，集合

$$\mathscr{U}=\{(q,v);\quad q\in B_\varepsilon(p),\quad v\in B_{\varepsilon_1}(0)\subset T_q(S)\}$$

包含在 $V_1\times V_2$ 中，我们有

定理 1a 给定 $p\in S$，存在正数 ε，ε_1，ε_2 和可微映照

$$\gamma:(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)\times\mathscr{U}\to S$$

其中 $$\mathscr{U}=\{(q,v);q\in B_\varepsilon(p),V\in B_{\varepsilon_1}(0)\subset T_q(S)\}$$

使得 $\gamma(t,q,0)=q$，并且对 $V\neq 0$，曲线

$$t\to\gamma(t,q,v),\quad t\in(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)$$

是 S 的测地线，且有 $\gamma(0,q,v)=q$，$\gamma'(0,q,v)=V$．

让我们应用定理 1a 来证明下列更精细的关于法邻域的存在性定理．

命题 1 给定 $p\in S$，存在 p 在 S 中的邻域 W 和 $\delta>0$ 使得对每点 $q\in W$，$\exp_q$ 是在 $B_\delta(0)\subset T_q(S)$和 $\exp_q(B_\delta(0))\supset W$ 之间的微分同胚；也就是说，W 是它的所有点的法邻域．

证明 设 V 是 p 的坐标邻域．设 ε，ε_1，ε_2 和 γ：$(-\varepsilon_2,\varepsilon_2)\times\mathscr{U}\to V$ 如定理 1a 所述．选择 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$，可以保证，对任意$(q,v)\in\mathscr{U}$，$\exp_q(v)=\gamma(|v|,q,v)$有定义．因此，我们可以定义可微映照 φ：$\mathscr{U}\to V\times V$ 为

$$\varphi(q,v)=(q,\exp_q(v))$$

首先证明 $d\varphi$ 在$(p,0)$非奇异．为此，我们研究 φ 如何变换 $\mathscr{U}$ 中的曲线

$$t\to(p,tw),\quad t\to(\alpha(t),0)$$

其中 $w\in T_p(S)$并且 $\alpha(t)$是 S 的曲线，$\alpha(0)=p$．注意到这些曲线在 $t=0$ 的切向量分别是$(0,w)$和$(\alpha'(0),0)$，因而，

$$d\varphi_{(p,0)}(0,w)=\frac{d}{dt}(p,\exp_p(wt))\Big|_{t=0}=(0,w)$$

$$d\varphi_{(p,0)}(\alpha'(0),0)=\frac{d}{dt}(\alpha(t),\exp_{\alpha(t)}(0))\Big|_{t=0}$$

$$=(\alpha'(0),\alpha'(0))$$

并且 $d\varphi_{(p,0)}$将线性无关的向量映成线性无关的向量．因此，$\alpha\varphi_{(p,0)}$是非奇异的．

由此，我们可以应用反函数定理证明：存在$(p,0)$的一个邻域 $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$，使得 φ 把 $\mathscr{V}$微分同胚地映为(p,p)点在 $V\times V$ 中一个邻域．设 $U\subset B_\varepsilon(p)$和 $\delta>0$ 使得

$$\mathscr{V}=\{(q,v)\in\mathscr{U},q\in U,v\in B_\delta(0)\subset T_q(S)\}$$

最后，设 $W\subset U$ 为 p 点的邻域使得 $W\times W\subset\varphi(\mathscr{V})$．

我们断言：如此求得的 δ 和 W 满足定理的结论．事实上，因为 φ 在 $\mathscr{V}$上是微分同胚，所以，对 $q\in W$，$\exp_q$ 是在 $B_\delta(0)$上的微分同胚．更进一步，若 $q\in W$，则

$$\varphi(\{q\}\times B_\delta(0))\supset\{q\}\times W$$

并由 φ 的定义可知 $\exp_q(B_\delta(0))\supset W$．证毕．

注 1 从上面的命题可知，给定两点 q_1，$q_2\in W$，则唯一存在一条连结点 q_1 和 q_2 且长度小于 δ 的测地线 γ．再者，证明的过程也表明 γ“可微地依赖于”q_1 和 q_2；其意义如下：给定$(q_1,q_2)\in W\times W$，则可确定唯一的 $v\in T_{q_1}(S)$（更精确地，v 由 $\varphi^{-1}(q_1,q_2)=(q_1,v)$确定），

使得 $\gamma'(0)=v$，而 v 可微地依赖于 (q_1, q_2).

作为上述结果的一个应用，可以证明：使弧长局部达极小的曲线不能有折点. 更严格地有

命题 2 设 α：$I\to S$ 是分段正则的参数曲线，使得在每段正则弧上，其参数与弧长成比例. 假定 α 上任何二点间的弧长小于或等于连结这两点的任何正则参数曲线的弧长. 则 α 是一条测地线；特别地，α 是处处正则的.

证明 设 $0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant t_{k+1}=l$ 为区间 $[0, l]=I$ 的一个分割，使得 $\alpha\mid[t_i, t_{i+1}]$，$i=0, \cdots, k$，是正则的. 由 4.6 的命题 5，α 在 (t_i, t_{i+1}) 的点处是测地线. 为了证明 α 在 t_i 也是测地线，考虑由命题 1 确定的 $\alpha(t_i)$ 的邻域 W. 令 $q_1=\alpha(t_i-\varepsilon)$，$q_2=\alpha(t_i+\varepsilon)$，$\varepsilon>0$，是 W 内的二点. 并令 γ 为 $B_\delta(q_1)$ 中连结 q_1 和 q_2 的径向测地线(图 4-43). 将 4.6 的命题 4 推广到分段正则曲线，可以得到在 q_1 和 q_2 之间 $l(\gamma)\leqslant l(\alpha)$. 结合命题的假设，这意味着 $l(\gamma)=l(\alpha)$. 因此，再由 4.6 的命题 4 知道 γ 和 α 的轨迹重合. 因而 α 在 t_1 也是测地线，证明完成. 证毕.

在 4.4 的例 6 中，我们已经用了下述事实：旋转面上的测地线 $\gamma(t)$ 不能渐近于非测地的纬圆 P_0. 作为命题 1 的进一步的应用，我们大概说一下上述事实的证明(细节留作习题).

假定上述结论不真. 令 p 为纬圆 P_0 上的一点. 设 W 和 δ 为命题 1 给定的邻域和正数，并令 $q\in P_0\cap W$，$q\neq p$. 因为 $\gamma(t)$ 渐近于 p_0，所以 p 点是 $\gamma(t_i)$，$\{t_i\}\to\infty$，的极限点，并且 γ 在 t_i 的切线趋于 P_0 在 p 点的切线. 由注 1，连结点 p 和 q 长度小于 δ 的测地线 $\bar{\gamma}(t)$ 在 p 点必须与 P_0 相切. 根据 Clairaut 关系(参考 4.4 的例 5)，$\bar{\gamma}(t)$ 在 p 点周围的一小段弧必须处在 $\gamma(t)$ 所在的 W 的区域内. 由此可得，在 W 中存在一对充分靠近 p 的点，可以用二条长度小于 δ 的测地线连结起来(图 4-44). 由此可得矛盾并证明了我们的断言.

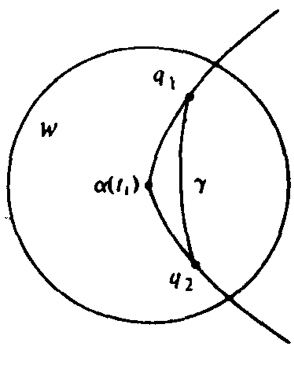


图 4-43

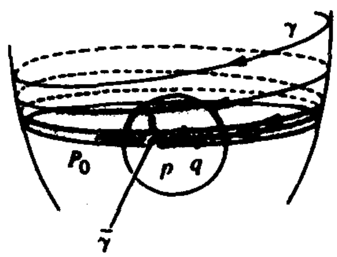


图 4-44

由命题 1 产生的一个自然的问题是：连结 W 的二点 q_1 和 q_2 且长度小于 δ 的测地线是否完全在 W 内，如果这件事对于 W 的任何二点都对，则称 W 是凸的.

我们说连结二点的参数测地线为极小，如果它的长度小于或等于连结这二点的任何其他的分段正则参数曲线的长度.

若 W 是凸的，则由 4.6 的命题 4(也见注 3)可知：连结 $q_1\in W$ 和 $q_2\in W$ 的测地线为极小. 所以，此时我们可以说 W 的任意二点可以用在 W 中的唯一的极小测地线相连结. 然而，一般而言，W 不是凸的.

我们要证明 W 可以选取为凸的邻域. 证明的要点是下述命题，它本身也是有趣的. 通常，我们用 $B_r(p)$代表以 p 为中心且半径为 r 的测地圆 $S_r(p)$所界定的区域的内部.

命题 3 对每点 $p\in S$，存在一正数 ε 具有下列性质：如果测地线 $\gamma(t)$在 $\gamma(0)$与测地圆 $S_r(p)$相切，$\gamma<\varepsilon$，则对较小的 $t\neq0$，$\gamma(t)$在 $B_r(p)$的外部(图 4-45).

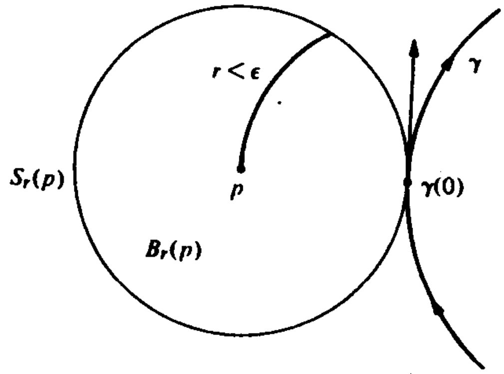


图 4-45

证明 设 W 是由命题 1 确定的 p 的邻域. 对于每一对(q, v)，$q\in W$，$v\in T_p(S)$，$|v|=1$，考虑测地线 $\gamma(t, q, v)$，并对固定的一对(q, v)，置(图 4-46)

$$\exp_p^{-1}\gamma(t,q,v)=u(t)$$
$$F(t,q,v)=|u(t)|^2=F(t)$$

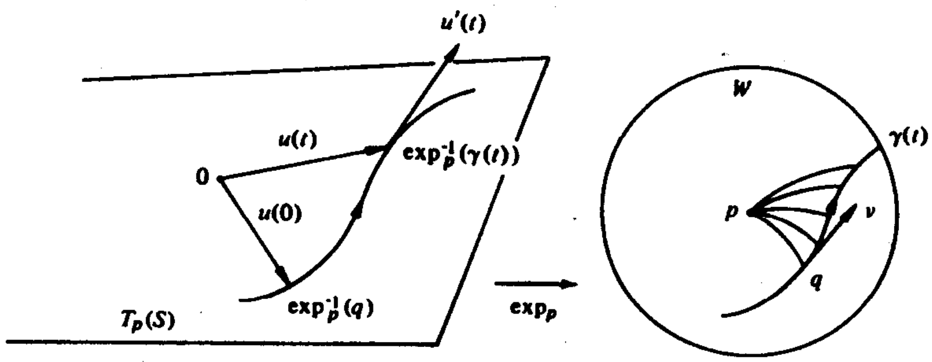


图 4-46

因此，对固定的(q, v)，$F(t)$是 $\gamma(t, q, v)$到 p 点的距离. 显然，$F(t, q, v)$可微. 并注意 $F(t, p, v)=|vt|^2$.

现以 $\mathscr{U}$记集合

$$\mathscr{U}=\{(q,v),q\in W,v\in T_q(S),|v|=1\}$$

并定义一个函数 Q：$\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ 为

$$Q(q,v)=\left.\frac{\partial^2F}{\partial t^2}\right|_{t=0}$$

因为 F 是可微函数，所以 Q 连续. 再者，因为

$$\frac{\partial F}{\partial t}=2\langle u(t),u'(t)\rangle$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=2\langle u(t),u''(t)\rangle+2\langle u'(t),u'(t)\rangle$$

且在(p, v)有

$$u'(t)=v,\quad u''(t)=0$$

我们得到，对于所有 $v\in T_p(S)$，$|v|=1$，有

$$Q(p,v)=2|v|^2=2>0$$

根据连续性可知，存在一邻域 $V\subset W$，使得对于所有 $q\in V$ 和 $v\in T_q(S)$，$|v|=1$，有 $Q(q, v)>0$. 设$\varepsilon>0$ 是使得 $B_\varepsilon(p)\subset V$ 的正数，我们断言 ε 即为所求.

实际上，令 $\gamma<\varepsilon$ 并令 $\gamma(t, q, v)$是在 $\gamma(0)=q$ 与 $S_r(p)$相切的测地线. 在 p 点附近引进测地极坐标，我们看到$\langle u(0), u'(0)\rangle=0$(见图 4-47)，由此$\partial F/\partial t(0)=0$. 因为 $F(0, q, v)=r^2$ 和$(\partial^2F/\partial^2t)(0)>0$，我们得到，对于较小的 $t\neq0$，有 $F(t)>\gamma^2$；因此，$\gamma(t)$在 $B_r(p)$的外部. 证毕.

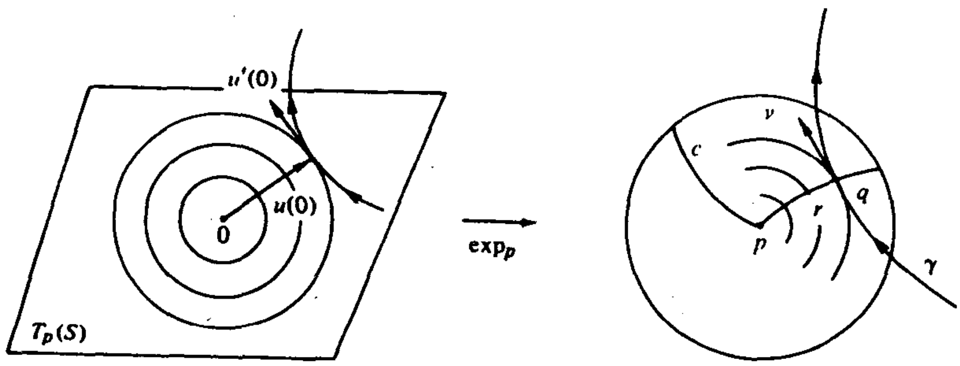


图 4-47

现在我们能够证明以下命题。

命题 4(凸邻域的存在性) 对每点 $p\in S$，存在一正数 $C>0$ 使得 $B_c(p)$是凸的；亦即，$B_c(p)$的任何二点可以用唯一的包含在 $B_c(p)$中的极小测地线相连结.

证明 令 ε 如命题 3 所述. 选取命题 1 中的 δ 和 W 使得$\delta<\frac{\varepsilon}{2}$，并选取 $C<\delta$ 使得 $B_c(p)\subset W$. 我们将证明 $B_c(p)$是凸邻域.

设 q_1 和 $q_2\in B_c(p)$并设 γ：$I\to S$ 是连结q_1、q_2 且长度小于 $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$的测地线. 显然 $\gamma(I)$包含在 $B_\varepsilon(p)$内，并且我们希望证明 $\gamma(I)$包含在 $B_c(p)$内. 假定不然，则存在一点 $m\in B_\varepsilon(p)$，$\gamma(I)$到p 的距离在m 达到极大(图 4-48). 在 m 的邻域内，$\gamma(I)$的点将在 $B_r(p)$内，但这与命题 3 矛盾. 证毕.

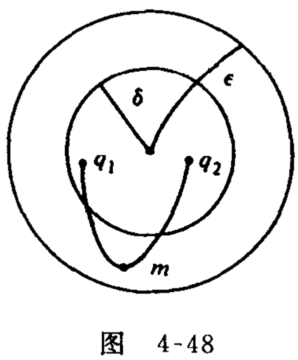


图 4-48

习题

*1. 设 y 和 w 是定义在开集 $U\subset S$ 上的可微向量场. 设 $p\in S$ 以及曲线 α: $I\to U$ 使得 $\alpha(0)=p$, $\alpha'(0)=y$. 沿曲线 α 从 $\alpha(0)$ 到 $\alpha(t)$, $t\in I$, 的平行移动记作 $P_{\alpha,t}$: $T_{\alpha(0)}(S)\to T_{\alpha(t)}(S)$. 证明:

$$(D_y w)(p)=\frac{d}{dt}(P_{\alpha,t}^{-1}(w(\alpha(t))))\Big|_{t=0}$$

其中, 等式右端是 $T_p(S)$ 中的曲线 $P_{\alpha,t}^{-1}(w(\alpha(t)))$ 在 $t=0$ 的速度向量. (因此, 可以从平行移动的概念导出协变导数的概念.)

2. a. 证明协变导数有下列性质. 设 v, w 和 y 是 $U\subset S$ 上的可微向量场, f: $U\to\mathbb{R}$ 是 S 上的可微函数, $y(f)$ 是 f 关于方向 y 的方向导数(参考 3.4 习题 7), 且 λ 和 μ 为实数. 则

1) $D_y(\lambda v+\mu w)=\lambda D_y(v)+\mu D_y(w)$;

$D_{\lambda y+\mu v}(w)=\lambda D_y(w)+\mu D_v(w)$.

2) $D_y(fv)=y(f)v+fD_y(v)$; $D_{fy}(v)=fD_y(v)$.

3) $y(\langle v, w\rangle)=\langle D_y v, w\rangle+\langle v, D_y w\rangle$.

4) $D_{x_v}x_u=D_{x_u}x_v$, 其中 $X(u, v)$ 是 S 的参数表示.

*b. 证明: 性质 3 的等价说法是沿连结二点 p, $q\in S$ 的一条分段正则参数曲线 α: $I\to S$ 的平行移动是 $T_p(S)$ 到 $T_q(S)$ 的等距对应. 证明: 性质 4 等价于 Christoffel 符号关于下标对称.

*c. 设 $\mathcal{V}(U)$ 是 $U\subset S$ 上的可微向量场构成的空间. 设 D: $\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$(这里 $D(y, v)=D_y(v)$)是满足性质 1～4 的映照. 证明: $D_y(v)$ 与课文中的协变导数相同(一般来说, 满足性质 1 和 2 的映照 D 称为 U 上的一个联络. 本习题的要点是证明: 在给定内积的曲面上, 存在唯一的联络具有附加性质 3 和 4).

*3. 设 α: $I=[0, l]\to S$ 是一条简单的参数正则曲线. 考虑沿 α 的一个单位向量场 $v(t)$, 适合 $\langle\alpha'(t), v(t)\rangle=0$ 并设映照 x: $\mathbb{R}\times I\to S$ 为

$$x(s,t)=\exp_{\alpha(t)}(Sv(t)),\quad S\in\mathbb{R},\quad t\in I$$

a. 证明: x 在 $\mathbb{R}\times I$ 的包含 I 的邻域内可微, 而且 dx 在 $(0, t)$, $t\in I$, 处非奇异.

b. 证明: 存在 $\varepsilon>0$ 使得 X 在矩形 $t\in I$, $|S|<\varepsilon$ 上 1 对 1.

c. 证明: 在开集 $t\in(0, l)$, $|S|<\varepsilon$ 上, X 是 S 的参数表示, 其坐标邻域包含 $\alpha((0, l))$. 这种坐标叫做基 α 的测地坐标(或 Fermi 坐标). 证明: 对于这种坐标系有 $F=0$, $E=1$. 再者, 如果 α 是以弧长为参数的测地线, 则 $G(0, t)=1$ 且 $G_s(0, t)=0$.

d. 证明下述类似于 Gauss 引理的结论(参见 4.6 命题 3 后面的注 1). 设 α: $I\to S$ 是正则参数曲线并设 $\gamma_t(S)$, $t\in I$, 是一族以弧长为参数的测地线, 适合 $\gamma_t(0)=\alpha(t)$, $\{\gamma_t'(0), \alpha'(t)\}$ 构成正定向的正交基. 则对于固定的充分小的 $\overline{S}$, 曲线 $t\to\gamma_t(\overline{S})$, $t\in I$, 与所有 γ_t 垂直相交(这些曲线称为测地平行线).

4. 曲线 α: $[a, b]\to S$ 的能量定义为

$$E(\alpha)=\int_a^b|\alpha'(t)|^2dt$$

*a. 证明：$(l(\alpha))^2\leqslant(b-a)E(\alpha)$并且等式成立的充要条件是 t 与弧长成比例.

b. 利用 a 推出：如果 γ：$[a,b]\to S$ 是一条极小测地线并且 $\gamma(a)=p$，$\gamma(b)=q$，则对连结 p 和 q 的任何曲线，我们有 $E(\gamma)\leqslant E(\alpha)$，而且等式当且仅当 α 是极小测地线时成立.

5. 设 γ：$[0,l]\to S$ 是一条以弧长作参数的简单测地线. 并设 u 和 v 是 $\gamma([0,l])$的一个邻域的 Fermi 坐标使得 $\gamma([0,l])$为 $u=0$(参考习题 3). 设 $u=\gamma(v,t)$是一族依赖于参数 t，$-\varepsilon<t<\varepsilon$，的曲线使得 γ 可微并且

$$\gamma(0,t)=\gamma(0)=p,\quad \gamma(l,t)=\gamma(l)=q$$
$$\gamma(v,0)=\gamma(v)\equiv 0$$

这一曲线族叫作固定端点 p 和 q 的 γ 的变分. 设 $E(t)$是曲线 $\gamma(v,t)$的能量(参考习题 4)；亦即，

$$E(t)=\int_0^l\left(\frac{\partial\gamma}{\partial v}(v,t)\right)^2dv$$

*a. 证明：

$$E'(0)=0$$
$$\frac{1}{2}E''(0)=\int_0^l\left\{\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^2-K\eta^2\right\}dv$$

其中 $\eta(v)=\partial\gamma/\partial t\mid_{t=0}$，$K=K(v)$是沿 γ 的 Gauss 曲率，而且“$'$”代表关于 t 的导数(上述公式分别叫作 γ 的能量的第一变分和第二变分；这些公式的更完全的处理，包括 γ 不是简单曲线的情形，将在 5.4 讨论).

b. 利用 a 证明：如果 $K\leqslant 0$，则任何简单测地线 γ：$[0,l]\to S$ 相对于连结 $\gamma(0)$到 $\gamma(l)$且充分靠近 γ 的曲线来说为极小.

6. 设 S 是锥面 $z=k\sqrt{x^2+y^2}$，$k>0$，$(x,y)\neq(0,0)$. 并设 $V\subset\mathbb{R}^2$ 是$\mathbb{R}^2$ 的开集，其极坐标表示为 $0<\rho<\infty$，$0<\theta<2\pi n\sin\beta$，其中 $\cot\beta=k$，而 n 是适合 $2\pi n\sin\beta<2\pi$ 的最大整数(参考 4.2 的例 3). 设 φ：$V\to S$ 为映照

$$\varphi(\rho,\theta)=\left(\rho\sin\beta\cos\left(\frac{\theta}{\sin\beta}\right),\rho\sin\beta\sin\left(\frac{\theta}{\sin\beta}\right),\rho\cos\beta\right)$$

a. 证明：φ 是局部等距对应.

*b. 设 $q\in S$. 假定 $\beta<\frac{\pi}{6}$并设 k 是适合 $2\pi K\sin\beta<\pi$ 的最大整数. 证明：至少存在 k 条测地线从 q 出发再回到 q. 证明：这些测地线在 q 点均打折，因此都不是闭测地线(图 4-49).

*c. 条件同上，证明：恰好存在 k 条上述测地线.

7. 设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 为一条正则参数曲线. 对任一 $t\in I$，令 $P(t)\subset\mathbb{R}^3$ 为过 $\alpha(t)$且包含 $\alpha'(t)$的平面. 若 $P(t)$的单位法向量 $N(t)$是 t 的可微函数且 $N'(t)\neq 0$，$t\in I$，我们说映照 $t\to\{\alpha(t),N(t)\}$为可微的切平面族. 给定一族可微的切平面，我们定义一参数曲面(参考 2.3 的定义 2)

$$X(t,v)=\alpha(t)+v\frac{N(t)\wedge N'(t)}{|N'(t)|}$$

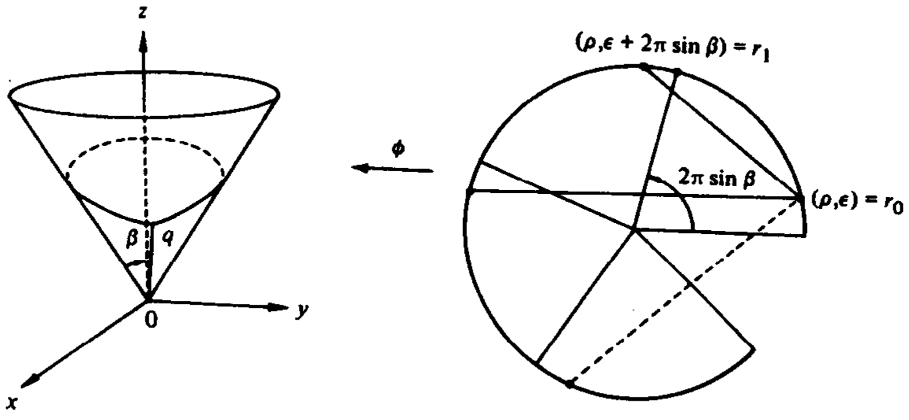


图 4-49

参数曲面 X 叫做切平面族$\{\alpha(t),\ N(t)\}$的包络.

a. 设 S 为定向曲面并设 γ：$I\to S$ 为以弧长作参数的测地线，满足 $k(S)\neq 0$，$\tau(S)\neq 0$，$S\in I$. 令$N(S)$是曲面 S 沿γ 的单位法向量. 证明：切平面族$\{\gamma(S),\ N(S)\}$的包络在γ的邻域内是正则的，其 Gauss 曲率 $K\equiv 0$ 且沿 γ 与曲面 S 相切.（这样，我们就得到一个与平面局部等距的曲面且包含 γ 作为测地线.）

b. 设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 是以弧长作参数的曲线且有 $K(S)\neq 0$ 和 $\tau(S)\neq 0$，$S\in I$. 并设$\{\alpha(S),\ n(S)\}$为从切平面族. 证明：从切平面族的包络在α的邻域正则，其Gauss 曲率 $K\equiv 0$，且包含 α 作为一条测地线.（这样，每条曲线是它的从切平面族包络的测地线；因为这一包络面局部等距于平面，这就是从切平面又称为化直平面的理由.）

附录　曲线和曲面局部理论基本定理的证明

在本附录中，我们将说明如何从微分方程的定理得到关于曲线和曲面的存在性和唯一性的基本定理(1.5 和 4.2).

曲线局部理论的基本定理的证明(参考 1.5 的叙述). 出发点是观察 Frenet 方程

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{ds}=kn\\[2mm] \dfrac{dn}{ds}=-kt-\tau b\\[2mm] \dfrac{db}{ds}=\tau n\end{cases}\tag{1}$$

它可以看作在 $I\times\mathbb{R}^9$ 上的微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi_1}{ds}=f_1(s,\xi_1,\cdots,\xi_9)\\ \vdots \\ \dfrac{d\xi_9}{ds}=f_9(s,\xi_1,\cdots,\xi_9)\end{cases}\qquad s\in I\tag{1a}$$

其中$(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)=t$，$(\xi_4,\ \xi_5,\ \xi_6)=n$，$(\xi_7,\ \xi_8,\ \xi_9)=b$，且 f_i，$i=1$，…，9，是坐标 ξ_i的线

性函数(其系数依赖于 S).

一般来说,(1a)型的微分方程组不对应于一个定常向量场(如 3.4). 但不管怎样,下列形式的存在性和唯一性定理成立:

给定初始条件 $s_0 \in I$, $(\xi_1)_0$, …, $(\xi_9)_0$, 则存在一个包含 s_0 的开区间 $J \subset I$ 及唯一的可微映照 α: $J \to \mathbb{R}^9$, 使得

$$\alpha(s_0) = ((\xi_1)_0, \cdots, (\xi_9)_0) \text{ 和 } \alpha'(S) = (f_1, \cdots, f_9)$$

其中 f_i, $i=1$, …, 9 在 $(S, \alpha(S)) \in J \times \mathbb{R}^9$ 上取值. 更进一步,如果方程组是线性的,则 $J=I$(参见 S. Lang, Analysis I, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968, pp. 383~386).

由此可得:在 $\mathbb{R}^3$ 中给定一组正定向的标准正交标架 $\{t_0, n_0, b_0\}$ 和 $s_0 \in I$, 则存在一族标架 $\{t(s), n(s), b(s)\}$, $s \in I$, 使得 $t(s_0)=t_0$, $n(s_0)=n_0$, $b(s_0)=b_0$.

我们首先证明对每个 $s \in I$, 标架 $\{t(S), n(S), b(S)\}$ 保持标准正交性. 事实上,利用方程组(1),把六个量

$$\langle t,n\rangle, \langle t,b\rangle, \langle n,b\rangle, \langle t,t\rangle, \langle n,n\rangle, \langle b,b\rangle$$

关于 s 取导数并表示成这同样六个量的函数,我们得到微分方程组:

$$\frac{d}{ds}\langle t,n\rangle = k\langle n,n\rangle - k\langle t,t\rangle - \tau\langle t,b\rangle$$

$$\frac{d}{ds}\langle t,b\rangle = k\langle n,b\rangle + \tau\langle t,n\rangle$$

$$\frac{d}{ds}\langle n,b\rangle = -k\langle t,b\rangle - \tau\langle b,b\rangle + \tau\langle n,n\rangle$$

$$\frac{d}{ds}\langle t,t\rangle = 2k\langle t,n\rangle$$

$$\frac{d}{ds}\langle n,n\rangle = -2k\langle n,t\rangle - 2\tau\langle n,b\rangle$$

$$\frac{d}{ds}\langle b,b\rangle = 2\tau\langle b,n\rangle$$

容易验证

$$\langle t,n\rangle \equiv 0, \quad \langle t,b\rangle \equiv 0, \quad \langle n,b\rangle \equiv 0, \quad t^2 \equiv 1, \quad n^2 \equiv 1, \quad b^2 \equiv 1$$

是上述微分方程组适合初始条件 0, 0, 0, 1, 1, 1 的解. 由唯一性知,对所有 $s \in I$, 标架族 $\{t(s), n(s), b(s)\}$ 都是标准正交的.

从标架族 $\{t(s), n(s), b(s)\}$, 可以通过积分

$$\alpha(s) = \int t(s)ds, \quad s \in I$$

得到一条曲线,这里向量的积分理解为每个分量的积分. 显然 $\alpha'(s)=t(s)$ 并且 $\alpha''(s)=kn$. 因此, $k(s)$ 是 α 在 s 处的曲率. 再者,因为

$$\begin{aligned}\alpha'''(s) &= k'n + kn' \\ &= k'n - k^2t - k\tau b\end{aligned}$$

所以 α 的挠率为(1.5 习题 3)

$$-\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{k^2} = -\frac{\langle t \wedge kn, (-k^2 t + k'n - k\tau b) \rangle}{k^2} = \tau$$

故 α 是所求的曲线.

我们还需证明：α 在相差 $\mathbb{R}^3$ 的平移和转动的意义下是唯一的. 设 $\bar{\alpha}$：$I \to \mathbb{R}^3$ 为另一条曲线，满足 $\bar{k}(s) = k(s)$，$\bar{\tau}(s) = \tau(s)$，$\mathscr{S} \in I$，并设 $\{\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0\}$ 是 $\bar{\alpha}$ 在 S_0 的 Frenet 标架. 显然，通过一个平移 A 和一个转动 ρ 可以使得标架 $\{\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0\}$ 与 $\{t_0, n_0, b_0\}$ 重合(二组标架都是正定向的). 根据上述关于微分方程的定理中的唯一性部分即可得到所需的结果. 证毕.

曲面局部理论基本定理的证明. (参见 4.3 的叙述). 证明的思想同上；亦即，寻找一族依赖于 u 和 v 的标架 $\{x_u, x_v, N\}$ 满足方程组

$$\begin{aligned}
x_{uu} &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + eN \\
x_{uv} &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + fN = x_{vu} \\
x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + gN \\
N_u &= a_{11} x_u + a_{21} x_v \\
N_v &= a_{12} x_u + a_{22} x_v
\end{aligned} \tag{2}$$

其中系数 Γ_{ij}^k，a_{ij}，$i, j = 1, 2$，按曲面上的公式从 E, F, G, e, f, g 求得.

上述方程在 $V \times \mathbb{R}^9$ 中决定了一组偏微分方程

$$\begin{aligned}
(\xi_1)_u &= f_1(u, v, \xi_1, \cdots, \xi_9) \\
&\vdots \\
(\xi_9)_v &= f_{15}(u, v, \xi_1, \cdots, \xi_9)
\end{aligned} \tag{2a}$$

这里 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_u$，$\eta = (\xi_4, \xi_5, \xi_6) = x_v$，$\zeta = (\xi_7, \xi_8, \xi_9) = N$，而 f_i，$i = 1, \cdots, 15$，是 ξ_j，$j = 1, \cdots, 9$，的线性函数，其系数依赖于 u 和 v.

与常微分方程的情形不同，一般来说，(2a)型的方程组并不可积. 对于现在讨论的情形，要保证在给定的初始条件下，局部解的存在并唯一，其条件是

$$\xi_{uv} = \xi_{vu}, \quad \eta_{uv} = \eta_{vu}, \quad \zeta_{uv} = \zeta_{vu}$$

这一结论的证明可查 J. Stoker，Differential Geometry，Wiley-Interscience，New York，1969，Appendix B.

正如在 4.3 已经看到，这些可积性条件等价于 Gauss 方程和 Mainardi-Codazzi 方程. 根据假设，这些方程已被满足，因此，方程组(2a)是可积的.

令 $\{\xi, \eta, \zeta\}$ 是定义在 $(u_0, v_0) \in V$ 的邻域上方程组(2a)的解，且适合初始条件 $\xi(u_0, v_0) = \xi_0$，$\eta(u_0, v_0) = \eta_0$，$\zeta(u_0, v_0) = \zeta_0$. 显然，可以选取初始条件使得

$$\begin{aligned}
\xi_0^2 &= E(u_0, v_0) \\
\eta_0^2 &= G(u_0, v_0) \\
\langle \xi_0, \eta_0 \rangle &= F(u_0, v_0) \\
\zeta_0^2 &= 1 \\
\langle \xi_0, \zeta_0 \rangle &= \langle \eta_0, \zeta_0 \rangle = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

有了上面的解以后，我们可建立一组新的方程

$$x_u = \xi$$
$$x_v = \eta \tag{4}$$

这显然是可积的，因为 $\xi_v = \eta_u$. 设 $x: \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ 是(4)的解，x 定义在(u_0, v_0)的邻域 $\overline{V}$ 上且满足 $x(u_0, v_0) = P_0 \in \mathbb{R}^3$. 我们将证明 $x(\overline{V})$就是所需的曲面. 如有必要，可以缩小 $\overline{V}$，也可以将 u 和 v 对调.

首先证明(2a)的解$\{\xi, \eta, \zeta\}$具有下列性质. 对于使解有定义的所有(u, v)，我们有

$$\begin{aligned}\xi^2 &= E\\ \eta^2 &= G\\ \langle\xi,\eta\rangle &= F\\ \zeta^2 &= 1\\ \langle\xi,\zeta\rangle &= \langle\eta,\zeta\rangle = 0\end{aligned} \tag{5}$$

事实上，对 ξ^2，η^2，ζ^2，$\langle\xi, \eta\rangle$，$\langle\xi, \zeta\rangle$，$\langle\eta, \zeta\rangle$取偏导数并利用(2)式把它们仍表示成同样六个量的函数，我们得到 12 个偏微分方程的方程组

$$\begin{aligned}(\xi^2)_u &= B_1(\xi^2, \eta^2, \cdots, \langle\eta,\zeta\rangle)\\ (\xi^2)_v &= B_2(\xi^2, \eta^2, \cdots, \langle\eta,\zeta\rangle)\\ &\vdots \qquad\qquad \vdots\\ \langle\eta,\zeta\rangle_v &= B_{12}(\xi^2, \eta^2, \cdots, \langle\eta,\zeta\rangle)\end{aligned} \tag{6}$$

因为(6)式是从(2a)得到的，所以，(6)显然是可积的(也可以直接验证)，并且

$$\begin{aligned}\xi^2 &= E\\ \eta^2 &= G\\ \langle\eta,\xi\rangle &= F\\ \zeta^2 &= 1\\ \langle\xi,\zeta\rangle &= \langle\eta,\zeta\rangle = 0\end{aligned}$$

是方程组(6)满足初始条件(3)的解. 根据唯一性可得上述结论.

由此可知

$$|x_u \wedge x_v|^2 = x_u^2 x_v^2 - \langle x_u, x_v\rangle^2 = EG - F^2 > 0$$

因而，如果 $x: \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ 为

$$x(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in \overline{V}$$

则 $x_u \wedge x_v$ 的某一分量在(u_0, v_0)不为零，例如说，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. 因此，在$(u_0, v_0)$的某一邻域 $U \subset \overline{V}$ 中，可以反解由 x 的前两个分量函数构成的系统得到一个映照 $F(x, y) = (u, v)$，将 x 限制到 U 上，映照 $x: U \to \mathbb{R}^3$ 是 1 对 1 的而且逆映照 $x^{-1} = F \circ \pi$(这里 π 是$\mathbb{R}^3$ 在 xy 平面上的投影)是连续的. 因此，$x: U \to \mathbb{R}^3$ 是可微的同胚且 $x_u \wedge x_v \neq 0$；故 $x(U) \subset \mathbb{R}^3$ 是一正则曲面.

从(5)式直接得到 E，F，G 是 $x(U)$的第一基本形的系数，而 ζ 是曲面的单位法向量. 如果必要的话，对换 v 和 u，我们可以得到

$$\zeta = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} = N$$

从上式和方程组(2)得到

$$\langle \zeta, x_{uu} \rangle = e, \quad \langle \zeta, x_{uv} \rangle = f, \quad \langle \zeta, x_{vv} \rangle = g$$

因此证明了曲面 $x(u, v)$的第二基本形的系数就是 e，f，g. 这就证明了定理的第一部分.

剩下的是证明：如果 U 是连通的，则 x 仅相差$\mathbb{R}^3$ 的平移和转动. 为此，设 $\bar{x}$：$U \to \mathbb{R}^3$ 是另一正则曲面，适合 $\bar{E}=E$，$\bar{F}=F$，$\bar{G}=G$，$\bar{e}=e$，$\bar{f}=f$，$\bar{g}=g$. 因为第一基本形和第二基本形均相等，所以可能通过平移 A 和旋转 ρ 把标架$\{\bar{x}_u(u_0, v_0), \bar{x}_v(u_0, v_0), \bar{N}(u_0, v_0)\}$与标架$\{x_u(u_0, v_0), x_v(u_0, v_0), N(u_0, v_0)\}$重合.

方程组(2a)有二组解

$$\xi = x_u, \quad \eta = x_v, \quad \zeta = N$$
$$\xi = \bar{x}_u, \quad \eta = \bar{x}_v, \quad \zeta = \bar{N}$$

因为二组解在(u_0, v_0)重合，所以根据唯一性，在(u_0, v_0)的邻域内有

$$x_u = \bar{x}_u, \quad x_v = \bar{x}_v, \quad N = \bar{N} \tag{7}$$

另一方面，根据连续性，使得(7)式成立的 U 的子集是闭集，又因为 U 连通，所以(7)式对所有$(u, v) \in U$ 成立.

从(7)式的头两个方程及 U 的连通性，我们得到

$$x(u,v) = \bar{x}(u,v) + C$$

这里 C 是常值向量，因为 $x(u_0, v_0)=\bar{x}(u_0, v_0)$，所以有 $C=0$，定理得证. 证毕.

第5章　整体微分几何学

5.1　引言

本章的目的是介绍整体微分几何．我们已经遇到过一些整体性的定理(2.7 中紧致可定向曲面的特性和 4.5 中的 Gauss-Bonnet 定理就是这种例子)．但是，它们或多或少总是顺便碰到的，因为我们当时的主要任务是建立$\mathbb{R}^3$ 中正则曲面的局部理论．如今，做完了这件事，我们就能对整体性质开始作更系统的研究．

整体微分几何所处理的是曲线、曲面的局部性质与整体(一般是拓扑)性质之间的关系．为了把要用的拓扑学知识降到最低程度，我们只限于欧氏空间中的子集．用到的也仅仅是欧氏空间中连通紧致集的一些最基本的性质．为完整起见，这些材料及有关证明，在第 5 章的附录中给出．

在阅读本章时，读者会作种种选择，考虑到这一点，现在我们来对本章的各节逐一给出简短的介绍．在本引言的最后，将给出一张表格以说明各节间的依赖关系．

5.2 中，我们将证明球面是刚性的；即如果连通、紧致的正则曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 与球面等距，则 S 是球面．这一节在本书中的用处就在于导出 5.3.

5.3 中，作为整体性定理的自然背景，我们将引入完备曲面的概念．我们要证明基本的 Hopf-Rinow 定理，它肯定了连接完备曲面上任意两点的极小测地线的存在性．

5.4 中，我们将导出弧长的第一变分公式和第二变分公式．作为应用，我们要证明 Bonnet 定理：Gauss 曲率有正的非零下界的完备曲面是紧致的．

5.5 中，我们要引入沿一条测地线 γ 的 Jacobi 场这个重要的概念，它度量了 γ 附近的测地线离开 γ 的速度．我们将证明：如果完备曲面 S 的 Gauss 曲率非正，则 $\exp_p:\cdot T_p(S)\to S$ 是局部微分同胚．

这就提出了寻求使局部微分同胚成为整体微分同胚的条件的问题，它导致了在 5.6 中引进覆盖空间．5.6 中的部分 A 与前面的各节是完全无关的．在部分 B，我们要证明 Hadamard 的两条定理：(1)若 S 完备、单连通，并且 S 的 Gauss 曲率非正，则 S 与平面微分同胚．(2)若 S 紧致，且 Gauss 曲率为正，则 Gauss 映照 N：$S\to S^2$ 是微分同胚；特别地，S 微分同胚于球面．

5.7 中，我们将给出曲线的一些整体性定理．这一节仅与 5.6 的部分 A 有关．

5.8 中，我们要证明$\mathbb{R}^3$ 中 Gauss 曲率为零的完备曲面，或者是平面，或者是柱面．

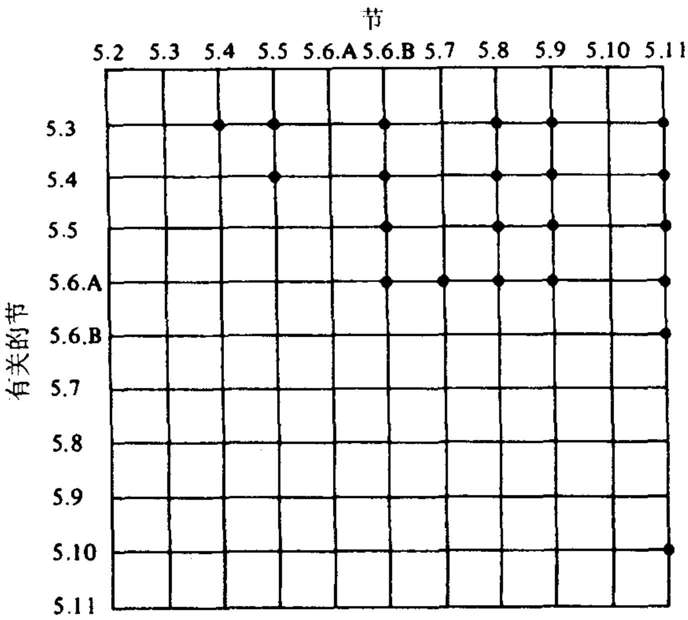
5.9 中，我们将证明所谓的 Jacobi 定理：一段测地线弧关于具有相同端点的邻近曲线为极小的充要条件是这段弧不含共轭点．

5.10 中，我们将引入抽象曲面的概念，并把第 4 章中的内蕴几何学推广到这种曲面上去．除了习题以外，这一节与前面各节完全是独立的．在这节的末尾，我们要提及诸如微分流形和 Riemann 流形这种可能的、更进一步的推广．

5.11 中，我们要证明 Hilbert 定理，它说明在$\mathbb{R}^3$ 中不存在负常数 Gauss 曲率的完备正则

曲面.

在所附的图表中，我们给出了本章各节的依赖关系．例如，读 5.11 需要 5.3，5.4，5.5，5.6 和 5.10；读 5.7 需要 5.6 的部分 A；读 5.8 需要 5.3，5.4，5.5 以及 5.6 的部分 A.



5.2 球面的刚性

作为开始，较合适的是举一个虽然有些简单，却是整体性定理的典型例子．我们就选取球面的刚性.

我们将证明球面在下列的意义下是刚性的．设 φ：$\Sigma\to S$ 是球面 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 到正则曲面 $S=\varphi(\Sigma)\subset\mathbb{R}^3$ 上的等距对应，则 S 是球面．直观上，这意味着要把由可弯曲但无弹性的物质做成的球面进行变形是不可能的.

实际上，我们要证明下面的定理.

定理 1 设 S 是 Gauss 曲率 K 为常数的紧致、连通、正则曲面，则 S 是球面.

球面的刚性可从定理 1 立即推出．事实上，设 φ：$\Sigma\to S$ 是球面 Σ 到 S 上的等距对应．这时 $\varphi(\Sigma)=S$ 就有常数曲率，因为曲率在等距对应之下是不变的．而且，由于集合 Σ 是紧致连通的，它的连续象 $\varphi(\Sigma)=S$ 也是紧致连通的(第 5 章附录的命题 6 和命题 12)．于是，由定理 1 可知 S 是球面.

定理 1 最初的证明是属于 H. Liebman(1899)的．我们这里要给的证明是经陈省身修改后的 D. Hilbert 的证明(S. S. Ohern，“*Some New Characterizations of the Euclidean Sphere*，” Duke Math. J. 12(1945)，270～290；以及 D. Hilbert，*Grundlagen der Geometrie*，3rd ed.，Leipzig，1909，附录 5).

注 1 应该注意，存在与球面同胚，但不是刚性的曲面．图 5-1 就给出了一个例子．用往里“撞击”的方法把图 5-1 中曲面 S 的平面区域 P 换掉，使得到的曲面 S'仍旧是正则的．用“对

称撞击"的方法形成的曲面 S'' 与 S' 是等距的，但是不存在使 S' 变成 S'' 的线性正交变换. 从而 S' 不具有刚性.



图 5-1

我们来回忆一下下面的约定. 选取主曲率 k_1 与 k_2，使得对每一点 $q\in S$，有 $k_1(q)\geqslant k_2(q)$. 这样我们就得到 S 中的连续函数 k_1 与 k_2，它们是可微的，但或许要除去 S 的脐点($k_1=k_2$).

定理 1 的证明基于下列的局部性引理，为此我们要利用 Mainardi-Codazzi 方程(见 4.3).

引理 1 设 S 是正则曲面，p 为 S 上满足下列条件的点：

1. $K(p)>0$；即 p 点的 Gauss 曲率为正；

2. p 是函数 k_1 的局部极大值点，同时又为函数 k_2 的局部极小值点($k_1\geqslant k_2$).

则 p 是 S 的脐点.

证明 假定 p 不是脐点，我们来引出矛盾.

如果 p 不是 S 的脐点，就可以选到 p 的坐标邻域(u, v)，使坐标曲线是曲率线(3.4). 这时，$F=f=0$，而且主曲率则由 e/E，g/G 给出. 因为 p 点不是脐点，如果必要的话，交换 u，v，从而我们可假定在 p 点的一邻域内

$$k_1=\frac{e}{E},\quad k_2=\frac{g}{G} \tag{1}$$

在如此得到的坐标系内，Mainardi-Codazzi 方程可写为(4.3 的等式(7)与(7a))

$$e_v=\frac{E_v}{2}(k_1+k_2) \tag{2}$$

$$g_u=\frac{G_u}{2}(k_1+k_2) \tag{3}$$

先将(1)的第一个等式关于 v 微分，并利用方程(2)，我们得到

$$E(k_1)_v=\frac{E_v}{2}(-k_1+k_2) \tag{4}$$

类似地，再将(1)的第二个等式关于 u 微分，并利用方程(3)，

$$G(k_2)_u=\frac{G_u}{2}(k_1-k_2). \tag{5}$$

另一方面，当 $F=0$ 时，关于 K 的 Gauss 方程化为(4.3，习题 1)

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}$$

因此，

$$-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u \tag{6}$$

这里的 $M=M(u, v)$，$N=N(u, v)$是(u, v)的函数，它们的具体表达式在证明中不起实质性作用. 下面将引入的 $\overline{M}$，$\overline{N}$，$\widetilde{M}$ 和 $\widetilde{N}$ 也是这样的函数.

从等式(4)和(5)，我们可得出 E_v，G_u 的表达式，将它们微分后代入方程(6)，就有

$$-2KEG = -\frac{2E}{k_1-k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1-k_2}(k_2)_{uu} + \overline{M}(k_1)_v + \overline{N}(k_2)_u$$

因此，

$$-2(k_1-k_2)KEG = -2E(k_1)_{vv} + 2G(k_2)_{uu} + \widetilde{M}(k_1)_v + \widetilde{N}(k_2)_u \tag{7}$$

由于在 p 点，$K>0$ 且 $k_1>k_2$，(7)式左端在 p 点严格为负. 因为 k_1 在 p 点达到局部极大值，k_2 在 p 点达到局部极小值，所以在 p 点就有

$$(k_1)_v = 0, \quad (k_2)_u = 0, \quad (k_1)_{vv} \leqslant 0, \quad (k_2)_{uu} \geqslant 0$$

但是，这可推出(7)式的右端非负，这是矛盾的. 引理 1 证毕.

应该看到：在证明中若我们假定在 p 点 k_1 有局部极小值而 k_2 有局部极大值，则得不出矛盾. 事实上，在正曲率曲面上当 p 不是脐点时，这种情形有可能发生，这可用下面的例子说明.

例 1 设 S 是由下式给出的旋转面(参见 3.3，例 4)

$$x = \varphi(v)\cos u, \quad y = \varphi(v)\sin u, \quad z = \psi(v), \quad 0 < u < 2\pi$$

其中

$$\varphi(v) = C\cos v, \quad C > 1$$

$$\psi(v) = \int \sqrt{1 - C^2\sin^2 v}\, dv, \quad \psi(0) = 0$$

我们取 $|v| < \sin^{-1}\left(\frac{1}{C}\right)$，使得 $\psi(v)$有定义.

利用已知的表达式(3.3，例 4)，我们得到

$$E = C^2\cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

$$e = -C\cos v(\sqrt{1-C^2\sin^2 v}) \quad f = 0, \quad g = -\frac{C\cos v}{\sqrt{1-C^2\sin^2 v}}$$

因此有

$$k_1 = \frac{e}{E} = -\frac{\sqrt{1-C^2\sin^2 v}}{C\cos v}, \quad k_2 = \frac{g}{G} = -\frac{C\cos v}{\sqrt{1-C^2\sin^2 v}}$$

所以，S 有正的常数曲率 $K=k_1k_2=1>0$(参见 3.3，习题 7).

由于 $C>1$，容易看出，在 S 上处处有 $k_1>k_2$. 因此 S 没有脐点. 而且，由于 $v=0$ 时 $k_1=-\frac{1}{C}$，但 $v\neq 0$ 时

$$k_1 = -\frac{\sqrt{1-C^2\sin^2 v}}{C\cos v} > -\frac{1}{C}$$

所以我们就有 k_1 在平行环 $v=0$ 的点上达到极小值(由于 $K=1$，因而 k_2 达到极大值)的结论.

这个例子附带也说了定理 1 中紧致性的假定是不可少的，因为曲面 S(见图 5-2)也具有正的常曲率，但不是球面.

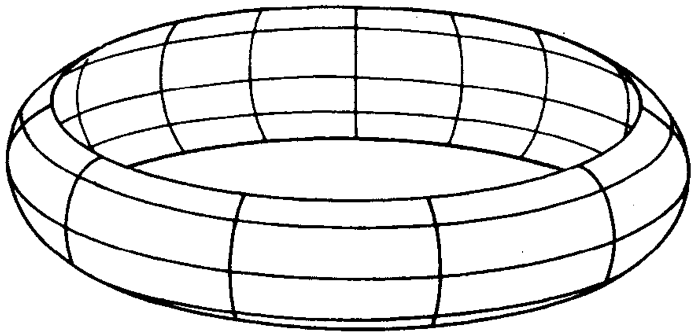


图 5-2

在证明定理 1 时要用到下面的事实，我们把它写成一条引理.

引理 2 紧致正则曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 至少有一个椭圆点.

证明 因为 S 是紧致的，所以 S 有界，因此，在$\mathbb{R}^3$ 中就存在一系列以固定点 $O\in\mathbb{R}^3$ 为中心的球面，使得 S 被包含在其中任何一个球面所围成的区域的内部. 考察所有这种球面的集合. 设 r 是它们半径的下确界，并设 Σ 是以 O 为中心，r 为半径的球面. 显然，Σ 与 S 至少会有一个公共点，比如是 p 点. Σ 在 p 点的切平面，在 p 点的一个邻域内，与 S 只有一个公共点 p. 所以 Σ 与 S 在 p 点相切. 考察 p 点的法截线，容易推得 S 在 p 点的任何法曲率应大于或等于对应的 Σ 在 p 的曲率. 因此，$k_1(p)\geqslant k_2(p)>0$，而 p 正如我们所希望的那样，是椭圆点. 证毕.

定理 1 的证明 因为 S 紧致，根据引理 2，存在一个椭圆点. 因为 K 为常数，所以在整个 S 上 $K>0$.

根据紧致性，S 上的连续函数 k_1 在一点 $p\in S$ 达到最大值(见第 5 章附录，命题 13). 由于 $K=k_1k_2$ 是正的常数，k_2 是 k_1 的递减函数，所以 k_2 在 p 达到最小值. 从引理 1 可推出 p 是脐点；也就是说 $k_1(p)=k_2(p)$.

现在设 q 是 S 的任何点. 因为我们已假定 $k_1(q)\geqslant k_2(q)$，就有

$$k_1(p)\geqslant k_1(q)\geqslant k_2(q)\geqslant k_2(p)=k_1(p)$$

因此，$k_1(q)=k_2(q)$对所有点 $q\in S$ 成立.

这就是说，S 的所有点都是脐点，因而，根据 3.2 命题 5，S 是球面或平面的一部分. 由于 $K>0$，S 就落在球面 Σ 中，根据紧致性，S 是 Σ 中的闭集，又因为 S 是正则曲面，S 便是 Σ 中的开集. 由于 Σ 连通，S 又是 Σ 中的既开又闭的子集，所以 $S=\Sigma$(见第 5 章附录，命题 5).

因此，曲面 S 是球面. 证毕.

注意，在定理 1 的证明中，$K=k_1k_2$ 为常数的假定仅用来确保 k_2 是 k_1 的递减函数. 如果我们假定平均曲率 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$为常数，也能得到相同的结论. 这样我们就有

定理 1a 设 S 是 Gauss 曲率 $K>0$，平均曲率 H 为常数的紧致、连通、正则曲面，则 S 是球面.

证明的方法与定理 1 完全类似. 事实上，只要 $k_2=f(k_1)$是 k_1 的递减函数，上面的论证方法还是适用的. 说得更精确些，我们有

定理 1b 设 S 是 Gauss 曲率为正的紧致、连通、正则曲面. 若在 S 上存在着函数关系 $k_2=f(k_1)$，这里 f 是 k_1 的递减函数，且 $k_1\geqslant k_2$，则 S 是球面.

注 2 $\mathbb{R}^3$ 中 Gauss 曲率 $K>0$ 的紧致连通曲面称为*卵形面*. 因而定理 1a 可说成是：常数平均曲率的卵形面必是球面.

另一方面，作为 Gauss-Bonnet 定理的一个简单结论，卵形面与球面是同胚的(参见 4.5，应用 1). H. Hopf 证明了下列(更强)说法的定理 1a 仍旧成立：同胚于球面，且平均曲率为常数的正则曲面，必定是球面. A. Alexandroff 的定理进一步推广了这个结果，他把与球面同胚的条件换成紧致性：常数平均曲率的紧致连通正则曲面，必定是球面.

上述一些结果的说明，可在 Hopf[11] 中找到(参考文献列在本书的最后).

注 3 球面的刚性，可作为关于卵形面的一般刚性定理的结论而得到. Cohn-Vossen 的这条定理说：等距的两个卵形面，只相差 $\mathbb{R}^3$ 中的一个正交线性变换. 这个结果的证明可在 Chern[10] 中找到.

定理 1 是整体微分几何的一个典型结果，也就是说，一些局部量(这里是曲率)的信息加上一些较弱的整体性假设(这里是紧致性和连通性)，可以推出关于整个曲面的很强的限制(这里是断言必为球面). 注意，连通性的唯一作用是防止在定理 1 的结论中出现两个或更多的球面. 另一方面，紧致性的假设从许多方面来讲，是不可缺的，它的作用之一是保证我们得到整个球面，而不是含在球面中的曲面.

习题

1. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是紧致正则曲面，并固定点 $p_0\in\mathbb{R}^3$，$p_0\notin S$. 设 d：$S\to\mathbb{R}$ 是由 $d(q)=\frac{1}{2}|q-p_0|^2$，$q\in S$ 定义的可微函数. 因为 S 紧致，所以存在 $q_0\in S$，使得 $d(q_0)\geqslant d(q)$对一切 $q\in S$ 成立. 证明：q_0 是 S 的椭圆点(这就给出了引理 2 的另一种证明).

2. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是 Gauss 曲率 $K>0$，且没有脐点的正则曲面. 证明在 S 上不存在使 H 为极大，同时使 K 为极小的点.

3. (Kazdan-Warner 的注). 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是广义的紧致旋转面(参见 2.3，注 4)，它由把以弧长 $s\in[0,l]$为参数的曲线

$$\alpha(s)=(0,\varphi(s),\psi(s))$$

绕 z 轴旋转而得到. 这里，$\varphi(0)=\varphi(l)=0$，且 $\varphi(s)>0$ 对一切 $s\in[0,l]$成立. 由 S 在极点的正则性，可进一步推得 $\varphi'(0)=1$，$\varphi'(l)=-1$(参见 2.3，习题 10). 我们还知道，S 的 Gauss 曲率是 $K=-\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}$(参见 3.3 例 4).

*a. 证明：

$$\int_0^l K'\varphi^2 ds=0,\quad K'=\frac{dK}{ds}$$

b. 利用 a 推出$\mathbb{R}^3$中不存在曲率是单调增加的紧致(广义的)旋转面.

下面的习题是前述 Hopf 定理的证明概要，这条定理说的是：同胚于球面，且平均曲率为常数的正则曲面，必定是球面(参见注 2). Hopf 的主要思想在近代工作中已被反复应用. 这道习题需要一些复变函数的基本事实.

4. 设$U\subset\mathbb{R}^3$是$\mathbb{R}^2$的连通开子集，并设X：$U\to S$是正则曲面S的等温参数表示(即$E=G$，$F=0$；参见 4.2). 令$u+iv=\zeta$，$(u, v)\in\mathbb{R}^2$，$\zeta\in\mathbb{C}$，我们把$\mathbb{R}^2$与复数平面$\mathbb{C}$相重合. ζ称为对应于X的复参数. 设ϕ：$X(U)\to\mathbb{C}$是由下式定义的复值函数

$$\phi(\zeta)=\phi(u,v)=\frac{e-g}{2}-if=\phi_1+i\phi_2$$

这里的e，f，g是S的第二基本形式的系数.

a. 证明：Mainardi-Codazzi 方程(参见 4.3)用等温参数表示X可以写成

$$\left(\frac{e-g}{2}\right)_u+f_v=EH_u;\quad \left(\frac{e-g}{2}\right)_v-f_u=-EH_v$$

并推出$X(U)\subset S$的平均曲率H为常数的充要条件是ϕ为ζ的解析函数(即$(\phi_1)_u=(\phi_2)_v$，$(\phi_1)_v=-(\phi_2)_u$).

b. 定义“复导数”

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}-i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

并证明$\phi(\zeta)=-2\langle X_\zeta, N_\zeta\rangle$，这里，例如$X_\zeta$的含义是复坐标的向量

$$X_\zeta=\left(\frac{\partial x}{\partial\zeta},\frac{\partial y}{\partial\zeta},\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)$$

c. 设f：$U\subset\mathbb{C}\to V\subset\mathbb{C}$是由$f(u+iv)=x+iy=\eta$给出的 1 对 1 复函数. 证明：$(x, y)$是$S$上的等温参数(即$\eta$是$S$上的复参数)，当且仅当$f$解析，并且$f'(\zeta)\neq0$，$\zeta\in U$. 设$Y=X\circ f^{-1}$是对应的参数表示，并定义$\psi(\eta)=-2\langle Y_\eta, N_\eta\rangle$. 证明：在$X(U)\cap Y(V)$上

$$\phi(\zeta)=\psi(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2 \qquad (*)$$

d. 设S^2是$\mathbb{R}^3$的单位球面. 利用由极点$N=(0, 0, 1)$和$S=(0, 0, -1)$出发的球极投影(参见 2.2，习题 16)，用两个(等温)复参数ζ与η的坐标邻域来覆盖S^2，这是的ζ与η满足$\zeta(S)=0$，$\eta(N)=0$，并使得在这两坐标邻域的交集W(球面去掉两个极点)上，$\eta=\zeta^{-1}$. 假定在每个坐标邻域上，存在解析函数$\varphi(\zeta)$，$\psi(\eta)$，使得($*$)在W中成立. 利用 Liouville 定理证明$\varphi(\zeta)\equiv0$(因而$\psi(\eta)\equiv0$).

e. 设$S\subset\mathbb{R}^3$是同胚于球面，且有常数平均曲率的正则曲面. 假定有S到单位球面S^2上的共形微分同胚φ：$S\to S^2$(这是 Riemann 面单值化定理的结果，在这里假定其成立). 设$\tilde{\zeta}$与$\tilde{\eta}$是复参数，在φ之下它们对应于在 d 中给出的S^2的参数ζ与η. 根据 a，函数$\phi(\tilde{\zeta})=\frac{e-g}{2}-if$是解析的. 相类似的函数$\psi(\tilde{\eta})$也是解析的，但按 c，它们以($*$)相关联. 利用 d 证明$\phi(\tilde{\zeta})\equiv0$(因此，$\psi(\tilde{\eta})\equiv0$). 结果是$S$由脐点构成，因而是球面. 这就证明了 Hopf 的定理.

5.3 完备曲面；Hopf-Rinow 定理

除非另作说明，今后要考虑的所有曲面，都是正则且连通的.

5.1 末尾所作的考察说明，为了得到整体性定理，除了连通性以外，我们需要某些整体性假定，以确保曲面作为正则曲面不能再进一步"延拓". 很清楚，紧致性就是为这一目的服务的. 然而，更有用的是能有一个比紧致性弱，却又仍旧具有相同效果的假定条件. 这就能使我们在比紧致性更一般的情况下寻求整体性定理.

曲面不能再延拓这个概念的精确说法，由下列的定义给出.

定义 1 设 S 是正则(连通)曲面. 如果存在正则(连通)曲面 $\bar{S}$，使得 $S\subset\bar{S}$ 是真子集，则 S 就称作是*可延拓的*. 如果这种 $\bar{S}$ 不存在，S 就称作是*不可延拓的*.

不幸的是不可延拓的曲面类太大了，以致无法得到有趣的结果. 一个更合适的假定是

定义 2 设 S 为正则曲面，对每一点 $p\in S$，当 S 上由 $p=\gamma(0)$ 出发的任何参数测地线 γ: $[0,\varepsilon)\to S$，都能延伸为定义在整个实直线 $\mathbb{R}$ 上的参数测地线 $\bar{\gamma}$: $\mathbb{R}\to S$ 时，S 就称作是*完备的*.

换言之，对每一点 $p\in S$，当映照 $\exp_p$: $T_p(S)\to S$(见 4.6)对一切 $v\in T_p(S)$ 都有定义时，S 是完备的.

以后我们要证明(命题 1)，所有的完备曲面都是不可延拓的，而且确实存在不完备也不可延拓的曲面(例 1). 因此，完备性的假定要比不可延拓性来得强. 进而，我们将证明(命题 5)，$\mathbb{R}^3$ 中的所有闭曲面都是完备的；也就是说，完备性的假定要比紧致性来得弱.

本节的目的是，对完备曲面 S 上给定的两点 p，$q\in S$，证明一定存在连接 p，q 的极小测地线(即，它的长度不超过连接 p，q 的任何其他曲线的长度). 这个基本的结果，最初是由 Hopf 与 Rinow 证明的(H Hopf，W. Rinow，"Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen,"Comm. Math. Helv. 3(1931)，209～225). 这条定理是完备曲面比不可延拓的曲面对微分几何更为适合的主要原因.

现在我们来看一些例子. 平面显然是完备曲面. 去掉顶点的锥面是不完备的曲面，因为把母线(测地线)作充分延伸时，我们会遇到顶点，但它不属于这张曲面. 球面是完备曲面，因为它的参数测地线(其轨迹是球面上的大圆)对每一个实数值都能有定义. 圆柱面也是完备曲面，因为它的测地线是圆周，直线和螺旋线，它们对一切实数值都是有定义的.

另外，从完备曲面 S 去掉一点 p 所得的曲面 $S-\{p\}$，不是完备曲面. 事实上，S 上会有通过 p 的测地线 γ. 在 γ 上取 p 的邻近点 q(图 5-3)，这时 $S-\{p\}$ 上就有一条参数测地线，它以 q 点出发，但不能延伸通过 p 点(这一论述的细节将在命题 1 中给出). 于是，去掉一点的球面和去掉一点的柱面都不是完备曲面.

命题 1 完备曲面 S 是不可延拓的.

证明 用反证法，假定 S 是可延拓的. 这就意味着存在正则(连通的)曲面 $\bar{S}$，使得 $S\subset\bar{S}$. 因为 S 是正则曲面，S 是 $\bar{S}$ 中的开集. S 在 $\bar{S}$ 中的边界(见第 5 章附录，定义 4)BdS 非空；否则 $\bar{S}=S\cup(\bar{S}-S)$就会是两个不相交的开集 S 与 $\bar{S}-S$ 之并，这与 $\bar{S}$ 的连通性(见第 5 章附录，

定义 10)矛盾．因此，有点 $p\in BdS$，并因为 S 是 $\bar{S}$ 中的开集，所以 $p\notin S$.

设 $\bar{V}\subset\bar{S}$ 是 p 在 $\bar{S}$ 中的邻域，使得 $\bar{V}$ 中每一点 q 都能由 $\bar{S}$ 中唯一的一条测地线与 p 相连(见 4.6，命题 2)．由于 $p\in BdS$，所以有某个 $q_0\in\bar{V}$ 属于 S．设 $\bar{\gamma}$：$[0,1]\to\bar{S}$ 是 $\bar{S}$ 中的测地线，满足 $\bar{\gamma}(0)=p$，$\bar{\gamma}(1)=q_0$．显然，由 $\alpha(t)=\bar{\gamma}(1-t)$ 给出的 α：$[0,\varepsilon]\to S$ 就是 S 中满足 $\alpha(0)=q_0$ 的测地线，将其延拓到数直线 $\mathbb{R}$ 去，在 $t=1$ 时就会通过 p 点(图 5-4)．因为 $p\notin S$，这条测地线不能延伸，于是就和完备性的假设相矛盾．证毕.

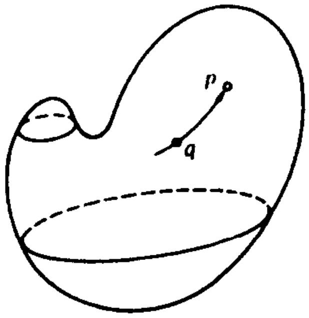


图 5-3

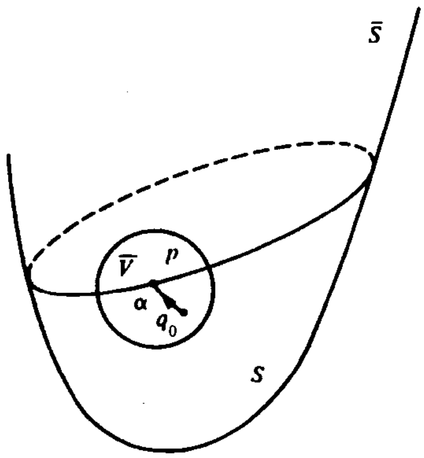


图 5-4

如下例所示，命题 1 的逆是不成立的.

例 1 当我们从单叶锥面

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

去掉顶点 p_0 时，就得到正则曲面 S．S 不是完备曲面，因为无法使它的母线对弧长的所有值均能延拓，而又不碰到顶点.

我们来证明 S 是不可延拓的，先假定有正则曲面 $\bar{S}\neq S$，使得 $S\subset\bar{S}$，然后导出矛盾．论证的方法是说明 S 在 $\bar{S}$ 中的边界缩为顶点 p_0，并且存在 p_0 在 $\bar{S}$ 中的邻域 $\bar{W}$，使得 $\bar{W}-\{p_0\}\subset S$．但是，这与锥面(包括顶点 p_0)在 p_0 不是正则曲面(见 2.2，例 5)相矛盾.

首先，我们看到，在 S 上由点 $p\in S$ 出发的测地线中，不能对所有参数值延拓的仅有的测地线，是经过 p 的子午线(母线)(见图 5-5)．这个事实，比如利用 Clairaut 关系(见 4.4，例 5)，是容易看出的，因而留作习题(习题 2).

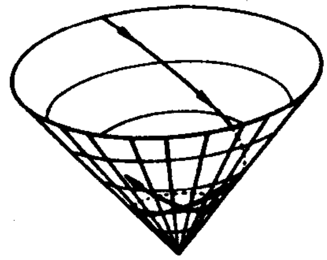


图 5-5

现在设 $p\in \mathrm{B}dS$，这里的 $\mathrm{B}dS$ 表示 S 在 $\bar{S}$ 中的边界(我们已在命题 1 中看到，$\mathrm{B}dS\neq\phi$)．因为 S 是 $\bar{S}$ 中的开集，$p\notin S$．设 $\bar{V}$ 是 p 在 $\bar{S}$ 中的邻域，使得 $\bar{V}$ 中每一点能由 $\bar{S}$ 在 $\bar{V}$ 中的唯一一条测地线与 p 相连接．因为 $p\in \mathrm{B}dS$，就有 $q\in\bar{V}\cap S$．设 $\bar{\gamma}$ 是 $\bar{S}$ 中连接 p 与 q 的测地线．因为 S 是 $\bar{S}$ 中的开集，$\bar{\gamma}$ 就在 q 的一个邻域中与 S 的一条测地线重合．设 p_0 是 $\bar{\gamma}$ 上不属于 S 的第一点．按最初所作的考察，$\bar{\gamma}$ 是子午线，并且 p_0 是 S 的顶点．进而有 p_0

$=p$；否则就会有 p 的一邻域不含 p_0. 对这个邻域重复刚才的论证，我们会得到一个不同于 p_0 的顶点，这是一个矛盾. 由此推出 BdS 缩为顶点.

再设 $\overline{W}$ 是 p_0 在 $\bar{S}$ 中的邻域，使得 $\overline{W}$ 中的任何两点能由 $\bar{S}$ 中的测地线相连接(见 4.7，命题 1). 我们要证明 $\overline{W}-\{p_0\}\subset S$. 事实上，$\gamma$ 中的点属于 S. 另一方面，不属于 γ 或其延拓的点 $r\in\overline{W}$，可以用一条异于 γ 的测地线 α 与 γ 上的点 t 相连接，$t\neq p_0$，$t\in\overline{W}$(见图 5-6). 按前面的观察结果，α 的每一点，特别是 r，属于 S. 最后，γ 的延拓上的点，除了 p_0，也属于 S；否则的话，它们就要属于 S 的边界，后者我们已经证明仅由 p_0 组成.

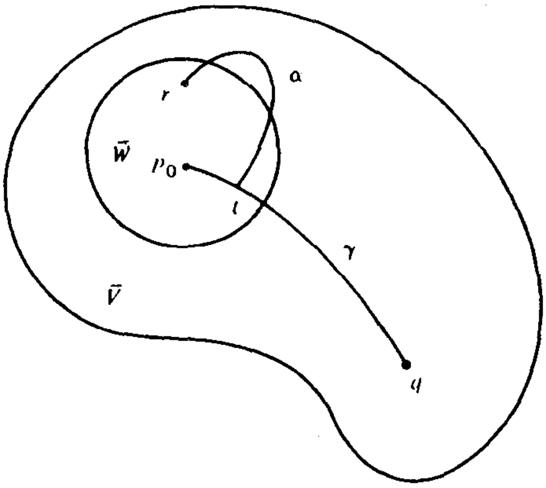


图 5-6

这样一来，我们所说的结论就全部证毕. 从而 S 是不可延拓的，我们得到了所要的例子.

为了后面的内容，较合适的是引入 S 中两点间距离的概念，这一概念仅依赖于 S 的内蕴几何，与 S 在 $\mathbb{R}^3$ 中的浸入方式无关(参见 4.2，注 1). 我们看到，因为 $S\subset\mathbb{R}^3$，可以把 S 中两点间的距离定义成这两点在 $\mathbb{R}^3$ 中的距离. 但是，这个距离与第二基本形式有关，因而对本章的目的来说是不适宜的.

我们需要一些预备知识.

设 α: $[a, b]\to S$ 是数直线 $\mathbb{R}$ 中的闭区间 $[a, b]\subset\mathbb{R}$ 到曲面 S 的连续映照，如果 $[a, b]$ 有由点 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<t_{k+1}=b$ 给出的分割，使得 α 在 $[t_i, t_{i+1}]$，$i=0, \cdots, k$ 上可微，就称 α 是连接 $\alpha(a)$ 和 $\alpha(b)$ 的**分段可微参数曲线**，α 的长度 $l(\alpha)$ 就定义为

$$l(\alpha)=\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}}|\alpha'(t)|\,dt$$

命题 2 正则(连通)曲面 S 上给出两点 p，q，必存在连接 p，q 的分段可微参数曲线.

证明 因为 S 连通，所以有连续曲线 α: $[a, b]\to S$，使得 $\alpha(a)=p$，$\alpha(b)=q$. 设 $t\in[a, b]$，并设 I_t 是 $[a, b]$ 中含 t 的开区间，使得 $\alpha(I_t)$ 落在 $\alpha(t)$ 的坐标邻域内. 并集 $\bigcup I_t$，$t\in[a, b]$ 就覆盖了 $[a, b]$，由紧致性，存在有限个 $I_1, \cdots, I_n$ 仍旧覆盖了 $[a, b]$. 因此，能用点 $a=t_0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}=b$ 把 I 进行分解，使得 $[t_i, t_{i+1}]$ 含在某个 I_j 内，$j=1, \cdots, n$. 于是，$\alpha(t_i, t_{i+1})$ 就落在一个坐标邻域内.

因为 $p=\alpha(t_0)$ 与 $\alpha(t_1)$ 落在同一坐标邻域 $X(U)\subset S$ 内，便可用一条可微曲线把它们连接起来，这条曲线就是 $U\subset\mathbb{R}^2$ 中连接 $X^{-1}(\alpha(t_0))$ 与 $X^{-1}(\alpha(t_1))$ 的可微曲线在 X 下的象. 用这种方法，我们可用可微曲线把 $\alpha(t_i)$ 与 $\alpha(t_{i+1})$ 连接起来，$i=0,\cdots,k$. 这便给出了连接 $p=\alpha(t_0)$ 和 $q=\alpha(t_{k+1})$ 的分段可微曲线，命题得证. 证毕.

现在设 p，$q\in S$ 是正则曲面 S 上的两点. 我们用 $\alpha_{p,q}$ 表示连接 p，q 的分段可微参数曲线，并用 $l(\alpha_{p,q})$ 来表示它的长度. 命题 2 说明，所有这种 $\alpha_{p,q}$ 的集合是非空的. 从而我们能给出下列的.

定义 3 由点 $p\in S$ 到点 $q\in S$ 的(内蕴)距离 $d(p,q)$ 定义为

$$d(p,q)=\inf l(\alpha_{p,q})$$

这里的 inf 是对所有连接 p，q 的分段可微曲线上取的.

命题 3 上面定义的距离 d 有下列性质，

1. $d(p,q)=d(q,p)$；
2. $d(p,q)+d(q,r)\geqslant d(p,r)$；
3. $d(p,q)\geqslant 0$；
4. 当且仅当 $p=q$ 时，$d(p,q)=0$.

这里的 p，q，r 是 S 中的任意点.

证明 性质 1 是立即可得的，因为每条满足 $\alpha(a)=p$，$\alpha(b)=q$ 的参数曲线

$$\alpha:[a,b]\to S$$

导出了一条由 $\tilde{\alpha}(t)=\alpha(a-t+b)$ 定义的参数曲线 $\tilde{\alpha}$：$[a,b]\to S$. 显然有 $\tilde{\alpha}(a)=q$，$\tilde{\alpha}(b)=p$，并且 $l(\alpha_{p,q})=l(\tilde{\alpha}_{p,q})$.

性质 2 可从这么一个事实推出：当 A，B 是实数集合且 $A\subseteq B$ 时，则 $\inf A\geqslant\inf B$.

性质 3 可由正数的下确界非负这个事实推得.

现在我们来证明性质 4. 设 $p=q$. 取由 $\alpha(t)=p$，$t\in[a,b]$ 给定的常值曲线 α：$[a,b]\to S$，我们就有 $l(\alpha)=0$；因此，$d(p,q)=0$.

为了证明 $d(p,q)=0$ 蕴涵 $p=q$，我们的方法如下. 假定 $d(p,q)=\inf l(\alpha_{p,q})=0$ 而 $p\neq q$. 设 V 是 p 在 S 中的邻域，满足 $q\notin V$，并使 V 中的每一点均能用 V 中的唯一一条测地线与 p 相连接. 设 $B_r(p)\subset V$ 是由含在 V 中的以 p 为中心、r 为半径的测地圆围成的区域. 根据下确界的定义，给定 $\varepsilon>0$，$0<\varepsilon<r$，存在连接 p，q 的分段可微参数曲线 α：$[a,b]\to S$，使得 $l(\alpha)<\varepsilon$. 因为 $\alpha([a,b])$ 连通，且 $q\notin B_r$，就存在点 $t_0\in[a,b]$，使得 $\alpha(t_0)$ 属于 $B_r(p)$ 的边界. 由此推出 $l(\alpha)\geqslant r>\varepsilon$，得到矛盾. 因此，$p=q$，本命题证毕.

推论
$$|d(p,r)-d(r,q)|\leqslant d(p,q)$$

这只要能看到下列不等式就足够了

$$d(p,r)\leqslant d(p,q)+d(q,r)$$
$$d(r,q)\leqslant d(r,p)+d(p,q)$$

因此，
$$-d(p,q)\leqslant d(p,r)-d(r,q)\leqslant d(p,q)$$

命题 4 若设点 $p_0\in S$，则由 $f(p)=d(p_0,p)$，$p\in S$ 给定的函数 f：$S\to\mathbb{R}$ 在 S 上是连

续的.

证明 我们必须说明，对每点 $p\in S$，给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得若 $q\in B_\delta(p)\cap S$，这里的 $B_\delta(p)\subset\mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中以 p 为中心，δ 为半径的开球，就有 $|f(p)-f(q)|=|d(p_0,p)-d(p_0,q)|<\varepsilon$.

设 $\varepsilon'<\varepsilon$ 能使指数映照 $\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 在圆盘 $B_{\varepsilon'}(0)\subset T_p(S)$ 中是微分同胚，这里的 0 是 $T_p(S)$ 的原点，并令 $\exp(B_{\varepsilon'}(0))=V$. 显然，$V$ 是 S 中的开集；因此，存在 $\mathbb{R}^3$ 中的开球 $B_\delta(p)$，使得 $B_\delta(p)\cap S\subset V$，这样一来，若 $q\in B_\delta(p)\cap S$，

$$|d(p_0,p)-d(p_0,q)|\leqslant d(p,q)<\varepsilon'<\varepsilon$$

也就完成了证明. 证毕.

注 1 具有初等拓扑知识的读者会注意到，命题 3 说明，函数 d：$S\times S\to\mathbb{R}$ 给 S 以度量空间的结构. 另一方面，作为度量空间的子集，$S\subset\mathbb{R}^3$ 具有诱导度量 $\bar{d}$. 重要的事实是，这两种度量决定了同一个拓扑，也就是 S 中的同一开集族. 这可由 $\exp_p$：$v\subset T_p(S)\to S$ 是局部微分同胚的事实推得，其证明与命题 4 类似.

结束了这些预备知识后，现在我们就能作如下的考察.

命题 5 闭曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是完备的.

证明 设 γ：$[0,\varepsilon)\to S$ 是 S 的参数测地线，$\gamma(0)=p\in S$，不失一般性，我们可假定参数是弧长. 需要证明的是可以把 γ 延拓为定义在整条直线 $\mathbb{R}$ 上的测地线 $\bar{\gamma}$：$\mathbb{R}\to S$. 首先注意，若 $\bar{\gamma}(s_0)$，$s_0\in\mathbb{R}$，已确定，则根据测地线的存在和唯一性定理(4.4，命题 5)，可以把 $\bar{\gamma}$ 延拓到 s_0 在 $\mathbb{R}$ 中的一个邻域上. 因此，$\bar{\gamma}$ 有定义的一切 $s\in\mathbb{R}$ 的集合是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 如果我们又能证明这个集合是(连通的)$\mathbb{R}$ 中闭集，$\bar{\gamma}$ 就一定能对整个 $\mathbb{R}$ 有定义，从而也可完成证明.

假定 $\bar{\gamma}$ 对 $s<s_0$ 有定义，我们来证明 $\bar{\gamma}$ 对 $s=s_0$ 也有定义. 考虑序列 $\{s_n\}\to s_0$，且 $s_n<s_0$，$n=1,2,\cdots$.

我们先证明序列 $\{\bar{\gamma}(s_n)\}$ 在 S 中收敛. 事实上，给定 $\varepsilon>0$，存在 n_0，使得 n，$m>n_0$ 时，有 $|s_n-s_m|<\varepsilon$. 用 $\bar{d}$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的距离，并注意，若 p，$q\in S$，则 $\bar{d}(p,q)\leqslant d(p,q)$. 于是

$$\bar{d}(\bar{\gamma}(s_n),\bar{\gamma}(s_m))\leqslant d(\bar{\gamma}(s_n),\bar{\gamma}(s_m))\leqslant|s_n-s_m|<\varepsilon$$

其中的第二个不等式，来自 d 的定义，以及 $|s_n-s_m|$ 等于曲线 $\bar{\gamma}$ 在 s_n 与 s_m 之间的弧长这样一个事实. 这说明 $\{\bar{\gamma}(s_n)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 Cauchy 序列；因而，它收敛于点 $q\in\mathbb{R}^3$(见第 5 章附录，命题 4). 因为 q 是 $\{\bar{\gamma}(s_n)\}$ 的极限点，而 S 又是闭集，所以 $q\in S$，这便证明了我们的断言.

现在设 W 和 δ 是 4.7 命题 1 给出的 q 的邻域和正数. 设 $\bar{\gamma}(s_n)$，$\bar{\gamma}(s_m)\in W$ 是满足 $|s_n-s_m|<\delta$ 的两点，并设 γ 是连接 $\bar{\gamma}(s_n)$，$\bar{\gamma}(s_m)$ 并使 $l(\gamma)<\delta$ 的唯一测地线. 显然，$\bar{\gamma}$ 与 γ 重合. 因为 $\exp_{\bar{\gamma}(s_n)}$ 在 $B_\delta(0)$ 中是微分同胚，并且 $\exp_{\bar{\gamma}(s_n)}(B_\delta(0))\supset W$，所以 γ 便把 $\bar{\gamma}$ 延拓得超过了 q 点. 这样一来，$\bar{\gamma}$ 就在 $s=s_0$ 上有定义，命题证毕.

推论 紧致曲面是完备的.

注 2 命题 5 的逆并不成立. 例如，在一条渐近于圆的平面曲线上作出的直柱面显然是完备的，但不是闭曲面(图 5-7).

我们称连接两点 p，$q\in S$ 的测地线 γ 为极小测地线，如果它的长度 $l(\gamma)$ 不超过连接 p，q

的任何分段正则曲线的长度(参见 4.7). 这件事等价于 $l(\gamma)=d(p, q)$, 因为给定连接 p, q 的分段可微曲线 α 后, 我们可以找到一条连接 p, q 的分段正则曲线, 使它比 α 短(或至少不比 α 长). 后一结论的证明留作习题.

注意, 如下例所示, 极小测地线不一定存在.

设 $S^2-\{p\}$ 为球面 S^2 去掉一点 $p\in S^2$ 后所得的曲面. 在过 p 的子午线上取关于 p 对称, 且充分接近 p 的两点 p_1 与 p_2, 我们看到, 在曲面 $S^2-\{p\}$ 上就不存在连接 p_1, p_2 的极小测地线(见图 5-8).

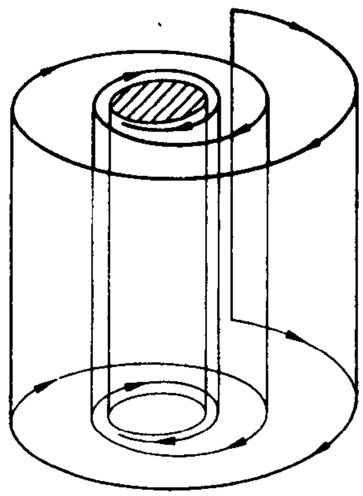


图 5-7 完备而非闭的曲面

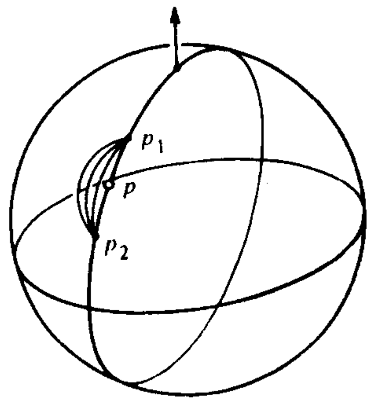


图 5-8

另一方面, 也可能有无限条连接曲面上两点的极小测地线, 例如, 在球面上取两个对径点就会发生这种情形; 这时连接这两点的所有子午线都是极小测地线.

本节的主要结果是, 在完备曲面上, 总存在连接两个已知点的极小测地线.

定理(Hopf-Rinow) 设 S 是完备曲面. 给定两点 p, $q\in S$, 总存在连接 p, q 的极小测地线.

证明 设 $r=d(p, q)$是 p, q 间的距离. 设 $B_\delta(0)\subset T_p(S)$是以切平面 $T_p(S)$的原点 O 为中心, δ 为半径的圆盘, 它含在 O 的一个邻域 $U\subset T_p(S)$内, 在 U 中 $\exp_p$ 是微分同胚. 设 $B_\delta(p)=\exp_p(B_\delta(0))$. 注意, 边界 $\mathrm{Bd}B_p(\delta)=\Sigma$ 是紧致的, 因为它是紧集 $\mathrm{Bd}B_\delta(0)\subset T_p(S)$的连续象.

如果 $x\in\Sigma$, 连续函数 $d(x, q)$便在紧集 Σ 的一点 x_0 上达到最小值. 此点 x_0 可以写成

$$x_0=\exp_p(\delta v), \quad |v|=1, \quad v\in T_p(S)$$

设 γ 是以弧长作参数的测地线, 给为(见图 5-9)

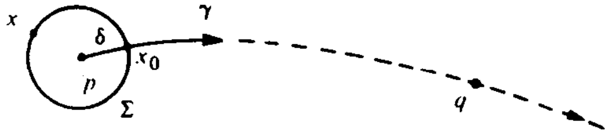


图 5-9

$$\gamma(s)=\exp_p(sv)$$

因为 S 完备，γ 对一切 $s\in\mathbb{R}$ 都有定义. 特别地，γ 在区间$[0, r]$上有定义. 若我们能证明 $\gamma(r)=q$，则 γ 必定是连接 p，q 的极小测地线，因为 $l(\gamma)=r=d(p, q)$，这时证明也就完成.

为此，我们必须证明，若 $s\in[\delta, r]$，则

$$d(\gamma(s),q)=r-s \tag{1}$$

因 $s=r$ 时，(1)式就表示 $\gamma(r)=q$，这正是所要的结果.

要证明等式(1)，我们先要说明它对 $s=\delta$ 是成立的. 而集 $A=\{s\in[\delta, r]$：使得(1)式成立$\}$显然是$[0, r]$中的闭集. 其次我们说明，若 $s_0\in A$ 且 $s_0<r$，则(1)式对 $s_0+\delta'$ 成立，这里的 $\delta'>0$ 为充分小的正数. 由此推出 $A=[\delta, r]$，从而也就证明了等式(1).

我们现在来证明等式(1)对 $s=\delta$ 成立. 事实上，由于任一连接 p、q 的曲线必与 Σ 相交，如果用 x 来表示 Σ 的任意点，我们就有

$$\begin{aligned} d(p,q) &= \inf_{\alpha} l(\alpha_{p,q}) = \inf_{x\in\Sigma}\{\inf_{\alpha} l(\alpha_{p,x})+\inf_{\alpha} l(\alpha_{x,q})\} \\ &= \inf_{x\in\Sigma}(d(p,x)+d(x,q)) = \inf_{x\in\Sigma}(\delta+d(x,q)) \\ &= \delta+d(x_0,q) \end{aligned}$$

因此，

$$d(\gamma(\delta),q)=r-\delta$$

这就是 $s=\delta$ 时的等式(1).

我们还要证明，若(1)式对 $s_0\in[\delta, r]$成立，则对充分小的 $\delta'>0$，它对 $s_0+\delta'$ 也是成立的.

设 $B_{\delta'}(0)$是切平面 $T_{\gamma(s_0)}(S)$中的圆盘，它的中心是该切平面的原点 O，并含在 $\exp_{\gamma(s_0)}$ 是微分同胚的邻域 U' 中. 设 $B_{\delta'}(\gamma(s_0))=\exp_{\gamma(s_0)}B_{\delta'}(0)$，且 $\Sigma'=\mathrm{Bd}(B_{\delta'}(\gamma(s_0)))$. 若 $x'\in\Sigma'$，连续函数 $d(x', q)$就在 $x'_0\in\Sigma'$ 上达到最小值(见图 5-10). 这时，与前面一样，

$$\begin{aligned} d(\gamma(s_0),q) &= \inf_{x'\in\Sigma'}\{d(\gamma(s_0),x')+d(x',q)\} \\ &= \delta'+d(x'_0,q) \end{aligned}$$

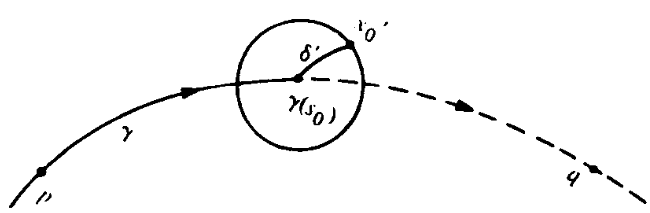


图 5-10

因为等式(1)在 s_0 成立，我们就有 $d(\gamma(s_0), q)=r-s_0$. 因此，

$$d(x'_0,q)=r-s_0-\delta' \tag{2}$$

而且，由于

$$d(p,x'_0)\geqslant d(p,q)-d(q,x'_0)$$

从(2)我们得到

$$d(p,x'_0)\geqslant r-(r-s_0)+\delta'=s_0+\delta'$$

现在我们看到，由 p 经 γ 到 $\gamma(s_0)$，再由 $\gamma(s_0)$经 $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$的一条测地线半径到 x'_0 的曲

线，它的长度恰好等于 $s_0+\delta'$. 因为 $d(p,\ x'_0)\geqslant s_0+\delta'$，所以连接 p 和 x'_0 的这条曲线具有极小长度. 由此可知(见 4.6，命题 2)这是条测地线，因而在其一切点上是正则的. 所以，它应该与 γ 重合；因此，$x'_0=\gamma(s+\delta')$. 于是，等式(2)可写为

$$d(\gamma(s_0+\delta'),q)=r-(s_0+\delta')$$

这就是 $s=s_0+\delta'$时的等式(1).

这便证明了我们的断言，从而也完成了定理的证明. 证毕.

推论 1 设 S 是完备曲面，则对所有点 $p\in S$，映照 $\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 是到 S 上的.

推论 1 成立是因为若 $q\in S$ 且 $d(p,\ q)=r$，则 $q=\exp_p rv$，其中的 $v=\gamma'(0)$是连接 p、q，以弧长作参数的极小测地线 γ 的切向量.

推论 2 设 S 是完备曲面，且关于度量 d 是有界的(即存在 $r>0$，对任何一对点 p，$q\in S$，成立 $d(p,\ q)<r$). 那么，S 是紧致的.

证明 固定 $p\in S$，S 为有界的事实说明，存在以 r 为半径，以切平面 $T_p(S)$的原点 O 为中心的闭球 $B\subset T_p(S)$使得 $\exp_p(B)=\exp_p(T_p(S))$. 根据 $\exp_p$ 是到上的事实，我们有 $S=\exp_p(T_p(S))=\exp_p(B)$. 因为 B 紧致，$\exp_p$ 连续，我们便有 S 紧致的结论. 证毕.

今后，除非另外说明，用到度量概念时总是指定义 3 中的距离 d. 例如，曲面 S 的直径 $\rho(S)$，按定义是

$$\rho(S)=\sup_{p,q\in S}d(p,q)$$

用这个定义，单位球面 S^2 的直径 $\rho(S^2)=\pi$.

习题

1. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是完备曲面，并设 $F\subset S$ 是 S 的非空闭子集，使余集 $S-F$ 连通. 证明：$S-F$ 是不完备的正则曲面.

2. 设 S 是例 1 中的单叶锥面. 证明：对给定点 $p\in S$，S 中过 p，但不能对一切参数值进行延拓的仅有测地线，是 S 中过 p 的子午线.

3. 设 S 是例 1 中的单叶锥面. 利用 4.2 例 3 中的等距对应证明：任何两点 p，$q\in S$(见图 5-11)都能由 S 上的一条极小测地线相连接.

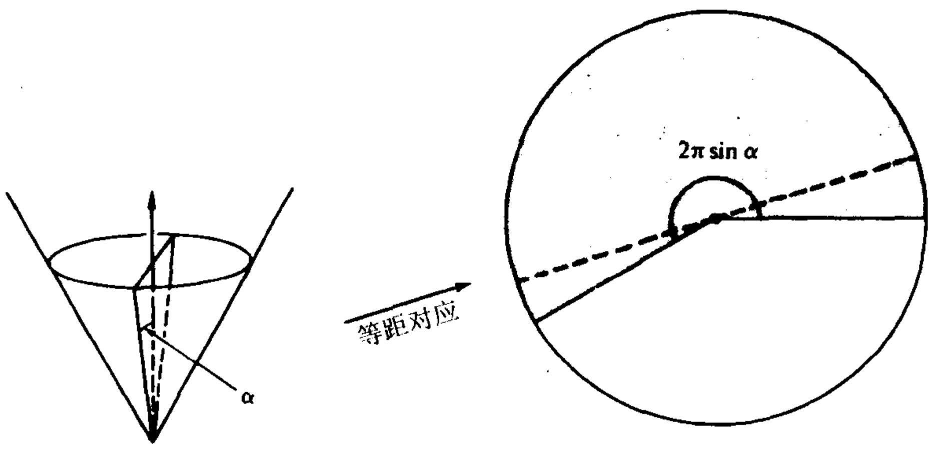


图 5-11

4. 正则曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 上的点列$\{p_n\}$称为按(内蕴)距离 d 收敛于点 $p_0\in S$，如果给定 $\varepsilon>0$，存在指标 n_0，使得 $n\geqslant n_0$ 时 $d(p_n, p_0)<\varepsilon$. 证明：S 中的点列$\{p_n\}$按 d 收敛于 $p_0\in S$ 的充要条件是，$\{p_n\}$作为$\mathbb{R}^3$ 中的点列(即按欧氏距离)收敛于 p_0.

*5. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为正则曲面. S 上的点列$\{p_n\}$称作按(内蕴)距离 d 的 Cauchy 序列，如果给定 $\varepsilon>0$，存在指标 n_0，使得当 $n, m\geqslant n_0$ 时，就有 $d(p_n, p_m)<\varepsilon$. 证明：S 为完备曲面的充要条件是，S 上的每个 Cauchy 序列收敛 S 中的点.

*6. 如果曲面 S 上的测地线 γ：$[0, \infty)\to S$，对任何 $s\in[0, \infty)$，都实现 $\gamma(0)$到 $\gamma(s)$间的(内蕴)距离，则称 γ 为从 $\gamma(0)$出发的射线. 设 p 是完备、非紧致曲面 S 上的任意点，证明：S 上有从 p 出发的一条射线.

7. S 上的发散曲线是指可微映照 α：$[0, \infty)\to S$，使得对每一个紧致子集 $K\subset S$ 有 $t_0\in(0, \infty)$当 $t>t_0$ 时 $\alpha(t)\notin K$(即 α“离开”了 S 的每一个紧致子集). 发散曲线的长度定义为

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t |\alpha'(t)|\,dt$$

证明：$S\subset\mathbb{R}^3$ 为完备曲面的充要条件是每一条发散曲线的长度是无限的.

*8. 设 S 与 $\bar{S}$ 都是正则曲面，并设 φ：$S\to\bar{S}$ 是微分同胚. 假定 $\bar{S}$ 完备，且存在常数 $c>0$，使得对一切 $p\in S$ 和一切 $v\in T_p(S)$有

$$I_p(v)\geqslant c\bar{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v))$$

这里的 I 和 $\bar{I}$ 分别表示 S 和 $\bar{S}$ 的第一基本形式. 证明：S 也是完备曲面.

*9. 设 $S_1\subset\mathbb{R}^3$ 是(连通的)完备曲面，$S_2\subset\mathbb{R}^3$ 是连通曲面，并且 S_2 上的任何两点均能用唯一的测地线相连接. 设 φ：$S_1\to S_2$ 是局部等距对应. 证明：φ 是整体等距对应.

*10. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是完备曲面. 固定单位向量 $v\in\mathbb{R}$，并设 h：$S\to\mathbb{R}$ 是高度函数 $h(p)=\langle p, v\rangle$，$p\in S$. 回忆一下，h 的梯度是由下式定义的 S 上的(切)向量场 grad$h$，

$$\langle \mathrm{grad}h(p), w\rangle_p = dh_p(w) \text{ 对一切 } w\in T_p(S)$$

(参见 2.5，习题 14). 设 $\alpha(t)$是 grad$h$ 的轨线；即 $\alpha(t)$是 S 上满足 $\alpha'(t)=\mathrm{grad}h(\alpha(t))$的曲线. 证明：

a. 对一切 $p\in S$，$|\mathrm{grad}h(p)|\leqslant 1$.

b. grad$h$ 的轨线 $\alpha(t)$对一切 $t\in\mathbb{R}$ 均有定义.

下面的习题，要用 3.5，部分 B 的材料，以及复变函数的基本知识.

11. (Osserman 引理)设 $D_1=\{\zeta\in\mathbb{C};\ |\zeta|\leqslant 1\}$是复平面$\mathbb{C}$ 中的单位圆盘. 照例我们用 $\zeta=u+iv$ 来重合$\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$. 设 X：$D_1\to\mathbb{R}^3$ 是极小曲面 $X(D_1)\subset\mathbb{R}^3$ 的等温参数表示. 这意味着(参见 3.5，部分 B)

$$\langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle, \langle X_u, X_v\rangle = 0$$

以及(极小性条件)

$$X_{uu} + X_{vv} = 0$$

假定 $X(D_1)$的单位法向量不取单位球面的一个邻域中的值. 更清楚一些，即假定对某个向量 $w\in\mathbb{R}^3$，$|w|=1$，存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\frac{\langle X_u,w\rangle^2}{|X_u|^2}\geqslant\varepsilon^2,\frac{\langle X_v,w\rangle^2}{|X_u|^2}\geqslant\varepsilon^2 \tag{$*$}$$

本习题的目标是证明 $X(D_1)$不是完备曲面.（这是在 3.5 末尾摘引的 Osserman 定理证明中的关键一步.）方法如下：

a. 定义 φ：$D_1\to\mathbb{C}$ 为

$$\varphi(u,v)=\varphi(\zeta)=\langle X_u,w\rangle+i\langle X_v,w\rangle$$

证明：极小性条件蕴涵 φ 是解析的.

b. 定义 θ：$D_1\to\mathbb{C}$ 为

$$\theta(\zeta)=\int_0^\zeta\varphi(\zeta)d\zeta=\eta$$

根据 a，θ 是解析函数. 证明；$\theta(0)=0$，且条件（$*$）意味着 $\theta'(\zeta)\neq 0$. 于是，在 0 的某邻域内，θ 有解析的反函数 θ^{-1}. 利用 Liouville 定理证明：θ^{-1}不能解析延拓到整个$\mathbb{C}$上.

c. 根据 b，存在圆盘

$$D_R=\{\eta\in\mathbb{C};\quad |\eta|\leqslant R\}$$

及点 η_0，$|\eta_0|=R$，使得 θ^{-1} 在 D_R 中解析，且不能解析延拓到 η_0 的任一邻域（图 5.12）. 设L 是 D_R 中连接 η_0 和 0 的线段；即 $L=\{t\eta_0\in\mathbb{C};\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$. 令 $\alpha=\theta^{-1}(L)$并证明：$X(\alpha)$的弧长 l 是

$$\begin{aligned}
l&=\int_\alpha\sqrt{2\langle X_u,X_u\rangle\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right\}}dt\\
&\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_\alpha\sqrt{\langle X_u,w\rangle^2+\langle X_v,w\rangle^2}\,|d\zeta|\\
&=\frac{1}{\varepsilon}\int_\alpha|\varphi(\zeta)||d\zeta|=\frac{R}{\varepsilon}<+\infty
\end{aligned}$$

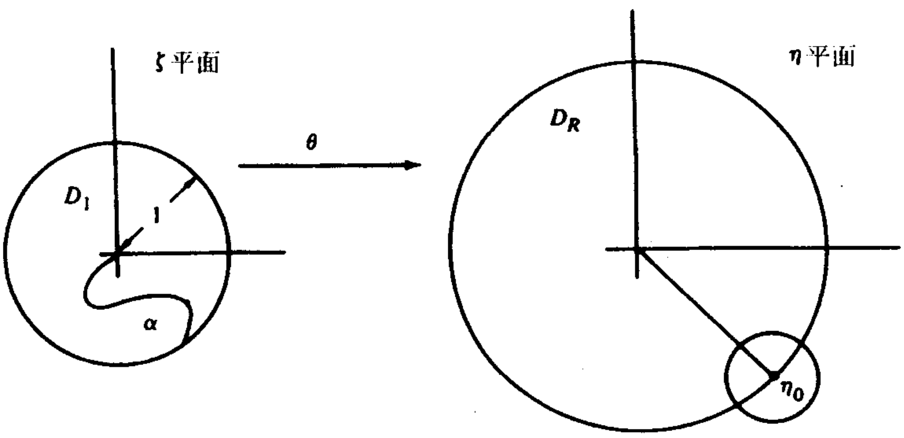


图 5-12

利用习题 7 得出 $X(D_1)$不是完备曲面的结论.

5.4 弧长的第一变分和第二变分；Bonnet 定理

本节的目标是证明：Gauss 曲率 $K\geqslant\delta>0$ 的完备曲面 S 是紧致的(Bonnet 定理).

证明的关键点是阐明：若 $K\geqslant\delta>0$，则连接任意两点 p，$q\in S$ 的测地线 γ，当其长度 $l(\gamma)>\pi/\sqrt{\delta}$时，就不是极小测地线；也就是说，存在连接 p，q 的参数曲线，它的长度小于 $l(\gamma)$.

一旦这点得到证明，可以推知，所有极小测地线的长度 $l\leqslant\pi/\sqrt{\delta}$；从而 S 按距离 d 是有界的. 因为 S 是完备曲面，所以它也是紧致的(5.3，推论 2). 附带指出，我们还得到 S 直径的一种估计，也就是 $\rho(S)\leqslant\pi/\sqrt{\delta}$.

要证明上述这点，我们需要把参数曲线的弧长与“邻近曲线”的弧长作比较. 为此，我们将引入一系列想法，这些想法在微分几何的其他问题中也是有用的. 事实上，这些想法就是把变分学中的一些较一般的概念，修正得以适应微分几何的需要. 这里并不要求事先有变分学的知识.

在本节中 S 将表示正则(并不一定完备)曲面.

首先，我们来把一条已知曲线的邻近曲线这个想法精确化.

定义 1 设 α：$[0,l]\to S$ 是正则参数曲线，这里的参数 $s\in[0,l]$是弧长，α 的变分是可微映照 h：$[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbb{R}^2\to S$，使得

$$h(s,0)=\alpha(s),\quad s\in[0,l]$$

对每个 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，由 $h_t(s)=h(s,t)$给出的曲线 h_t：$[0,l]\to S$，称作 h 的一条变分曲线. 如果

$$h(0,t)=\alpha(0),\quad h(l,t)=\alpha(l),\quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

变分 h 就称为是正常的.

在直观上，α 的变分是可微地依赖于参数 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$的一族曲线 h_t，并且 h_0 与 α 相一致(图 5-13). 正常的条件意味着所有曲线 h_t 有相同的起点 $\alpha(0)$和相同的终点 $\alpha(l)$.

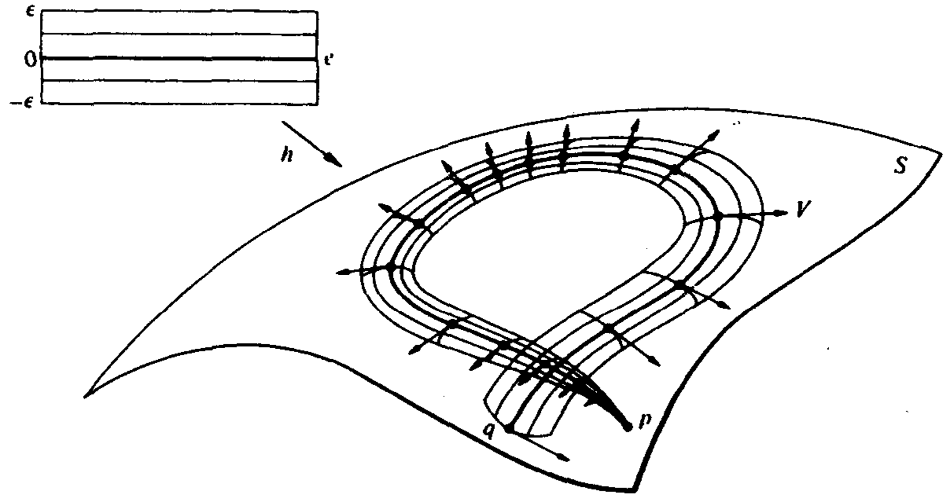


图 5-13

为方便起见，采用下列的记法. $\mathbb{R}^2$ 中由

$$s \to (s, t_0)$$

$$t \to (s_0, t)$$

给出的两条参数曲线经过点 $p_0=(s_0, t_0)\in\mathbb{R}^2$，并以(1, 0)和(0, 1)作为$(s_0, t_0)$处的切向量. 设 h: $[0, l]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\subset\mathbb{R}^2\to S$ 为可微映照，并设 $p_0\in[0, l]\times(-\varepsilon, \varepsilon)$. 这时，$dh_{p_0}(1, 0)$ 是曲线 $s\to h(s, t_0)$在 $h(p_0)$的切向量，$dh_{p_0}(0, 1)$则是曲线 $t\to h(s_0, t)$在 $h(p_0)$的切向量. 我们将记

$$dh_{p_0}(1,0) = \frac{\partial h}{\partial s}(p_0)$$

$$dh_{p_0}(0,1) = \frac{\partial h}{\partial t}(p_0)$$

回忆一下(参见 4.4，定义 2)，沿曲线 α: $I\to S$ 的向量场 w 是一种对应关系，对每个 $t\in I$，给出向量 $w(t)$，它在 $\alpha(t)$处与曲面 S 相切. 于是，$\partial h/\partial s$ 与 $\partial h/\partial t$ 是沿 α 的可微切向量场.

由此可知，α 的变分 h 按下式决定了沿 α 的可微向量场 $V(s)$

$$V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s,0), \quad s\in[0,l]$$

V 称作 h 的变分向量场；我们指出，若 h 是正常的变分，则

$$V(0) = V(l) = 0$$

这个术语的合理性由下列命题给出.

命题 1 设 $V(s)$是沿正则参数曲线 α: $[0, l]\to S$ 的可微向量场，则存在 α 的变分 h：$[0, l]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$，使得 $V(s)$是 h 的变分向量场. 而且，若 $V(0)=V(l)=0$，则 h 能选择得成为正常变分.

证明 我们先证明存在 $\delta>0$，使得当 $v\in T_{\alpha(s)}(S)$满足 $|v|<\delta$ 时，$\exp_{\alpha(s)}v$ 对一切 $s\in[0, l]$均有定义. 事实上，对每点 $p\in\alpha([0, l])\subset S$，考察由 4.7 命题 1 给出的邻域 W_p(其中一切点的法邻域)和数 $\delta_p>0$. 并集 $\bigcup_p W_p$ 便覆盖了 $\alpha([0, l])$，并且，根据紧致性，其中有有限个，比如说，W_1，…，W_n，仍旧覆盖了 $\alpha([0, l])$. 取 $\delta=\min(\delta_1, \cdots, \delta_n)$，这里的 δ_i 是对应于邻域 W_i 的数，$i=1$，…，n，容易看出，这个 δ 满足上述的条件.

现在，设 $M=\max_{s\in[0,l]}|V(s)|$，$s<\delta/M$，并定义

$$h(s,t) = \exp_{\alpha(s)} tV(s), \quad s\in[0,l], \quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

h 显然是确有定义的. 而且，因为

$$\exp_{\alpha(s)} tV(s) = \gamma(1,\alpha(s),tV(s)),$$

其中 γ 是 4.7 定理 1 中的(可微)映照(即，对 $t\neq0$ 与 $V(s)\neq0$，$\gamma(1, \alpha(s), tV(s))$是满足初始条件 $\gamma(0)=\alpha(s)$，$\gamma'(0)=V(s)$的测地线 γ)，所以 h 是可微分的. $h(s, 0)=\alpha(s)$可直接验证. 最后，h 的变分向量场由下式给出

$$\frac{\partial h}{\partial t}(s,0) = dh_{(s,0)}(0,1) = \frac{d}{dt}(\exp_{\alpha(s)} tV(s))\,|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\gamma(1,\alpha(s),tV(s))\,|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\gamma(t,\alpha(s),V(s))\mid_{t=0} = V(s)$$

并且，由 h 的定义容易知道，若 $V(0)=V(l)=0$，则 h 是正常变分. 证毕.

我们想把 $\alpha(=h_0)$的弧长与 h_t 的弧长作比较. 于是，我们来定义一个函数 L: $(-\varepsilon, \varepsilon)\to\mathbb{R}$，

$$L(t) = \int_0^l \left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right| ds, \quad t \in (-\varepsilon,\varepsilon) \tag{1}$$

在 $t=0$ 的一个邻域中研究 L，就会告诉我们与 α 邻近的曲线的"弧长的行为".

我们需要一些预备引理.

引理 1 由(1)式定义的函数 L，在 $t=0$ 的一个邻域中是可微分的；在这种邻域中，L 的导数可用积分号下求微分的方法得出.

证明 因为 α: $[0, l]\to S$ 是以弧长为参数的，所以

$$\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right| = \left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,0)\right| = 1$$

根据$[0, l]$的紧致性推出，存在 $\delta>0$，$\delta\leqslant\varepsilon$，使得

$$\left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right| \neq 0, \quad s\in[0,l], \quad |t|<\delta$$

因为非零可微函数的绝对值仍旧可微，所以(1)式中的被积函数对 $|t|<\delta$ 是可微分的. 根据微积分学中的一条经典定理(见 R, C Buck, Advanced Caloulus, 1965, p. 120)，我们有 L 在 $|t|<\delta$ 可微的结论，而且

$$L'(t) = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right| ds$$

证毕.

下面的引理 2，3 和 4，有其自身的重要性.

引理 2 设 $w(t)$是沿参数曲线 α: $[a, b]\to S$ 的可微向量场，并设 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可微函数. 那么

$$\frac{D}{dt}(f(t)w(t)) = f(t)\frac{Dw}{dt} + \frac{df}{dt}w(t)$$

证明 只要用到协变导数是通常导数的切向分量的事实，就有(这里的$(\ )_T$ 表示$(\ )$的切向分量)

$$\frac{D}{dt}(fw) = \left(\frac{df}{dt}w + f\frac{dw}{dt}\right)_T = \frac{df}{dt}w + f\frac{Dw}{dt}$$

证毕.

引理 3 设 $v(t)$，$w(t)$都是沿参数曲线 α: $[a, b]\to S$ 的可微向量场. 这时有

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), w(t)\rangle = \left\langle\frac{Dv}{dt}, w(t)\right\rangle + \left\langle v(t), \frac{Dw}{dt}\right\rangle$$

证明 利用上面证明中的说明，我们得到

$$\frac{d}{dt}\langle v, w\rangle = \left\langle\frac{dv}{dt}, w\right\rangle + \left\langle v, \frac{dw}{dt}\right\rangle$$

$$=\left\langle\left(\frac{dv}{dt}\right)_T,\ w\right\rangle+\left\langle v,\ \left(\frac{dw}{dt}\right)_T\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{Dv}{dt},\ w\right\rangle+\left\langle v,\ \frac{Dw}{dt}\right\rangle$$

证毕.

在开始下一条引理之前，为方便起见，引入下面的术语. 设 h：$[0,\ l]\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to S$ 是可微映照. 沿 h 的可微向量场是可微映照

$$V:[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S\subset\mathbb{R}^3$$

使得对每个 $(s,\ t)\in[0,\ l]\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)$，有 $V(s,\ t)\in T_{h(s,t)}(S)$. 它推广了沿参数曲线可微向量场的定义(4.4，定义 2).

例如，前面引入的向量场 $(\partial h/\partial s)(s,\ t)$ 和 $(\partial h/\partial t)(s,\ t)$ 都是沿 h 的向量场.

如果我们把 $V(s,\ t)$ 限制到曲线 $s=$常数，$t=$常数上，就得到沿曲线的向量场. 这时，记号 $(DV/\partial t)(s,\ t)$ 的含意是 $V(s,\ t)$ 在曲线 $s=$常数上的限制于点 $(s,\ t)$ 处的协变导数.

引理 4 设 h：$[0,\ l]\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\subset\mathbb{R}^2\to S$ 是可微映照.

则
$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}(s,\ t)=\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}(s,\ t)$$

证明 设 X：$U\to S$ 是 S 在点 $h(s,\ t)$ 附近的参数表示，参数是 u，v，并设 h 在这个坐标系中的表达式为

$$u=h_1(s,t),\quad v=h_2(s,t)$$

在这些条件下，当 $(s,\ t)\in h^{-1}(X(U))=W$ 时，曲线 $h(s,\ t_0)$ 可以表示成

$$u=h_1(s,t_0),\quad v=h_2(s,t_0)$$

由于 $(\partial h/\partial s)(s_0,\ t_0)$ 在 $s=s_0$ 处切于曲线 $h(s,\ t_0)$，我们就有

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s_0,t_0)=\frac{\partial h_1}{\partial s}(s_0,t_0)X_u+\frac{\partial h_2}{\partial s}(s_0,t_0)X_v$$

按 $(s_0,\ t_0)\in W$ 的任意性，我们有结论

$$\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{\partial h_1}{\partial s}X_u+\frac{\partial h_2}{\partial s}X_v$$

这里，为了简化记法，已略去注明是点 $(s,\ t)$ 的记号.

类似地，有

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial h_1}{\partial t}X_u+\frac{\partial h_2}{\partial t}X_v$$

现在，利用由 Christoffel 符号 Γ_{ij}^k 给出的协变导数的表示式(见 4.4，等式(1))计算协变导数 $(D/\partial s)(\partial h/\partial t)$ 和 $(D/\partial t)(\partial h/\partial s)$，便可得到所述的等式. 例如，在两个导数中 X_u 的系数，给为

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial s\partial t}+\Gamma_{11}^1\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_1}{\partial s}+\Gamma_{12}^1\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}$$
$$+\Gamma_{12}^1\frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{\partial h_1}{\partial s}+\Gamma_{22}^1\frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}$$

X_v 的系数的等式也可用同样的方法证得，引理证毕.

现在我们已能计算 L 在 $t=0$ 的一阶导数，从而得到

命题 2 设 h：$[0, l]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$ 是曲线 α：$[0, l]\to S$ 的正常变分，并设 $V(s)=(\partial h/\partial t)(s, 0)$，$s\in[0, l]$是 h 的变分向量场，则

$$L'(0)=-\int_0^l \langle A(s), V(s)\rangle ds \tag{2}$$

其中，
$$A(s)=(D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s, 0)$$

证明 若 t 属于引理 1 给出的区间$(-\delta, \delta)$，则

$$L'(t)=\int_0^l \left\{\frac{d}{dt}\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle^{1/2}\right\}ds$$

利用引理 3 和引理 4，得到

$$L'(t)=\int_0^l \frac{\left\langle\dfrac{D}{\partial t}\dfrac{\partial h}{\partial s}, \dfrac{\partial h}{\partial s}\right\rangle}{\left|\dfrac{\partial h}{\partial s}\right|}ds=\int_0^l \frac{\left\langle\dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial h}{\partial t}, \dfrac{\partial h}{\partial s}\right\rangle}{\left|\dfrac{\partial h}{\partial s}\right|}ds$$

因为 $|(\partial h/\partial s)(s, 0)|=1$，我们有

$$L'(0)=\int_0^l \left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle ds$$

这里的被积函数是在$(s, 0)$计值的，这一点为简化记号已被略去.

根据引理 3，

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle=\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle$$

所以，

$$\begin{aligned}L'(0)&=\int_0^l \frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle ds-\int_0^l \left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle ds\\&=-\int_0^l \left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle ds\end{aligned}$$

这里由于按变分是正常的事实，$(\partial h/\partial t)(0, 0)=(\partial h/\partial t)(l, 0)=0$. 回忆一下 $A(s)$与 $V(s)$的定义，我们就可把最后的一个表达式写成如下形式

$$L'(0)=-\int_0^l \langle A(s), V(s)\rangle ds$$

证毕.

注 1 向量 $A(s)$称作曲线 α 的加速度向量，并且它的模长不是别的，正好是 α 的测地曲率的绝对值. 我们看到，$L'(0)$仅仅依赖于变分向量场 $V(s)$，而与变分 h 本身无关. 表达式(2)通常称为曲线 α 的弧长的第一变分公式.

注 2 h 为正常变分的条件，仅在证明的末了用来消除以下两项

$$\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle(l, 0)-\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle(0, 0)$$

因此，若 h 不是正常变分，我们会得到与等式(2)类似的公式，它还含有这些附加的边界项.

命题 2 的一个有趣的结论是，可以把测地线作为"变分问题"的解来描述，讲得更精确一些，即

命题 3 设 α：$[0, l]\to S$ 是正则参数曲线，其中的参数 $s\in[0, l]$是 α 的弧长. 则 α 为测地线的充要条件是：对 α 的任何正常的变分 h：$[0, l]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$，有 $L'(0)=0$.

证明 必要性是平凡的，因为测地线 α 的加速度向量 $A(s)=(D/\partial s)(\partial\alpha/\partial s)$恒等于零，所以，对所有正常的变分，$L'(0)=0$.

现在假设 $L'(0)=0$ 对 α 的每个正常变分成立，并考虑向量场 $V(s)=f(s)A(s)$，这里的 f：$[0, l]\to\mathbb{R}$ 是满足 $f(s)\geqslant 0$，$f(0)=f(l)=0$ 的实可微函数，$A(s)$是 α 的加速度向量. 构造一个对应于 $V(s)$的变分，我们就有

$$L'(0)=-\int_0^l\langle f(s)A(s), A(s)\rangle ds$$

$$=-\int_0^l f(s)\,|A(s)|^2 ds=0$$

由于 $f(s)\,|A(s)|^2\geqslant 0$，因此得到

$$f(s)\,|A(s)|^2\equiv 0$$

我们来证明上式可推出 $A(s)=0$，$s\in[0, l]$. 事实上，若 $|A(s_0)|\neq 0$，$s_0\in(0, l)$，就存在区间 $I=(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$，使得 $|A(s)|\neq 0$ 对 $s\in I$ 成立. 选择 $f(s_0)>0$ 的 f，就有矛盾的结论 $f(s_0)\,|A(s_0)|=0$. 因此，$|A(s)|=0$ 对 $s\in(0, l)$成立. 再由连续性，就有所要的 $A(0)=A(l)=0$.

因为 α 的加速度向量现在恒等于零，所以 α 为测地线. 证毕.

今后，我们将只考虑以弧长为参数的测地线 γ：$[0, l]\to S$ 的正常变分；也就是我们总假定 $L'(0)=0$. 为了简化计算，我们将限于讨论*正交变分*；即我们将假定变分向量场 $V(s)$满足条件$\langle V(s), \gamma'(s)\rangle=0$，$s\in[0, l]$. 为了研究函数 L 在 0 点一个邻域中的性质，我们来计算 $L''(0)$.

为此，我们需要一些阐明 Gauss 曲率与协变导数关系的引理.

引理 5 设 X：$U\to S$ 是正则曲面 S 在点 $p\in S$ 附近的一个参数表示，参数是 u，v. 并设 K 是 S 的 Gauss 曲率. 则有

$$\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_u-\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_u=K(X_u\wedge X_v)\wedge X_u$$

证明 注意到协变导数是通常的导数在切平面中的分量，我们就有(见 4.3)

$$\frac{D}{\partial u}X_u=\Gamma_{11}^1X_u+\Gamma_{11}^2X_v$$

对上式应用协变导数的公式(4.4，等式(1))，我们得到

$$\frac{D}{\partial v}\left(\frac{D}{\partial u}X_u\right)=\{(\Gamma_{11}^1)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2\}X_u$$

$$+\{(\Gamma_{11}^2)_v+\Gamma_{12}^2\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^2\Gamma_{11}^2\}X_v$$

通过类似的计算，我们可验证

$$\frac{D}{\partial u}\left(\frac{D}{\partial v}X_u\right)=\{(\Gamma_{12}^1)_u+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2\}X_u$$
$$+\{(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\}X_v$$

所以，

$$\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_u-\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_u=\{(\Gamma_{11}^1)_v-(\Gamma_{12}^1)_u+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2\}X_u$$
$$+\{(\Gamma_{11}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{12}^2\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^2\Gamma_{11}^2$$
$$-\Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1-\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\}X_v$$

现在，利用由 Christoffel 符号写出的曲率表达式(4.3，等式(5)和(5a))，就有结论

$$\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_u-\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_u=-FKX_u+EKX_v$$
$$=K\{\langle X_u,X_u\rangle X_v-\langle X_u,X_v\rangle X_u\}=K(X_u\wedge X_v)\wedge X_u$$

证毕.

引理 6 设 h：$[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ 是可微映照，$V(s,t)$，$(s,t)\in[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$是沿 h 的可微向量场. 那么，

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V-\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V=K(s,t)\left(\frac{\partial h}{\partial s}\wedge\frac{\partial h}{\partial t}\right)\wedge V$$

式中的 $K(s,t)$是 S 在点(s,t)的曲率.

证明 设 $X(u,v)$是 S 在$h(s,t)$邻近的坐标系，并设

$$V(s,t)=a(s,t)X_u+b(s,t)X_v$$

是 $V(s,t)=V$ 在这个坐标系中的表达式. 根据引理 2，有

$$\frac{D}{\partial s}V=\frac{D}{\partial s}(aX_u+bX_v)$$
$$=a\frac{D}{\partial s}X_u+b\frac{D}{\partial s}X_v+\frac{\partial a}{\partial s}X_u+\frac{\partial b}{\partial s}X_v$$

因此，

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V=a\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_u+b\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_v$$
$$+\frac{\partial a}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_u+\frac{\partial b}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_v+\frac{\partial a}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_u$$
$$+\frac{\partial b}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_v+\frac{\partial^2 a}{\partial t\partial s}X_u+\frac{\partial^2 b}{\partial t\partial s}X_v$$

通过类似的计算，便得$(D/\partial s)(D/\partial t)V$ 的表示式，它可用交换上式中的 s 与 t 的方法得出. 由此得到

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V-\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V=a\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_u-\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_u\right)$$
$$+b\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_v-\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_v\right)\tag{3}$$

为了计算$(D/\partial t)(D/\partial s)X_u$，我们需要 h 在参数表示 $X(u,v)$中的表达式

$$u = h_1(s,t), \quad v = h_2(s,t)$$

并记
$$X_u(u, v) = X_u(h_1(s, t), h_2(s, t)) = X_u$$

因为协变导数$(D/\partial s)X_u$是通常的导数$(d/ds)X_u$在切平面上的投影，我们有

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial s}X_u &= \left\{\frac{d}{ds}X_u\right\}_T = \left\{X_{uu}\frac{\partial h_1}{\partial s} + X_{uv}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right\}_T \\ &= \frac{\partial h_1}{\partial s}\{X_{uu}\}_T + \frac{\partial h_2}{\partial s}\{X_{uv}\}_T \\ &= \frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{D}{\partial u}X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{D}{\partial v}X_u\end{aligned}$$

这里，T表示向量到切平面上的投影.

用同一记号，可得

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}x_u &= \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{D}{\partial u}X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{D}{\partial v}X_u\right)\right\}_T \\ &= \frac{\partial^2 h_1}{\partial t\partial s}\frac{D}{\partial u}X_u + \frac{\partial^2 h_2}{\partial t\partial s}\frac{D}{\partial v}X_u \\ &\quad + \frac{\partial h_1}{\partial s}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial u}X_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_u\right) \\ &\quad + \frac{\partial h_2}{\partial s}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_u\right)\end{aligned}$$

类似地，我们得到$(D/\partial s)(D/\partial t)x_u$，它可用交换上式中$s$与$t$的方法得出. 由此推出

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_u - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_u &= \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{\partial h_1}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_u - \frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_u\right) \\ &\quad + \frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_u - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_u\right) \\ &= \Delta\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_u - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_u\right)\end{aligned}$$

其中，
$$\Delta = \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{\partial h_1}{\partial t}\right)$$

在最后一式中以X_v代X_u，我们得到

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_v - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_v = \Delta\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_v - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_v\right)$$

把上面的表达式代入(3)，并利用引理 5，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V &= a\Delta K(X_u \wedge X_v) \wedge X_u + b\Delta K(X_u \wedge X_v) \wedge X_v \\ &= K(\Delta X_u \wedge X_v) \wedge (aX_u + bX_v)\end{aligned}$$

另一方面，如在引理 4 的证明中所看到的，

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}X_v, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial t}X_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}X_v$$

因此，
$$\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} = \Delta X_u \wedge X_v$$

所以，
$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V-\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V=K\left(\frac{\partial h}{\partial s}\wedge\frac{\partial h}{\partial t}\right)\wedge V$$

证毕.

现在，我们已能计算 $L''(0)$.

命题 4 设 γ: $[0, l]\to S$ 是以弧长 $s\in[0, l]$为参数的测地线，h: $[0, l]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$ 是 γ 的正常正交变分. 设 $V(s)=(\partial h/\partial t)(s, 0)$是 h 的变分向量场. 那么

$$L''(0)=\int_0^l\left(\left|\frac{D}{\partial s}V(s)\right|^2-K(s)\mid V(s)\mid^2\right)ds \tag{4}$$

这里的 $K(s)=K(s, 0)$是 S 在 $\gamma(s)=h(s, 0)$的 Gauss 曲率.

证明 如我们在命题 2 的证明中已看到的，

$$L'(t)=\int_0^l\frac{\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle}{\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle^{1/2}}ds$$

对由引理 1 给出的区间$(-\delta, \delta)$中的 t 值成立. 对上式微分，可得

$$L''(t)=\int_0^l\frac{\left(\frac{d}{dt}\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle\right)\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle^{1/2}}{\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle}ds$$

$$-\int_0^l\frac{\left(\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle\right)^2}{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|^{\frac{3}{2}}}ds$$

现在注意，对于 $t=0$，$|(\partial h/\partial s)(s, 0)|=1$. 而且，

$$\frac{d}{ds}\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle=\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle$$

因为 γ 是测地线，$(D/\partial s)(\partial h/\partial s)=0$ 对 $t=0$ 成立，又因为变分是正交的，对 $t=0$ 有

$$\left\langle\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle=0$$

因此可得

$$L''(0)=\int_0^l\frac{d}{dt}\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle ds \tag{5}$$

式中的被积函数在$(s, 0)$计值.

现在我们来把(5)式中的被积函数变换成更方便的形式. 首先看到

$$\frac{d}{dt}\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle=\left\langle\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle+\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle-\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle$$

$$+\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle + \left|\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}\right|^2$$

另一方面，由于 γ 是测地线，$(D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s, 0)=0$，所以 $t=0$ 时有

$$\frac{d}{ds}\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle$$

而且，利用引理 6 以及变分为正交的事实，我们得到(对 $t=0$)

$$\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle$$

$$=K(s)\left\langle \left(\frac{\partial h}{\partial s}\wedge\frac{\partial h}{\partial t}\right)\wedge\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle$$

$$=-K(s)\left\langle |V(s)|^2\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle$$

$$=-K|V(s)|^2$$

把上面的值代入等式(5)，得到

$$L''(0)=\int_0^l \left(-K(s)|V(s)|^2 + \left|\frac{D}{\partial s}V(s)\right|^2\right)ds$$

$$+\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle(l, 0)$$

$$-\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle(0, 0)$$

最后，因为变分是正常的，$(\partial h/\partial t)(0, t)=(\partial h/\partial t)(l, t)=0$，$t\in(-\delta, \delta)$. 从而

$$L''(0)=\int_0^l\left(\left|\frac{D}{\partial s}V(s)\right|^2 - K|V(s)|^2\right)ds$$

证毕.

注 3 (4)式称为 γ 弧长的第二变分公式. 我们看到，它仅依赖于 h 的变分向量场，而与变分 h 本身无关. 有时候，为方便起见，就用 $L''_V(0)$ 的记法来指明这种依赖关系.

注 4 把第二变分公式(4)作如下改写，常常是较有用的：

$$L''(0)=-\int_0^l \left\langle \frac{D^2V}{ds^2}+KV, V\right\rangle ds \tag{4a}$$

注意到 $V(0)=V(l)=0$，以及

$$\frac{d}{ds}\left\langle V, \frac{DV}{ds}\right\rangle = \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds}\right\rangle + \left\langle V, \frac{D^2V}{ds^2}\right\rangle$$

等式(4a)可由等式(4)推得. 这时，

$$\int_0^l \left(\left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds}\right\rangle - K\langle V, V\rangle\right)ds$$

$$=\left[\left\langle V, \frac{DV}{ds}\right\rangle\right]_0^l - \int_0^l \left\langle \frac{D^2V}{ds^2}+KV, V\right\rangle ds$$

$$= -\int_0^l \left\langle \frac{D^2V}{ds^2} + KV,\ V \right\rangle ds$$

弧长的第二变分公式，是用来证明本节开头提到的 Bonnet 定理关键性一步的工具，即我们现在已可证明

定理(Bonnet) 设完备曲面 S 的 Gauss 曲率 K 满足条件

$$K \geqslant \delta > 0$$

则 S 为紧致曲面，且 S 的直径 ρ 满足不等式

$$\rho \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$$

证明 因为 S 是完备曲面，给定两点 p，$q\in S$，根据 Hopf-Rinow 定理，存在 S 中连接 p，q 的极小测地线 γ. 我们将证明，这条测地线的长度 $l=d(p,q)$ 满足不等式

$$l \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$$

用反证法，先假定 $l>\pi/\sqrt{\delta}$，并考虑如下定义的测地线 γ：$[0,l]\to S$ 的变分. 设 w_0 是 $T_{\gamma(0)}(S)$ 中满足 $\langle w_0,\gamma'(0)\rangle=0$ 的单位向量，并设 $w(s)$，$s\in[0,l]$ 是 w_0 沿 γ 的平行移动. 显然会有 $|w(s)|=1$，且 $\langle w(s),\gamma'(s)\rangle=0$，$s\in[0,l]$. 考虑由下式定义的向量场 $V(s)$

$$V(s) = w(s)\sin\frac{\pi}{l}s,\quad s\in[0,l]$$

由于 $V(0)=V(l)=0$，并且 $\langle V(s),\gamma'(s)\rangle=0$，向量场 $V(s)$ 便决定了 γ 的一个正常的正交变分. 根据命题 4，

$$L''_V(0) = \int_0^l \left(\left| \frac{D}{\partial s}V(s) \right|^2 - K(s)\,|V(s)|^2 \right) ds$$

因为 $w(s)$ 是平行向量场，

$$\frac{D}{\partial s}V(s) = \left(\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi}{l}s \right) w(s)$$

于是，因 $l>\pi/\sqrt{\delta}$，所以 $K\geqslant\delta>\pi^2/l^2$，我们就有

$$\begin{aligned} L''_V(0) &= \int_0^l \left(\frac{\pi^2}{l^2}\cos^2\frac{\pi}{l}s - K\sin^2\frac{\pi}{l}s \right) ds \\ &< \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2}\left(\cos^2\frac{\pi}{l}s - \sin^2\frac{\pi}{l}s \right) ds \\ &= \frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l \cos\frac{2\pi}{l}s\,ds = 0 \end{aligned}$$

所以，就存在使 $L''(0)<0$ 的 γ 的一个变分. 然而，因为 γ 是极小测地线，它的长度应小于或等于任何连接 p，q 曲线的长度. 于是，对 γ 的所有变分，我们应有 $L'(0)=0$，且 $L''(0)\geqslant0$. 因此我们就得出一个矛盾，这便证明了所述的结论：

$$l = d(p,q) \leqslant \pi/\sqrt{\delta}$$

因为 $d(p,q)\leqslant\pi/\sqrt{\delta}$ 对 S 的任何两点均成立，所以 S 是有界的，且它的直径 $\rho\leqslant\pi/\sqrt{\delta}$. 进

而，由于 S 完备且有界，所以 S 是紧致曲面. 证毕.

注 5 如果我们看一下以注 4 中(4a)的形式给出的第二变分，就能更好地理解为什么要在上面的证明中选取 $V(s)=w(s)\sin(\pi/l)s$ 作为变分向量场. 因为 $K>\pi^2/l^2$，所以

$$L''_V(0)=-\int_0^l \left\langle V,\ \frac{D^2V}{ds^2}+\frac{\pi^2}{l^2}V\right\rangle ds-\int_0^l \left(K-\frac{\pi^2}{l^2}\right)|V|^2 ds$$
$$<-\int_0^l \left\langle V,\ \frac{D^2V}{ds^2}+\frac{\pi^2}{l^2}V\right\rangle ds$$

现在就容易猜到，前面的 $V(s)$ 便使最后一个被积函数为零；因此，$L''_V(0)<0$.

注 6 假定 $K\geqslant\delta>0$ 不能减弱为 $K>0$. 事实上，抛物面

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad z=x^2+y^2\}$$

的 Gauss 曲率 $K>0$，而且它是完备的，但并不紧致. 注意，当点 $(x,\ y)\in\mathbb{R}^2$ 与原点 $(0,\ 0)$ 的距离变得任意大时，抛物面的曲率趋于零(参见下面的注 8).

注 7 Bonnet 定理中给出的直径估计 $\rho\leqslant\pi/\sqrt{\delta}$，是最好的可能估计，这可用单位球面为例来说明：$K\equiv1$，而 $\rho=\pi$.

注 8 上述定理的最初证明，是由 O. Bonnet 得到的，"Surquelques propriétés des lignes géodésiques，"C. R. Ac. Sc. Paris XL(1850)，1331，以及"Note sur les lignes géodèsiques，" ibid. XLI(1851)，32. 对该定理利用完备曲面来归纳，可在上节所引的 Hopf-Rinow 的一篇文章中找到. 其实，K 有正下界的条件并不是必要的，只要它趋于零时不要太快就足够了. 见 E. Calabi，"On Ricci Curvature and Geodesics，"Duke Math. J. 34(1967)，667～676；或者 R. Schneider，"Konvexe Flächen mit langsam abnehmender Krümmung，"Archiv der Math. 23 (1972). 650～654(也可参见下面的习题 2).

习题

1. Bonnet 定理的逆是否成立；即，若 S 紧致，且直径 $\rho\leqslant\pi/\sqrt{\delta}$，是否有 $K\geqslant\delta$?

*2. (Kazdan-Warner 的注. 参见 5.10，习题 10)设 $S=\{z=f(x,\ y);\ (x,\ y)\in\mathbb{R}^2\}$ 是完备非紧致的正则曲面. 证明

$$\lim_{r\to\infty}\left(\inf_{x^2+y^2\geqslant r} K(x,y)\right)\leqslant 0$$

3. a. 不假定变分为正常，导出弧长的第一变分公式.

b. 设 S 是完备曲面. 设 $\gamma(s)$，$s\in\mathbb{R}$ 是 S 上的测地线，并设 $d(s)$ 是 $\gamma(s)$ 到不在 γ 轨迹上的点 $p\in S$ 的距离 $d(\gamma(s),\ p)$. 证明：存在点 $s_0\in\mathbb{R}$，使得 $d(s_0)\leqslant d(s)$ 对一切 $s\in\mathbb{R}$ 成立，并且存在连接 p 和 $\gamma(s_0)$ 的测地线 Γ，它和 γ 正交(图 5-14).

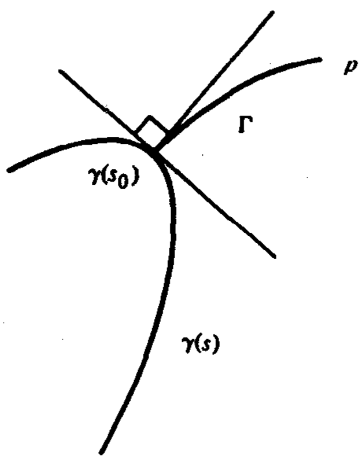


图 5-14

c. 进一步假定 S 同胚于平面，且 Gauss 曲率 $K\leqslant0$. 证明：s_0(因此，Γ)是唯一的.

4. (变分法.)测地线是解变分问题的特殊情形. 在这道习题中，我们将扼要地讨论一个虽然简单，却非常有代表意义的变分

问题. 在下一道习题中，将对这里提出的思想作出一些应用.

设 $y=y(x)$，$x\in[x_1, x_2]$是 xy 平面中的可微曲线，并设 y 的一个变分由可微映照 $y=y(x, t)$，$t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$给出. 这里，$y(x, 0)=y(x)$对一切 $x\in[x_1, x_2]$成立，而且 $y(x_1, t)=y(x_1)$，$y(x_2, t)=y(x_2)$对一切 $t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$成立(即变分的端点是固定的). 考虑积分

$$I(t)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y(x,t),y'(x,t))dx, \quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

其中，$F(x, y, y')$是三个变量的可微函数，且 $y'=\partial y/\partial x$. 寻找 $I(t)$的临界点的问题，就称作关于被积函数 F 的变分问题.

a. 假定曲线 $y=y(x)$是 $I(t)$的临界点(即，$t=0$ 时 $dI/dt=0$). 利用分部积分法得到($\dot{I}=dI/dt$)

$$\begin{aligned}\dot{I}(t)&=\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y\frac{\partial y}{\partial t}+F_{y'}\frac{\partial y'}{\partial t}\right)dx\\&=\left[\frac{\partial y}{\partial t}F_{y'}\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial y}{\partial t}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx\end{aligned}$$

然后，利用边界条件，有

$$0=\dot{I}(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\eta\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\right\}dx \qquad (*)$$

这里的 $\eta=(\partial y/\partial t)(x, 0)$. (函数 η 对应于 $y(x, t)$的变分向量场).

b. 证明：若 $\dot{I}(0)=0$ 对端点固定的一切变分(即对($*$)中满足 $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ 的一切 η)都成立，则

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \qquad (**)$$

等式($**$)称作关于被积函数 F 的变分问题的 Euler-Lagrange 方程.

c. 证明：若 F 不显含变量 x，即 $F=F(y, y')$，这时，对 $y'F_{y'}-F$ 微分，并利用($**$)，则可得到

$$y'F_{y'}-F=\text{常数}$$

5.(变分法；一些应用)

a.(面积为最小的旋转面). 设 S 是绕 x 轴旋转曲线 $y=f(x)$，$x\in[x_1, x_2]$得到的旋转面. 假设在所有由连接(x_1, $f(x_1)$)和(x_2, $f(x_2)$)的曲线生成的旋转面中，S 具有最小面积. 于是，对一切使端点 $y(x_1)$，$y(x_2)$固定的 y 的变分 $y(x, t)$，$y=f(x)$使积分

$$I(t)=\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

达极小值(参见 2.5，习题 11). 根据习题 4 的 b，$F(y, y')=y\times\sqrt{1+(y')^2}$满足 Euler-Lagrange 方程($**$). 利用习题 4 的 c 得到

$$y'F_{y'}-F=-\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}}=-\frac{1}{c}, \quad c=\text{常数}$$

因此，

$$y=\frac{1}{c}\cosh(cx+c_1),\quad c_1=\text{常数}$$

结论是：如果存在以最小面积连接两个已知平行圆周的正则旋转面，那么这个曲面是以这两已知圆周为纬线的悬链面.

b.（旋转面的测地线.）设

$$X(u,v)=(f(v)\cos u,f(v)\sin u,g(v))$$

是旋转面 S 的参数表示. 设 $u=u(v)$ 是 S 的测地线方程，它既不是平行环，也不是子午线. 这时，$u=u(v)$ 是弧长积分($F=0$)

$$\int\sqrt{E(u')^2+G}\,dv,\quad u'=\frac{du}{dv}$$

的临界点. 因为 $E=f^2$，$G=(f')^2+(g')^2$，我们看到，这个变分问题的 Euler-Lagrange 方程是

$$F_u-\frac{d}{dv}F_{u'}=0,\quad F=\sqrt{f^2(u')^2+(f')^2+(g')^2}$$

注意，F 不依赖于 u. 从而，$(d/dv)Fu'=0$，且

$$c=\text{常数}=F_{u'}=\frac{u'f^2}{\sqrt{f^2(u')^2+(f')^2+(g')^2}}$$

由此得到下列的测地线 $u=u(v)$ 的方程(参见 4.4，例 5)：

$$u=c\int\frac{1}{f}\frac{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}{f^2-c^2}dv+\text{常数}$$

5.5 Jacobi 场和共轭点

在这一节，我们将探讨用以证明 Bonnet 定理的变分技巧的某些细节.

我们感兴趣的是获得有关给定测地线 γ 邻近测地线的行为的信息. 自然的做法是去考察满足进一步条件的 γ 的种种变分，即使变分曲线本身也是测地线. 这种变分的变分向量场，就给出了测地线在 γ 邻近分布得疏密程度的概念.

为了使叙述变得简单，假定曲面是完备的. 然而，作进一步研究的话，这一假定可以去掉. 记号 γ：$[0,l]\to S$ 总表示完备曲面 S 上以弧长为参数的测地线.

定义 1 设 γ：$[0,l]\to S$ 是 S 上的参数测地线，并设 h：$[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ 是 γ 的变分，使得对每个 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，曲线 $h_t(s)=h(s,t)$，$s\in[0,l]$ 也是参数测地线(但并不一定以弧长为参数). 变分向量场 $(\partial h/\partial t)(s,0)=J(s)$ 称作沿 γ 的 Jacobi 场.

Jacobi 场的平凡例子，可由测地线 γ 的切向量场 $\gamma'(s)$，$s\in[0,l]$ 给出. 事实上，取 $h(s,t)=\gamma(s+t)$，我们有

$$J(s)=\frac{\partial h}{\partial t}(s,0)=\frac{d\gamma}{ds}$$

我们特别感兴趣的，是研究 γ：$[0,l]\to S$ 邻近，也从 $\gamma(0)$ 出发的测地线的行为. 于是，我们将考虑满足条件 $h(0,t)=\gamma(0)$，$t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 的这种变分 h：$[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$. 因此，对应的 Jacobi 场满足条件 $J(0)=0$(见图 5-15).

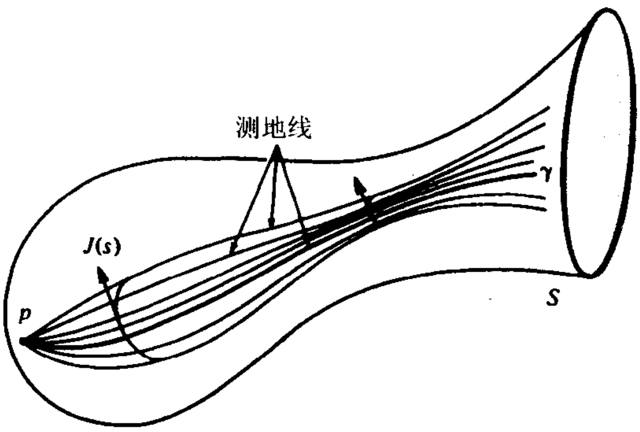


图 5-15

在给出一个非平凡的 Jacobi 场例子以前，我们来证明，这种场可用解析条件来描述.

命题 1 设 $J(s)$是沿 γ：$[0, l]\to S$，$s\in[0, l]$的 Jacobi 场．则 J 满足所谓的 Jacobi 方程

$$\frac{D}{ds}\frac{D}{ds}J(s)+K(s)(\gamma'(s)\wedge J(s))\wedge\gamma'(s)=0 \tag{1}$$

这里的 $K(s)$是 S 在 $\gamma(s)$处的 Gauss 曲率.

证明 根据 $J(s)$的定义，存在 γ 的变分

$$h:[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$$

使得$(\partial h/\partial t)(s, 0)=J(s)$，且 $h_t(s)$对一切 $t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$都是测地线. 由此可知$(D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s, t)=0$. 所以，

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)=0,\quad (s,t)\in[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$$

另一方面，利用 5.4 的引理 6，我们有

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}$$
$$+K(s,t)\left(\frac{\partial h}{\partial s}\wedge\frac{\partial h}{\partial t}\right)\wedge\frac{\partial h}{\partial s}=0$$

由于$(D/\partial t)(\partial h/\partial s)=(D/\partial s)(\partial h/\partial t)$，对 $t=0$，我们就得出

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}J(s)+K(s)(\gamma'(s)\wedge J(s))\wedge\gamma'(s)=0$$

证毕.

为了能从命题 1 推出一些结果，先把 Jacobi 方程(1)写成更熟悉的形式. 为此，设 $e_1(0)$和 $e_2(0)$是切平面 $T_{\gamma(0)}(S)$中的单位正交向量，并设 $e_1(s)$和 $e_2(s)$分别是 $e_1(0)$和 $e_2(0)$沿 $\gamma(s)$的平行移动.

假定
$$J(s)=a_1(s)e_1(s)+a_2(s)e_2(s)$$
这里的 $a_1(s)$，$a_2(s)$是某些函数. 这时，利用上节的引理 2，并为简化记号略去 s，我们得到

$$\frac{D}{\partial s}J=a'_1e_1+a'_2e_2$$

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}J = a''_1 e_1 + a''_2 e_2$$

另一方面，如果我们记

$$(\gamma' \wedge J) \wedge \gamma' = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

就有

$$\begin{aligned}\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 &= (\gamma' \wedge (a_1 e_1 + a_2 e_2)) \wedge \gamma' \\ &= a_1(\gamma' \wedge e_1) \wedge \gamma' + a_2(\gamma' \wedge e_2) \wedge \gamma'\end{aligned}$$

所以，若令$\langle(\gamma'\wedge e_i)\wedge\gamma', e_j\rangle = \alpha_{ij}$，$i, j=1, 2$，我们得到

$$\lambda_1 = a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21}, \quad \lambda_2 = a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22}$$

由此可知，方程(1)可写作

$$\begin{aligned}a''_1 + K(\alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2) = 0 \\ a''_2 + K(\alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2) = 0\end{aligned} \tag{1a}$$

式中出现的一切元素都是s的函数．注意，(1a)是线性二阶微分方程组．这种方程组的解$(a_1(s), a_2(s))=J(s)$，对所有的$s\in[0, l]$均有定义，并构成一个向量空间．而且，(1a)(或(1))的解$J(s)$完全由初始条件$J(0)$，$(DJ/\partial s)(0)$决定，因而解空间的维数是$2\times2=4$.

我们能证明：沿测地线γ：$[0, l]\to S$满足方程(1)的每一个向量场$J(s)$，事实上是Jacobi场．由于我们仅对满足条件$J(0)=0$的Jacobi场感兴趣，所以我们将仅对这一特殊情形来证明该命题.

我们将采用下面的记法．设$T_p(S)$，$p\in S$是S在p点的切平面，用$(T_p(S))_v$表示看作$\mathbb{R}^3$中一张曲面的$T_p(S)$在v处的切空间．因为$\exp_p$：$T_p(S)\to S$，所以

$$d(\exp_p)_v:(T_p(S))_v \to T_{\exp_p(v)}(S)$$

我们还频繁地使用有些混淆的如下记法：若v，$w\in T_p(S)$，则w还表示由w出发，经平移向量v后所得的$(T_p(S))_v$中的向量(见图5-16)．这也等价于用平移向量v的方法，把空间$T_p(S)$与$(T_p(S))_v$相重合.

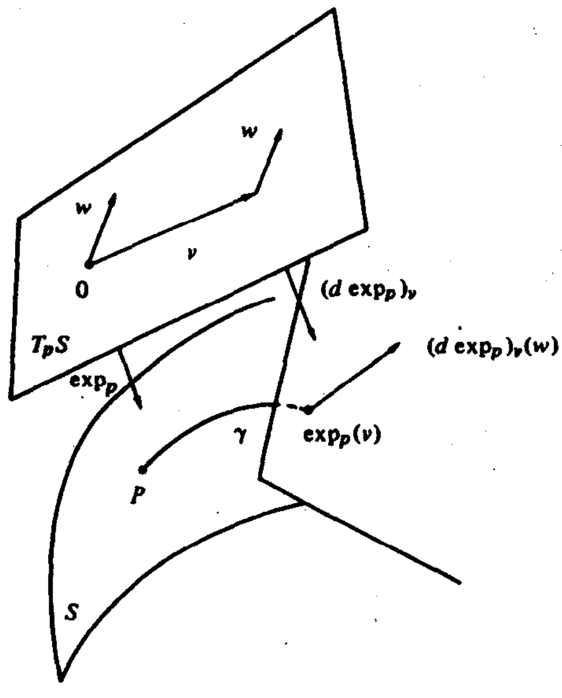


图 5-16

引理1 设$p\in S$，取v，$w\in T_p(S)$，使$|v|=1$．设γ：$[0, l]\to S$是S上由下式给出的测地线

$$\gamma(s) = \exp_p(sv), \quad s\in[0,l]$$

那么，由$J(s)=s(d\exp_p)_{sv}(w)$，$s\in[0, l]$给出的沿γ的向量场$J(s)$是Jacobi场．而且，$J(0)=0$，$(DJ/ds)(0)=w$.

证明 设$t\to v(t)$，$t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$是$T_p(S)$中满足$v(0)=v$，$(dv/dt)(0)=w$的参数曲线．(注意，如上所述，我们已在混淆含意不同的记号了.)定义(见图5-17)

$$h(s,t) = \exp_p(sv(t)), \quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon), \quad s\in[0,l]$$

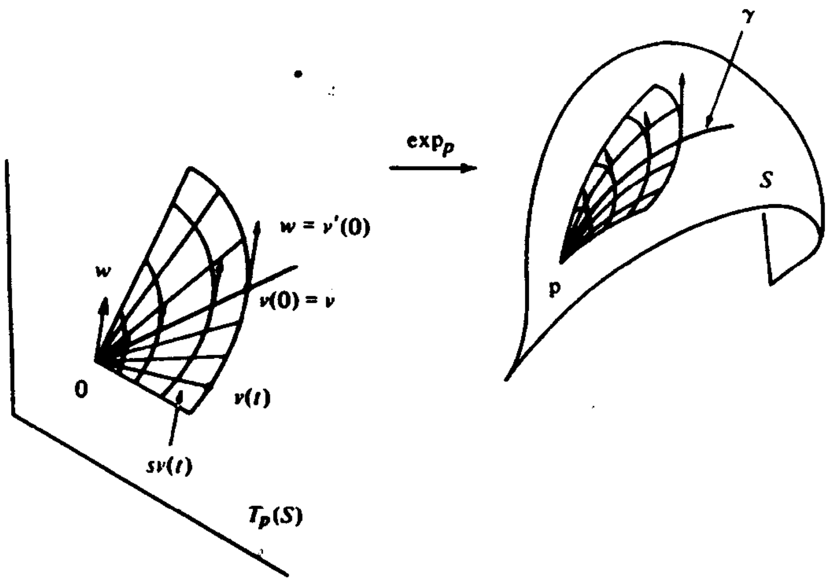


图 5-17

映照 h 显然是可微的，并且，曲线 $s\to h_t(s)=h(s, t)$ 全是测地线 $s\to \exp_p(sv(t))$. 因此，h 的变分向量场是沿 γ 的 Jacobi 场.

为了计算变分向量场$(\partial h/\partial t)(s, 0)$，我们看到，$T_p(S)$中的曲线 $s=s_0$，$t=t$ 由 $t\to s_0v(t)$给出，并且这条曲线在 $t=0$ 点的切向量是

$$s_0\frac{dv}{dt}(0)=s_0w$$

由此可知，$\frac{\partial h}{\partial t}(s, 0)=(d\exp_p)_{sv}(sw)=s(d\exp_p)_{sv}(w)$

因此，向量场 $J(s)=s(d\exp_p)_{sv}(w)$是 Jacobi 场. $J(0)=0$ 是立即可得的. 为了验证这引理的最后一个结论，我们来计算上式的协变导数(参见 5.4，引理 2)，得到

$$\frac{D}{\partial s}s(d\exp_p)_{sv}(w)=(d\exp_p)_{sv}(w)+s\frac{D}{\partial s}(d\exp_p)_{sv}(w)$$

因而，在 $s=0$ 时

$$\frac{DJ}{\partial s}(0)=(d\exp_p)_0(w)=w$$

证毕.

命题 2 设 $J(s)$是沿 γ: $[0, l]\to S$, $s\in[0, l]$的可微向量场，它满足 Jacobi 方程(1)，且 $J(0)=0$，则 $J(s)$是沿 γ 的 Jacobi 场.

证明 设 $w=(DJ/ds)(0)$，且 $v=\gamma'(0)$. 根据引理 1，存在 Jacobi 场 $s(d\exp_p)_{sv}(w)=\bar{J}(s)$，$s\in[0, l]$，它满足

$$\bar{J}(0)=0, \quad \left(\frac{D\bar{J}}{ds}\right)(0)=w$$

这时，J 与 $\bar{J}$ 就是满足方程组(1)，且满足同样初始条件的两个向量场. 根据唯一性，$J(s)=$

$\bar{J}(s)$，$s\in[0, l]$；因此，J 是 Jacobi 场．证毕．

现在，我们已能给出非平凡的 Jacobi 场的例子．

例 设 $S^2=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$ 是单位球面，$X(\theta, \varphi)$是在点 $p\in S$ 附近，由余纬度 θ 和经度 φ 给出的参数表示(见 2.2，例 1)．考察在平行环 $\theta=\pi/2$ 上，$\varphi_0=\pi/2$ 和$\varphi_1=3\pi/2$ 之间的一段弧．这段弧是测地线 γ，我们假定以 $\varphi-\varphi_0=s$ 为参数把它表示出来．设 $w(s)$是满足 $|w(0)|=1$ 和$\langle w(0), \gamma'(0)\rangle=0$ 的向量 $w(0)\in T_{\gamma(0)}(S)$，沿 γ 的平行移动．我们来证明：向量场(见图 5-18)

$$J(t) = (\sin s)w(s),\quad s\in[0,\pi]$$

是沿 γ 的 Jacobi 场．

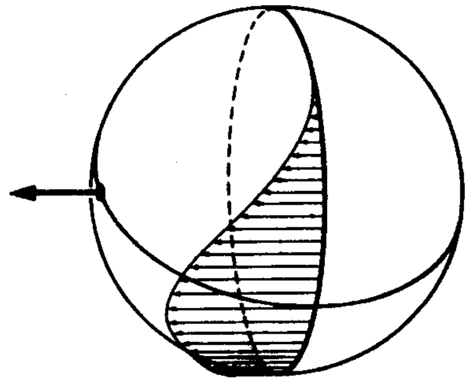


图 5-18 球面上的 Jacobi 场

事实上，因为 $J(0)=0$，所以只要验证 J 满足方程(1)．利用 $K=1$ 和 ω 是平行向量场的事实，我们相继得到

$$\frac{DJ}{ds}=(\cos s)w(s)$$

$$\frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds}=(-\sin s)w(s)$$

$$\frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds}+K(\gamma'\wedge J)\wedge\gamma'=(-\sin s)w(s)+(\sin s)w(s)=0$$

这就说明 J 是 Jacobi 场．注意，这时还有 $J(\pi)=0$．

定义 2 设 γ：$[0, l]\to S$ 是 S 上满足 $\gamma(0)=p$ 的测地线．设点 $q=\gamma(s_0)$，$s_0\in[0, l]$．如果存在不恒等于零的沿 γ 的 Jacobi 场 $J(s)$，使得 $J(0)=J(s_0)=0$，就称点 q 关于测地线 γ 与 p 共轭．

在上例中我们已看到，给出单位球面 S^2 上的一点 $p\in S^2$，它的对径点沿从 p 出发的任何测地线，都是与 p 共轭的．但是，球面的例子并不具有典型性．一般说来，在曲面 S 上给定一点 p，它的“第一个”共轭点 q，是随经过 p 的测地线的方向改变而变化的，因而描出一条参数曲线．这种曲线的轨迹，称作 p 的共轭轨迹，并记作 $C(p)$．

图 5-19 以椭球面为例说明了这种情况，它具有典型意义．由 p 出发的这些测地线是以如下的方式与 $C(p)$相切的：当 γ 邻近的测地线 $\bar{\gamma}$ 趋近于 γ 时，$\bar{\gamma}$ 与 γ 的交点就趋近于 p 关于 γ 的共轭点 q．这一情形用经典的术语曾表示为：共轭点是两条“无限接近的”测地线的交点．

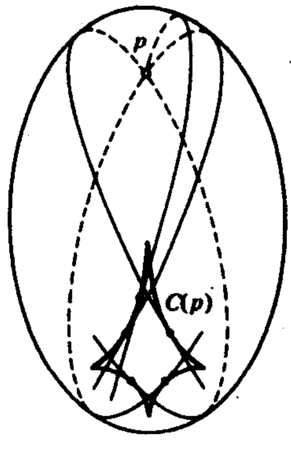


图 5-19 椭球面的共轭轨迹

注 1 在球面 S^2 中，每一点 $p\in S^2$ 的共轭轨迹退化为单独一点(p 的对径点)，这个事实是例外情况．实际上可以证明，球面是仅有的这种曲面(参见 L. Green，“Aufwiedersehenfläche.”Ann. Math. 78(1963)，289～300)．

注 2 一般椭球面的共轭轨迹，已由 A. Braunmühl 确定，"Geodätisohe Linien auf dreiachsigen Flächen zweiten Grades," Math. Ann. 20 (1882), 557 ~ 586. 也可比较 H. Mangoldt, "Geodätische Linien auf positiv gekrümmten Flächen," Crelles Journ. 91 (1881), 23~52.

沿 γ: $[0, l]\to S$ 的 Jacobi 场 J 有一个有用的性质：当 $J(0)=J(l)=0$ 时，对一切 $s\in[0, l]$有

$$\langle J(s), \gamma'(s)\rangle = 0$$

事实上，这是下列 Jacobi 场性质的推论.

命题 3 设 $J_1(s)$和 $J_2(s)$是沿 γ: $[0, l]\to S$, $s\in[0, l]$的 Jacobi 场. 则

$$\left\langle \frac{DJ_1}{ds}, J_2(s)\right\rangle - \left\langle J_1(s), \frac{DJ_2}{ds}\right\rangle = \text{常数}$$

证明 只要对所述等式的左端微分，并利用命题 1(为方便起见，已略去 s)：

$$\frac{d}{ds}\left\{\left\langle \frac{DJ_1}{ds}, J_2\right\rangle - \left\langle J_1, \frac{DJ_2}{ds}\right\rangle\right\}$$

$$= \left\langle \frac{D}{ds}\frac{DJ_1}{ds}, J_2\right\rangle - \left\langle J_1, \frac{D}{ds}\frac{DJ_2}{ds}\right\rangle$$

$$+ \left\langle \frac{DJ_1}{ds}, \frac{DJ_2}{ds}\right\rangle - \left\langle \frac{DJ_1}{ds}, \frac{DJ_2}{ds}\right\rangle$$

$$= -K\{\langle(\gamma'\wedge J_1)\wedge\gamma', J_2\rangle - \langle(\gamma'\wedge J_2)\wedge\gamma', J_1\rangle\} = 0$$

证毕.

命题 4 设沿 γ: $[0, l]\to S$ 的 Jacobi 场 $J(s)$满足

$$\langle J(s_1), \gamma'(s_1)\rangle = \langle J(s_2), \gamma'(s_2)\rangle = 0, \quad s_1, s_2 \in [0, l], \quad s_1 \neq s_2$$

则对一切 $s\in[0, l]$，都有

$$\langle J(s), \gamma'(s)\rangle = 0$$

证明 在上一命题中，取 $J_1(s)=J(s)$, $J_2(s)=\gamma'(s)$(它也是 Jacobi 场)，我们得到

$$\left\langle \frac{DJ}{ds}, \gamma'(s)\right\rangle = \text{常数} = A$$

因此，

$$\frac{d}{ds}\langle J(s), \gamma'(s)\rangle = \left\langle \frac{DJ}{ds}, \gamma'(s)\right\rangle = A$$

所以

$$\langle J(s), \gamma'(s)\rangle = As + B$$

这里的 B 是常数. 因为线性表达式 $As+B$ 对 s_1, $s_2\in[0, l]$, $s_1\neq s_2$ 是零，所以它就恒等于零.

推论 设 $J(s)$是沿 γ: $[0, l]\to S$ 的 Jacobi 场，满足条件 $J(0)=J(l)=0$. 则$\langle J(s), \gamma'(s)\rangle=0$, $s\in[0, l]$.

现在，我们来说明，共轭点可用指数映照的行为来描述. 回忆一下，当 φ: $S_1\to S_2$ 是正则曲面 S_1 到正则曲面 S_2 的可微映照时，点 $p\in S_1$ 称作 φ 的临界点，如果线性映照

$$d\varphi_p: T_p(S_1) \to T_{\varphi(p)}(S_2)$$

是奇异的，也就是，存在 $v\in T_p(S_1)$, $v\neq 0$, 使得 $d\varphi_p(v)=0$.

命题 5 设 p，$q\in S$ 是 S 上的两点，并设 γ：$[0, l]\to S$ 是连接 $p=\gamma(0)$，$q=\exp_p(l\gamma'(0))$ 的测地线. 则 q 为 p 关于 γ 的共轭点的充要条件是 $v=l\gamma'(0)$ 为 $\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 的临界点.

证明 在引理 1 中已看到，对每个 $w\in T_p(S)$（已将它与 $(T_p(S))_v$ 相重合），有沿 γ 的 Jacobi 场 $J(s)$，它满足

$$J(0)=0$$

$$\frac{DJ}{ds}(0)=w$$

并且

$$J(l)=l\{(d\exp_p)_v(w)\}$$

若 $v\in T_p(S)$ 是 $\exp_p$ 的临界点，就存在 $w\in(T_p(S))_v$，$w\neq 0$，使得 $(d\exp_p)_v(w)=0$. 这蕴涵上面的向量场 $J(s)$ 不恒等于零，并满足 $J(0)=J(l)=0$；也就是说，$\gamma(l)$ 关于 γ 与 $\gamma(0)$ 共轭.

反过来，若 $q=\gamma(l)$ 关于 γ 与 $p=\gamma(0)$ 共轭，就存在满足 $\bar{J}(0)=\bar{J}(l)=0$，且不恒等于零的 Jacobi 场 $\bar{J}(s)$. 记 $(D\bar{J}/ds)(0)=w\neq 0$. 如上，用 w 构造一个 Jacobi 场 $J(s)$，根据唯一性，我们就有 $\bar{J}(s)=J(s)$. 由于

$$J(l)=l\{(d\exp_p)_v(w)\}=\bar{J}(l)=0$$

我们就有 $(d\exp_p)_v(w)=0$，$w\neq 0$ 的结论. 所以 v 是 $\exp_p$ 的临界点. 证毕.

Jacobi 场的方程(1)含有 S 的 Gauss 曲率 K 这件事说明，由点 $p\in S$ 出发的测地线的“散布”情况，与 S 上的曲率分布是紧密相关的(参见 4.6，注 2). 大家知道，由点 $p\in S$ 出发的两条相邻的测地线，最初是相分离的. 在球面或椭球面的情形($K>\delta>0$)，它们又相互接近，并分别与共轭轨迹 $C(p)$ 相切. 在平面的情形，它们就再也不靠近. 下面的定理说明，平面情形的“无穷小说法”，在负曲率或零曲率曲面上，同样要发生(见本定理证明后面的注 3).

定理 假定曲面 S 的 Gauss 曲率 K 满足条件 $K\leqslant 0$. 则对每一点 $p\in S$，p 的共轭轨迹是空集. 简言之，曲率 $K\leqslant 0$ 的曲面没有共轭点.

证明 设 $p\in S$，且设 γ：$[0, l]\to S$ 是 S 中满足 $\gamma(0)=p$ 的测地线. 假定有满足 $J(0)=J(l)=0$，且不恒等于零的 Jacobi 场 $J(s)$，我们将证明这会导出矛盾.

事实上，因为 $J(s)$ 是 Jacobi 场，且 $J(0)=J(l)=0$，根据命题 4 的推论，我们就有 $\langle J(s), \gamma'(s)\rangle=0$，$s\in[0, l]$. 所以，

$$\frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds}+KJ=0$$

$$\left\langle\frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds}, J\right\rangle=-K\langle J, J\rangle\geqslant 0$$

最后一式是由于 $K\leqslant 0$.

由此可知

$$\frac{d}{ds}\left\langle\frac{DJ}{ds}, J\right\rangle=\left\langle\frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds}, J\right\rangle+\left\langle\frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle\geqslant 0$$

所以，函数$\langle DJ/ds, J\rangle$在区间$[0, l]$上不递减. 但因为这函数在 $s=0$ 和 $s=l$ 时为零，所以我们推得

$$\left\langle \frac{DJ}{ds}, J(s)\right\rangle=0, \quad s\in[0, l]$$

最后，注意到

$$\frac{d}{ds}\langle J, J\rangle=2\left\langle \frac{DJ}{ds}, J\right\rangle=0$$

我们就有$|J|^2=$常数. 由于$J(0)=0$，所以$|J(s)|=0$对一切$s\in[0, l]$成立；也就是说，J在$[0, l]$中恒等于零. 这是一个矛盾.

证毕.

注 3 这条定理并没有说从已知点出发的两条测地线一定不再相交. 实际上，这是不对的，这可用曲率为零的柱面上的闭测地线来说明. 即使我们只考虑从已知点沿“邻近方向”出发的测地线，这种说法仍然不成立. 这只要考察柱面的一条子午线就足够了，我们看到，其方向与该子午线的方向邻近的那些螺旋线，与这条子午线是重新相交的. 命题所叙述的是这么一回事：当两条“邻近的”测地线相互趋近时，它们的交点趋于“无穷远处”(柱面上发生的正是这种情况). 利用经典的术语，我们可以说：两条“无限接近的”测地线决不再相交. 就这种意义上说，本定理是平面上情况的无穷小说法.

下面的推论是命题 5，上面的定理以及反函数定理的直接结果.

推论 假定 S 的 Gauss 曲率 $K\leqslant 0$. 则对每一点 $p\in S$，映照

$$\exp_p: T_p(S)\to S$$

是局部微分同胚.

以后我们要用到下面的引理，它推广了如下的事实：在 p 点的法邻域中，测地圆与径向测地线正交(见 4.6 的命题 3 和注 1)

引理 2(Gauss) 设 $p\in S$ 是(完备)曲面 S 上的一点，并设 $u\in T_p(S)$，$w\in (T_p(S))_u$，那么

$$\langle u,w\rangle = \langle (d\exp_p)_u(u),(d\exp_p)_u(w)\rangle$$

这里，我们已利用了重合 $T_p(S)\approx(T_p(S))_u$.

证明 设 $l=|u|$，$v=u/|u|$，并设 γ: $[0, l]\to S$ 是 S 上由

$$\gamma(s) = \exp_p(sv), \quad s\in[0,l]$$

给出的测地线. 这时，$\gamma'(0)=v$. 而且，如果考虑 $T_p(S)$中的曲线 $s\to sv$，它在 $s=l$ 时经过 u，并以 v 为切向量(见图 5-20)，我们得到

$$\gamma'(l) = \frac{d}{ds}(\exp_p sv)\Big|_{s=l} = (d\exp_p)_u(v)$$

现在考虑由 $J(0)=0$，$(DJ/ds)(0)=w$ 给出的沿 γ 的 Jacobi 场 J(参见引理 1). 这时，由于 $\gamma(s)$为测地线，

$$\frac{d}{ds}\langle \gamma'(s), J(s)\rangle=\left\langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds}\right\rangle$$

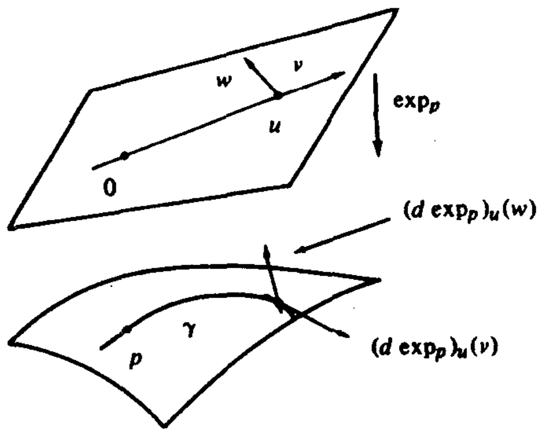


图 5-20

并且，因为 J 是 Jacobi 场，所以

$$\frac{d}{ds}\left\langle \gamma'(s),\ \frac{DJ}{ds}\right\rangle=\left\langle \gamma'(s),\ \frac{D^2J}{ds^2}\right\rangle=0$$

由此可知，

$$\frac{d}{ds}\langle\gamma'(s),\ J(s)\rangle=\left\langle \gamma'(s),\ \frac{DJ}{ds}\right\rangle=\text{常数}=C; \tag{2}$$

因此(由于 $J(0)=0$)，

$$\langle\gamma'(s),J(s)\rangle = Cs \tag{3}$$

为了确定常数 C，在等式(3)中令 s 等于 l. 根据引理 1.

$$J(l) = l(d\exp_p)_u(w)$$

所以，

$$Cl=\langle\gamma'(l),\ J(l)\rangle=\langle(d\exp_p)_u(v),\ l(d\exp_p)_u(w)\rangle$$

由等式(2)，我们得到

$$\left\langle \gamma'(l),\ \frac{DJ}{ds}(l)\right\rangle=C=\left\langle \gamma'(0),\ \frac{DJ}{ds}(0)\right\rangle=\langle v,\ w\rangle$$

利用所得的 C 值，从上面的表达式可得

$$\langle u,w\rangle = \langle(d\exp_p)_u(u),(d\exp_p)_u(w)\rangle$$

证毕.

习题

1. a. 设 γ: $[0,\ l]\to S$ 是曲面 S 上以弧长为参数的测地线，并设 $J(s)$是沿 γ 的 Jacobi 场，满足 $J(0)=0$，$\langle J'(0),\ \gamma'(0)\rangle=0$. 证明$\langle J(s),\ \gamma'(s)\rangle=0$ 对一切 $s\in[0,\ l]$成立.

b. 进一步假定 $|J'(0)|=1$. 把 $e_1(0)=\gamma'(0)$和 $e_2(0)=J'(0)$沿 γ 作平行移动，从而得到所有 $T_{\gamma(s)}(S)$，$s\in[0,\ l]$上的标准正交基$\{e_1(s),\ e_2(s)\}$. 根据 a，存在函数 $u=u(s)$，使 $J(s)=u(s)e_2(s)$. 证明：J 的 Jacobi 方程可写作

$$u''(s)+K(s)u(s)=0$$

初始条件是 $u(0)=0$，$u'(0)=1$.

2. 证明：抛物面 $z=x^2+y^2$ 上的点 $p=(0,0,0)$，没有关于满足 $\gamma(0)=p$ 的测地线 $\gamma(s)$ 的共轭点.

3.(**比较定理**)设 S 与 $\tilde{S}$ 是完备曲面. 设 $p\in S$，$\tilde{p}\in\tilde{S}$，并选取线性等距对应 i：$T_p(S)\to T_{\tilde{p}}(\tilde{S})$. 设 γ：$[0,\infty)\to S$ 是 S 上满足 $\gamma(0)=p$，$|\gamma'(0)|=1$ 的测地线，并设 $J(s)$是沿 γ 的 Jacobi 场，满足 $J(0)=0$，$\langle J'(0),\gamma'(0)\rangle=0$，$|J'(0)|=1$. 利用线性等距对应 i，作满足 $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{p}$，$\tilde{\gamma}'(0)=i(\gamma'(0))$的测地线 $\tilde{\gamma}$：$[0,\infty)\to\tilde{S}$，和满足 $\tilde{J}(0)=0$，$\tilde{J}'(0)=i(J'(0))$的沿 $\tilde{\gamma}$ 的 Jacobi 场 $\tilde{J}$(图 5-21). 下面我们要叙述两条定理(本质上说，它们是经典的 Sturn 比较定理的几何解释)，有了这两条定理，我们能从对 S 和 $\tilde{S}$ 的曲率“比较的假定条件”出发，对 Jacobi 场 J 和 $\tilde{J}$ 进行比较.

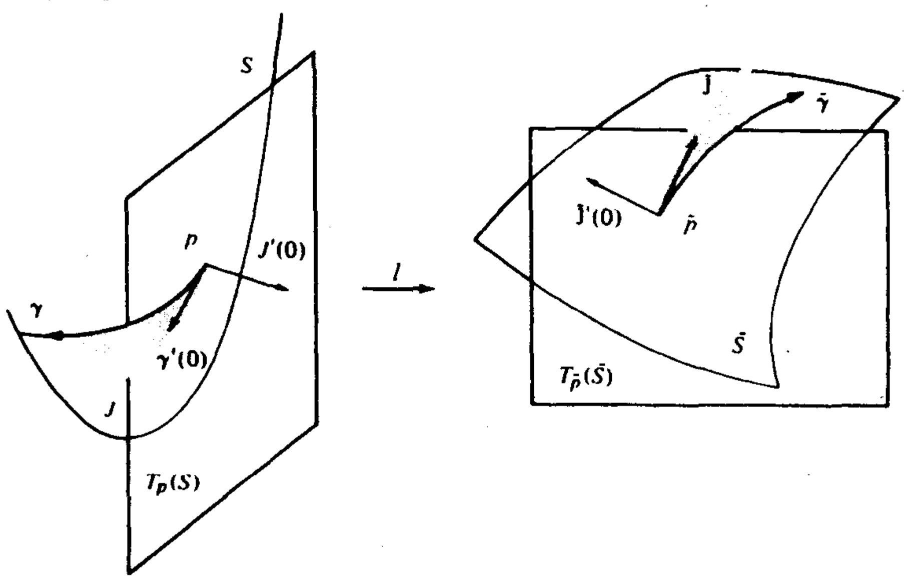


图 5-21

a. 利用习题 1 证明：$J(s)=v(s)e_2(s)$，$\tilde{J}(s)=u(s)\tilde{e}_2(s)$，这里的 $u=u(s)$，$v=v(s)$是可微函数，并且 $e_2(s)$(或 $\tilde{e}_2(s)$)是 $J'(0)$(或 $\tilde{J}'(0)$)沿 γ(或 $\tilde{\gamma}$)的平行移动. 证明：J 和 $\tilde{J}$ 的 Jacobi 方程分别是

$$v''(s)+K(s)v(s)=0,\quad v(0)=0,\quad v'(0)=1$$
$$u''(s)+\tilde{K}(s)u(s)=0,\quad u(0)=0,\quad u'(0)=1$$

式中的 K 和 $\tilde{K}$ 表示 S 和 $\tilde{S}$ 的 Gauss 曲率

*b. 假定 $K(s)\leqslant\tilde{K}(s)$，$s\in[0,\infty)$. 证明：

$$0=\int_0^s\{u(v''+Kv)-v(u''+\tilde{K}v)\}ds$$

$$=[uv'-vu']_0^s+\int_0^s(K-\tilde{K})uvds \qquad (*)$$

推出如下结论：如果 a 是 u 在$(0,\infty)$中的第一个零点(即 $u(a)=0$，而在$(0,a)$中 $u(s)>0$)，b 是 v 在$(0,\infty)$中的第一个零点，则 $b\geqslant a$. 于是，若对一切 s，$K(s)\leqslant\tilde{K}(s)$，那么，$p$

关于γ的第一个共轭点，不会早于$\tilde{p}$关于$\tilde{\gamma}$的第一个共轭点而出现. 这叫第一比较定理.

*c. 假定$K(s)\leqslant\widetilde{K}(s)$，$s\in[0, a)$. 利用(*)或和$u$，$v$在$(0, a)$中为正的事实推出$[uv'-vu']_0^s\geqslant 0$. 利用这个不等式证明：$v(s)\geqslant u(s)$对一切$s\in(0, a)$成立. 从而，若对$\tilde{\gamma}$的第一个共轭点以前的一切$s$，有$K(s)\leqslant\widetilde{K}(s)$，则对所有这种$s$，成立$|J(s)|\geqslant|\tilde{J}(s)|$. 这叫第二比较定理(当然，它以第一比较定理作为特例；我们把第一种情形分离出来，是因为它比较容易，而且也因为它是我们用得更多的一个).

d. 证明：c中的等式$v(s)=u(s)$对一切$s\in[0, a)$成立的充要条件是$K(s)=\widetilde{K}(s)$，$s\in[0, a)$.

4. 设S是Gauss曲率$K\leqslant K_0$的完备曲面，这里的K_0是个正常数. 把S与曲率是K_0的球面$S^2(K_0)$作比较(也就是，令习题3中的$\widetilde{S}=S^2(K_0)$，并利用习题3，b中的第一比较定理)，推出：S上的任何测地线γ：$[0, \infty)\to S$，在区间$(0, \pi/\sqrt{K_0})$中没有点与$\gamma(0)$共轭.

5. 设完备曲面S的Gauss曲率K满足$K\geqslant K_1>0$，这里的K_1是常数. 证明：每一条测地线γ：$[0, \infty)\to S$在区间$(0, \pi/\sqrt{K_1}]$中有点与$\gamma(0)$共轭.

*6. (Sturm振荡定理.)第一比较定理(习题3，b)的下列细小的推广，时常是有用的. 设S是完备曲面，γ：$[0, \infty)\to S$是S中的测地线. 设$J(s)$是满足$J(0)=J(s_0)=0$，$s_0\in(0, \infty)$和$J(s)\neq 0$，$s\in(0, s_0)$的沿γ的Jacobi场. 从而，$J(s)$是法向量场(命题4的推论). 因此可得$J(s)=v(s)e_2(s)$，这里的$v(s)$是

$$v''(s)+K(s)v(s)=0,\quad s\in[0,\infty)$$

的解，而$e_2(s)$是$T_{\gamma(0)}(S)$中与$\gamma'(0)$正交的单位向量的平行移动. 假定S的Gauss曲率$K(s)$满足$K(s)\leqslant L(s)$，其中，L是$[0, \infty)$上的可微函数. 证明：方程

$$u''(s)+L(s)u(s)=0,\quad s\in[0,\infty)$$

的任何解，在区间$[0, s_0)$中有零点(即存在$s_1\in(0, s_0]$，使得$u(s_1)=0$).

7. (共轭点的Kneser判别准则)设S是完备曲面，并设γ：$[0, \infty)\to S$是S上满足$\gamma(0)=p$的测地线. 设$K(s)$是S沿γ的Gauss曲率. 假定积分

$$\int_t^\infty K(s)ds\leqslant\frac{1}{4(t+1)}\quad 对一切\ t\geqslant 0 \qquad (*)$$

收敛，并有所指出的界.

a. 定义

$$w(t)=\int_t^\infty K(s)ds+\frac{1}{4(t+1)},\quad t\geqslant 0$$

并证明：

$$w'(t)+(w(t))^2\leqslant -K(t)$$

b. 对$t\geqslant 0$，令$w'(t)+(w(t))^2=-L(t)$(所以$L(t)\leqslant K(t)$)并定义

$$v(t)=\exp\left(\int_0^t w(s)ds\right),\quad t\geqslant 0$$

证明：

$$v''(t)+L(t)v(t)=0,\quad v(0)=1,\quad v'(0)=0$$

c. 注意到$v(t)>0$，并利用Sturm振荡定理(习题6)证明：不存在满足$J(0)=0$，且$J(s_0)=0$，$s_0\in(0, \infty)$的沿$\gamma(s)$的Jacobi场$J(s)$. 从而，如果(*)式成立，沿γ就没有点与

p 共轭.

*8. 设 γ: $[0, l] \to S$ 是完备曲面 S 上的测地线，并假定 $\gamma(l)$ 与 $\gamma(0)$ 不共轭. 设 $w_0 \in T_{\gamma(0)}(S)$, $w_1 \in T_{\gamma(l)}(S)$. 证明：存在唯一的沿 γ 的 Jacobi 场 $J(s)$，使得 $J(0)=w_0$，$J(l)=w_1$.

9. 设 $J(s)$ 是沿测地线 γ: $[0, l] \to S$ 的 Jacobi 场，使得 $\langle J(0), \gamma'(0)\rangle=0$，且 $J'(0)=0$. 证明：$\langle J(s), \gamma'(s)\rangle=0$ 对一切 $s\in[0, l]$ 成立.

5.6 覆盖空间；Hadamard 定理

在前面一节里，我们看到：如果一个完备曲面 S 的曲率 K 满足条件 $K\leqslant 0$，那么映照 $\exp_p$: $T_p(S)\to S$, $p\in S$，是一个局部微分同胚. 自然地要问何时这个局部微分同胚是一个整体微分同胚.

把这一问题置于更一般的背景之中来提将是适宜的，这需要覆盖空间的概念.

A. 覆盖空间

定义 1 设 $\tilde{B}$ 和 B 是 $\mathbb{R}^3$ 的子集. 我们称 π: $\tilde{B}\to B$ 为*覆盖映照*，如果

1. π 是连续映照且 $\pi(\tilde{B})=B$;
2. 每一点 $p\in B$ 有 B 中的一个邻域 U(称为 p 的*特定邻域*)，使得

$$\pi^{-1}(U)=\bigcup_\alpha V_\alpha$$

其中 V_α 是两两不相交的开集，而 π 在每一 V_α 上的限制是 V_α 到 U 上的同胚.

这时，$\tilde{B}$ 称为 B 的*覆盖空间*.

例 1 设 $P\subset\mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一张平面. 取定一点 $q_0\in P$ 以及以 q_0 为起点的两个正交单位向量 e_1, $e_2\in P$，于是每一点 $q\in P$ 可以用由

$$q-q_0=ue_1+ve_2$$

决定的坐标刻划：$(u, v)=q$. 现在设 $S=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2=1\}$ 是以 z 轴为轴的直圆柱面，π: $P\to S$ 是如下定义的映照

$$\pi(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$$

(这个映照的几何意义是把平面 P 无限多次地包绕在柱面 S 上；见图 5-22).

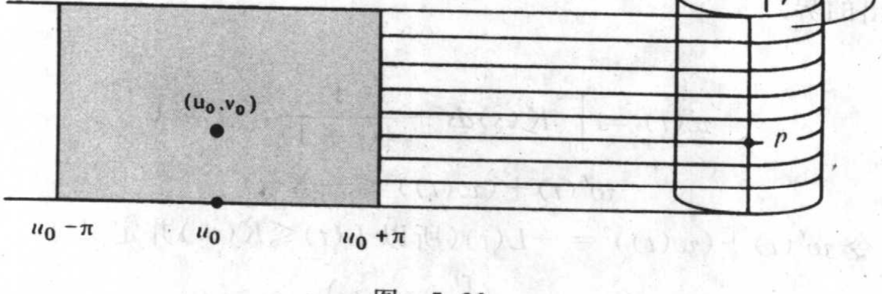


图 5-22

我们将证明 π 是覆盖映照. 我们首先观察到：当 $(u_0, v_0)\in P$ 时，限制于带形

$$R=\{(u,v)\in P; u_0-\pi\leqslant u\leqslant u_0+\pi\}$$

的映照 π 完全覆盖 S. 实际上，π 限制于 R 的内部是 S 的一个参数表示，它的坐标邻域覆盖去掉一条母线的 S. 由此导出 π 是连续的(实际上是可微的)映照，而且 $\pi(P)=S$，于是证实了条件 1.

为了证实条件 2，设 $p\in S$，$U=S-r$，这里 r 是在通过 p 的母线对面的母线. 我们将证明 U 是 p 的特定邻域.

设 $(u_0, v_0)\in P$ 使得 $\pi(u_0, v_0)=p$，取带形 V_n 为

$$V_n=\{(u,v)\in P; u_0+(2n-1)\pi<u<u_0+(2n+1)\pi\}$$
$$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

可直接证明，若 $n\neq m$，则 $V_n\cap V_m=\varnothing$ 以及 $\bigcup\limits_n V_n=\pi^{-1}(U)$. 而且，由最初的观察还可知道，限制于任何一个 V_n 上的 π 是到 U 上的同胚. 因此 U 是 p 的一个特定邻域. 这就证明了条件 2，因而平面 P 是柱面 S 的一个覆盖空间.

例 2 设 H 是螺旋线

$$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x=\cos t, y=\sin t, z=bt, t\in\mathbb{R}\}$$

并设

$$S^1=\{(x, y, 0)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2=1\}$$

是单位圆. π: $H\to S^1$ 如下定义

$$\pi(x,y,z)=(x,y,0)$$

我们来证明 π 是覆盖映照(见图 5-23).

显然 π 是连续的且 $\pi(H)=S^1$. 这证实条件 1.

为证实条件 2，设 $p\in S^1$. 我们将证明 $U=S^1-\{q\}$，这里 $q\in S^1$ 是 p 的对称点，是 p 的一个特定邻域. 事实上，设 $t_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$\pi(\cos t_0,\sin t_0,bt_0)=p$$

我们取螺旋线上对应于区间

$$(t_0+(2n-1)\pi, t_0+(2n+1)\pi)\subset\mathbb{R},\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

的弧为 V_n，于是容易证明 $\pi^{-1}(U)=\bigcup_n V_n$，而且这些 V_n 是两两不相交的，π 限制于 V_n 是到 U 上的同胚. 这证实了条件 2，从而断定本例正确.

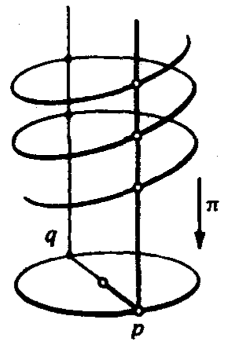


图 5-23

现在设 π: $\tilde{B}\to B$ 是一个覆盖映照，由于 $\pi(\tilde{B})=B$，对每一点 $\tilde{p}\in\tilde{B}$，总有某个 $p\in B$ 使得 $\tilde{p}\in\pi^{-1}(p)$. 于是，存在 $\tilde{p}$ 的一个邻域 V_α，使得 π 限制于 V_α 是一个同胚. 由此可知 π 是一个局部同胚. 然而下面的例子说明，存在不是覆盖映照的局部同胚.

在举出这种例子之前应该注意到，若 U 是 p 的一个特定邻域，那么 p 的任一满足 $\bar{U}\subset U$ 的邻域 $\bar{U}$ 也是 p 的一个特定邻域. 因为 $\pi^{-1}(\bar{U})\subset\bigcup_\alpha V_\alpha$，而 V_α 是两两不相交的，我们有

$$\pi^{-1}(\bar{U})=\bigcup_\alpha W_\alpha$$

这里集合 $W_\alpha=\pi^{-1}(\bar{U})\cap V_\alpha$ 仍然满足定义 1 中的不相交性条件 2. 由于这个事实，在处理特定邻域时，我们可限于讨论那些"小"的邻域.

例 3 在例 2 中考察螺旋线 H 上对应于区间 $(\pi, 4\pi)\subset\mathbb{R}$ 的一段弧 $\tilde{H}$. 显然，π 在螺旋线的这段开弧上的限制 $\tilde{\pi}$，仍是一个局部同胚，而且 $\tilde{\pi}(\tilde{H})=S^1$. 然而，对于点

$$\pi(\cos 3\pi,\sin 3\pi,b3\pi)=(-1,0,0)=p\in S^1$$

p 的任何邻域都不是特定邻域．事实上，取 U 充分小就有 $\tilde{\pi}^{-1}(U)=V_1\cup V_2$，这里 V_1 是螺旋线上对应于 $t\in(\pi,\ \pi+\varepsilon)$的弧，$V_2$ 是对应于 $t\in(3\pi-\varepsilon,\ 3\pi+\varepsilon)$的弧．但 $\tilde{\pi}$ 限制于 V_1 不是到 U 上的同胚，因为 $\tilde{\pi}(V_1)$甚至不包含 p 点．由此导出 $\tilde{\pi}$：$\widetilde{H}\to S^1$ 是一个到 S^1 上的局部同胚，但不是覆盖映照．

现在我们可以用下面更一般的形式来重新叙述在本章开始时提出的问题：在什么条件下局部微分同胚是整体微分同胚？

覆盖空间的概念使我们可以将这个问题分开为下面的两个问题：

1. 在什么条件下局部同胚是覆盖映照？

2. 在什么条件下覆盖映照是整体同胚？

下面的命题是对问题 1 的一个简单回答．

命题 1 设 π：$\widetilde{B}\to B$ 是局部同胚，$\widetilde{B}$ 紧致且 B 连通，则 π 是覆盖映照．

证明 由于 π 是局部同胚，$\pi(\widetilde{B})\subset B$ 是 B 中开集．更进一步，由于 π 的连续性，$\pi(\widetilde{B})$是紧致的，因此是 B 中的闭集．由于 $\pi(\widetilde{B})\subset B$ 是连通集 B 中的既开又闭的集，$\pi(\widetilde{B})=B$．于是定义 1 中的条件 1 得证．

为证实条件 2，设 $b\in B$．那么 $\pi^{-1}(b)\subset\widetilde{B}$(必是有限集．否则 $\pi^{-1}(b)$将有一极限点 $\bar{q}\in\widetilde{B}$，而这与 π：$\widetilde{B})\to B$ 是局部同胚的事实矛盾．于是可记 $\pi^{-1}(b)=\{\tilde{b}_1,\ \cdots,\ \tilde{b}_k\}$．

设 W_i 是$\tilde{b}_i$，$i=1,\ \cdots,\ k$，的邻域，使得 π 在 W_i 上的限制是同胚(π 是局部同胚)．由于 $\pi^{-1}(b)$是有限的，因此可以将这些 W_i 选得充分小，使得它们两两不相交．显然存在 b 的一个邻域 U，使得 $U\subset\bigcap(\pi(W_i))$(见图 5-24)．令 $V_i=\pi^{-1}(U)\cap W_i$，我们就有

$$\pi^{-1}(U)=\bigcup_i V_i$$

而且这些 V_i 是两两不相交的．π 在 V_i 上的限制明显地是到 U 上的同胚．由此可见，U 是 p 的一个特定邻域．这就证实了条件 2 并完成证明．

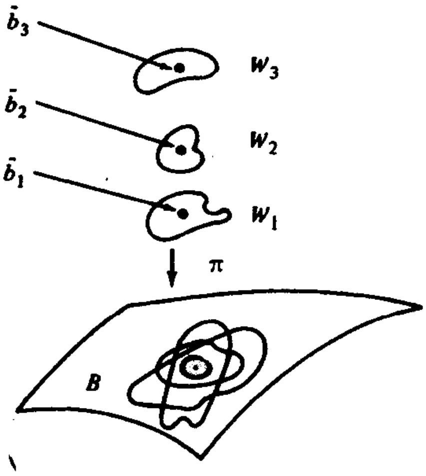


图 5-24

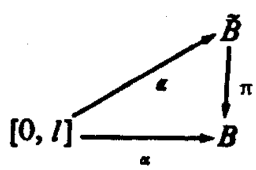
当 $\widetilde{B}$ 不是紧致时，几乎没有什么有用的法则能断定一个局部同胚是否为覆盖映照．一个特殊的场合将在后面处理．为处理问题 2 和这一特殊场合，我们需要回到覆盖空间．

覆盖映照的最重要的性质是能够将 B 中的连续曲线"提升"到 $\widetilde{B}$ 中．为更精确化起见，我们引入下面的术语．

设 $B\subset\mathbb{R}^3$．回忆一下连续映照 α：$[0,\ l]\to B$，$[0,\ l]\subset\mathbb{R}$，称为 B 中的一条弧(见第 5 章的附录，定义 8)．现在，设 $\widetilde{B}$ 和 B 是$\mathbb{R}^3$ 的子集．设 π：$\widetilde{B}\to B$ 是连续映照，α：$[0,\ l]\to B$ 是 B 中的一条弧．如果存在 $\widetilde{B}$ 中的一条弧

$$\tilde{\alpha}:[0,l]\to\widetilde{B}$$

使得 $\pi\circ\tilde{\alpha}=\alpha$，那么 $\tilde{\alpha}$ 被称为是α 以$\alpha(0)\in\widetilde{B}$ 为起点的提升．这种情况可用右面的图来描写



使用上面的术语，下面的存在性和唯一性命题表达了覆盖空间的一

个基本性质.

命题 2 设 π: $\widetilde{B}\to B$ 是覆盖映照，α: $[0, l]\to B$ 是 B 中一条弧，$\widetilde{p}_0\in\widetilde{B}$ 是 $\widetilde{B}$ 的一个点，使得 $\pi(\widetilde{p}_0)=\alpha(0)=p_0$. 于是，存在 α 以 $\widetilde{p}_0$ 为起点，即 $\widetilde{\alpha}(0)=\widetilde{p}_0$ 的，唯一的提升 $\widetilde{\alpha}$: $[0, l]\to\widetilde{B}$.

证明 首先证明唯一性. 设 $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$: $[0, l]\to\widetilde{B}$ 是 α 以 $\widetilde{p}_0$ 为起点的两个提升. 设 $A\subset[0, l]$ 是满足 $\widetilde{\alpha}(t)=\widetilde{\beta}(t)$ 的点 $t\in[0, l]$ 的集合. A 非空而且显然是 $[0, l]$ 的闭集.

我们将证明 A 在 $[0, l]$ 中是开的. 假定 $\widetilde{\alpha}(t)=\widetilde{\beta}(t)=\widetilde{p}$. 考虑 $\widetilde{p}$ 的一个邻域 V，π 在其上是同胚. 由于 $\widetilde{\alpha}$ 和 $\widetilde{\beta}$ 是连续映照，因此存在包含 t 的一个开区间 $I_t\subset[0, l]$ 使得 $\widetilde{\alpha}(I_t)\subset V$，$\widetilde{\beta}(I_t)\subset V$. 由于 $\pi\circ\widetilde{\alpha}=\pi\circ\widetilde{\beta}$，而 π 在 V 上是同胚，所以在 I_t 上 $\widetilde{\alpha}=\widetilde{\beta}$，于是 A 是开集. 这就导出 $A=[0, l]$，对任何 $t\in[0, l]$ 这两个提升重合.

现在来证明存在性. 由于 α 是连续的，对每一 $\alpha(t)\in B$ 存在一个包含 t 的区间 $I_t\subset[0, l]$，使得 $\alpha(I_t)$ 属于 $\alpha(t)$ 的一个特定邻域. 族 $I_{t,t}\in[0, l]$，构成 $[0, l]$ 的一个开覆盖. 由 $[0, l]$ 的紧致性，这个开覆盖有一个有限子覆盖，比如说，I_0，…，I_n.

假定 $0\in I_0$（如果不是这样，我们可以改变这些区间的编号）. 由于 $\alpha(I_0)$ 属于 p 的一个特定邻域 U_0，因此存在 $\widetilde{p}_0$ 的一个邻域 V_0，使得 π 在 V_0 上的限制 π_0 是到 U_0 上的同胚. 对 $t\in I_0$，我们定义（见图 5-25）

$$\widetilde{\alpha}(t)=\pi_0^{-1}\circ\alpha(t)$$

这里 π_0^{-1} 是同胚 π_0 在 U_0 上的逆映照. 显然有

$$\widetilde{\alpha}(0)=\widetilde{p}_0$$

$$\pi\circ\widetilde{\alpha}(t)=\alpha(t),\quad t\in I_0$$

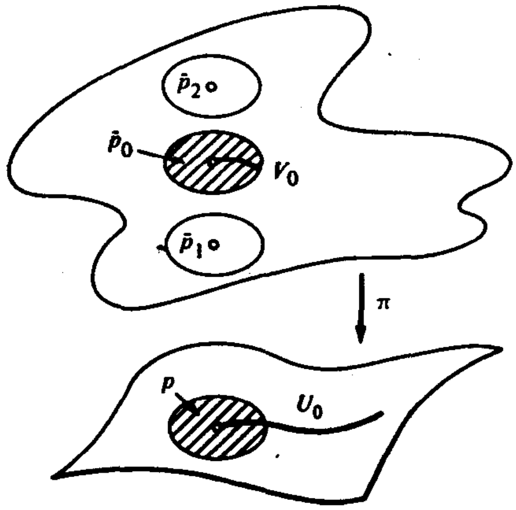


图 5-25

假设 $I_1\cap I_0\neq\varnothing$（否则我们可再改变这些区间的编号）. 设 $t_1\in I_1\cap I_0$. 由于 $\alpha(I_1)$ 属于 $\alpha(t_1)$ 的一个特定邻域 U_1，因此我们可以定义 α 在 I_1 中以 $\widetilde{\alpha}(t_1)$ 为起点的一个提升. 由唯一性，这个弧与 $\widetilde{\alpha}$ 在 $I_1\cap I_0$ 中重合，因此它是 $\widetilde{\alpha}$ 在 $I_0\cap I_1$ 上的延拓. 按这个方式继续进行，我们就构造出一条弧 $\widetilde{\alpha}$: $[0, l]\to\widetilde{B}$ 使得 $\widetilde{\alpha}(0)=\widetilde{p}_0$ 且 $\pi\circ\widetilde{\alpha}(t)=\alpha(t)$，$t\in[0, l]$.

覆盖映照 π：$\widetilde{B}\to B$ 的弧提升性质的一个有趣结果是：当 B 是道路连通时，存在着集合 $\pi^{-1}(p)$ 与 $\pi^{-1}(q)$ 之间的1对1关系，这里 p 和 q 是 B 的任意两点．事实上，若 B 是道路连通的，那么存在弧 α：$[0,l]\to B$ 使得 $\alpha(0)=p$，$\alpha(l)=q$．对每一点 $\widetilde{p}\in\pi^{-1}(p)$，有一提升 $\widetilde{\alpha}_p$：$[0,l]\to\widetilde{B}$ 使 $\widetilde{\alpha}_p(0)=\widetilde{p}$．现在定义 φ：$\pi^{-1}(p)\to\pi^{-1}(q)$ 为 $\varphi(\widetilde{p})=\widetilde{\alpha}_p(l)$；也就是说，$\varphi(\widetilde{p})$ 是 α 以 $\widetilde{p}$ 为起点的提升的终点．由提升的唯一性，φ 是如所言的一个1对1关系．

由此导出当 B 是道路连通时 $\pi^{-1}(p)(p\in B)$ 的点的"个数"与 p 无关．如果这个数是有限的，它称为这个覆盖的叶数．如果 $\pi^{-1}(p)$ 不是有限的，我们说这个覆盖是无限的．例1和例2是无限覆盖．注意当 $\widetilde{B}$ 是紧致时覆盖总是有限的．

例4 设

$$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x=\cos t,y=\sin t,t\in\mathbb{R}\}$$

是单位圆，映照 π：$S^1\to S^1$ 如下定义

$$\pi(\cos t,\sin t)=(\cos kt,\sin kt)$$

这里 k 是一个正整数，$t\in\mathbb{R}$，由反函数定理，π 是局部微分同胚，因此是局部同胚．由于 S^1 是紧致的，可以应用命题1，所以，π：$S^1\to S^1$ 是一个覆盖映照．

几何上来说，π 将第一个 S^1 在第二个 S^1 上绕了 k 次．注意一个点 $p\in S^1$ 的逆象恰恰包含 k 个点，因此，π 是 S^1 的一个 k-叶覆盖．

为了处理问题2，我们还需要将下面的讨论中产生的直观的想法加以精确化．一个覆盖映照 π：$\widetilde{B}\to B$ 是同胚的充分条件为它是1对1的映照．所以我们必须找到一个条件能保证当 $\widetilde{B}$ 的两个点 $\widetilde{p}_1$，$\widetilde{p}_2$ 被 π 投影到 B 的同一点

$$p=\pi(\widetilde{p}_1)=\pi(\widetilde{p}_2)$$

时，就成立 $\widetilde{p}_1=\widetilde{p}_2$．我们将假定 $\widetilde{B}$ 是道路连通的，$\widetilde{B}$ 中一条连接 $\widetilde{p}_1$ 和 $\widetilde{p}_2$ 的弧 $\widetilde{\alpha}$ 被投影到 B 中连接 p 和 p 的闭弧 α 上(见图5-26)．如果 B 没有"孔洞"(它的意义将需精确化)，于是就可能"将 α 连续地变形为点 p"．也就是说，存在一族弧 α_t，它关于 t 连续，$t\in[0,1]$，并且 $\alpha_0=\alpha$ 而 α_1 等于常值弧 p．由于 $\widetilde{\alpha}$ 是 α 的提升，因此很自然地希望这些弧 α_t 也能被提升为一族弧 $\widetilde{\alpha}_t$，它关于 t 连续，$t\in[0,1]$，而 $\widetilde{\alpha}_0=\widetilde{\alpha}$．这样就得出 $\widetilde{\alpha}_1$ 是常值弧 p 的提升从而退化为一个点．另一方面，$\widetilde{\alpha}_1$ 连接 $\widetilde{p}_1$ 和 $\widetilde{p}_2$，因此可断定 $\widetilde{p}_1=\widetilde{p}_2$．

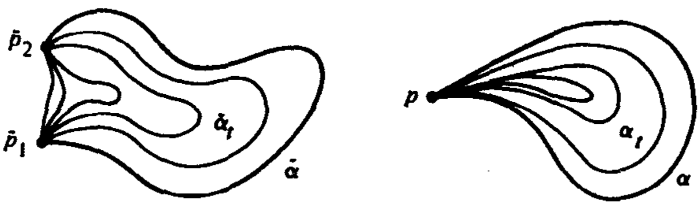


图 5-26

要将上面的启发性的论证严格化，我们还必须定义"连接两条给定弧的弧的连续族"关证明这个族可以被"提升"．

定义2 设 $B\subset\mathbb{R}^3$，α_0：$[0,l]\to B$，α_1：$[0,l]\to B$ 是 B 的两条弧，连接两点 $p=\alpha_0(0)=\alpha_1(0)$ 和 $q=\alpha_0(l)=\alpha_1(l)$．如果存在连续映照 H：$[0,l]\times[0,1]\to B$ 使得

1. $H(s, 0)=\alpha_0(s)$，$H(s, 1)=\alpha_1(s)$，$s\in[0, l]$；

2. $H(0, t)=p$，$H(l, t)=q$，$t\in[0, 1]$，

那么称 α_0 和 α_1 是同伦的，映照 H 称为 α_0 和 α_1 的一个同伦.

对每一 $t\in[0, 1]$，由 $\alpha_t(s)=H(s, t)$ 给定的弧 α_t：$[0, l]\to B$ 称为同伦 H 的一条弧. 因此，同伦是一族弧 α_t，$t\in[0, 1]$，它构成 α_0 到 α_1 的一个连续变形(见图 5-27)，在变形过程中弧 α_t 的两个端点 p 和 q 保持不动(条件 2).

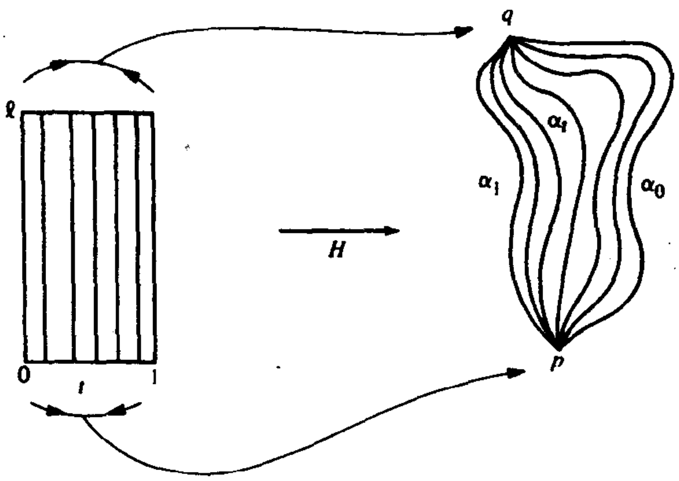


图 5-27

同伦的提升的概念完全类似于弧的提升的概念. 设 π：$\widetilde{B}\to B$ 是连续映照，并设 α_0，α_1：$[0, l]\to B$ 是 B 中连接 p 和 q 两点的两条弧. 设 H：$[0, l]\times[0, 1]\to B$ 是 α_0 和 α_1 之间的一个同伦. 如果存在连续映照

$$\widetilde{H}:[0,l]\times[0,1]\to\widetilde{B}$$

使得 $\pi\circ\widetilde{H}=H$，我们称 $\widetilde{H}$ 是同伦 H 的一个以 $\widetilde{H}(0, 0)=\widetilde{p}\in\widetilde{B}$ 为起点的提升.

我们现在证明覆盖映照具有提升同伦的性质. 实际上，我们将证明一个更一般的命题. 注意，覆盖映照 π：$\widetilde{B}\to B$ 是局部同胚而且 B 的每条弧总可提升为 $\widetilde{B}$ 的弧. 下面的命题 3、4 和 5 的证明也只用到覆盖映照的这两个性质. 因此，为了今后的应用，我们将在这种一般意义上来叙述这些命题，于是，当 B 的每条弧总可被提升时，我们就称连续映照 π：$\widetilde{B}\to B$ 具有提升弧的性质. 注意，这意味着 π 把 $\widetilde{B}$ 映到 B 上.

命题 3 设 π：$\widetilde{B}\to B$ 是具有提升弧性质的局部同胚. α_0，α_1：$[0, l]\to B$ 是 B 中连接点 p 和 q 的两条弧. 设

$$H:[0,l]\times[0,1]\to B$$

是 α_0 和 α_1 之间的一个同伦，$\widetilde{p}\in\widetilde{B}$ 是 $\widetilde{B}$ 中使得 $\pi(\widetilde{p})=p$ 的点. 那么存在 H 以 $\widetilde{p}$ 为起点的唯一的提升 $\widetilde{H}$.

证明 唯一性的证明与弧的提升的唯一性的证明完全类似. 设 $\widetilde{H}_1$ 和 $\widetilde{H}_2$ 是 H 的两个提升并满足 $\widetilde{H}_1(0, 0)=\widetilde{H}_2(0, 0)=\widetilde{p}$. 这时由满足 $\widetilde{H}_1(s, t)=\widetilde{H}_2(s, t)$ 的点$(s, t)\in[0, l]\times[0, 1]=Q$ 组成的集合 A 是 Q 中的非空闭集. 由于 $\widetilde{H}_1$ 和 $\widetilde{H}_2$ 是连续的，π 是局部同胚，因此 A 也

是 Q 中开集. 从 Q 的连通性可得 $A=Q$，因此，$\widetilde{H}_1=\widetilde{H}_2$.

为了证明存在性，设 $\alpha_t(s)=H(s,\ t)$是同伦 H 的一条弧. 定义 $\widetilde{H}$ 为

$$\widetilde{H}(s,t)=\tilde{\alpha}_t(s),\quad s\in[0,l],\quad t\in[0,1]$$

这里 $\tilde{\alpha}_t$ 是 α_t 以 $\tilde{p}$ 为起点的提升. 显然有

$$\pi\circ\widetilde{H}(s,t)=\alpha_t(s)=H(s,t),s\in[0,l],t\in[0,1]$$
$$\widetilde{H}(0,0)=\tilde{\alpha}_0(0)=\tilde{p}$$

现在我们来证明 $\widetilde{H}$ 是连续的. 设$(s_0,\ t_0)\in[0,\ l]\times[0,\ 1]$. 由于 π 是局部同胚，因此存在 $\widetilde{H}(s_0,\ t_0)$的一个邻域 V，使得 π 在 V 上的限制 π_0 是 V 到 $H(s_0,\ t_0)$的一个邻域 U 上的同胚. 设 $Q_0\subset H^{-1}(U)\subset[0,\ l]\times[0,\ 1]$是如下给定的开正方形

$$s_0-\varepsilon<s<s_0+\varepsilon,\quad t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$$

为了断定 $\widetilde{H}$ 在$(s_0,\ t_0)$处连续，只要证明 $\widetilde{H}$ 限制在 Q_0 上能写成 $\widetilde{H}=\pi_0^{-1}\circ H$ 就足够了，由于$(s_0,\ t_0)$是任意的，于是像所期望的那样，$\widetilde{H}$ 在整个$[0,\ l]\times[0,\ 1]$上是连续的.

为此，我们注意到

$$\pi_0^{-1}(H(s_0,t))\quad t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$$

是弧 $H(s_0,\ t)$通过点 $\widetilde{H}(s_0,\ t_0)$的一个提升. 由唯一性，$\pi_0^{-1}(H(s_0,\ t))=\widetilde{H}(s_0,\ t)$. 由于 Q_0 是一个正方形，因此，对每一点$(s_1,\ t_1)\in Q_0$，存在 U 中的弧 $H(s,\ t_1)$，$s\in(s_0-\varepsilon,\ s_0+\varepsilon)$，与弧 $H(s_0,\ t)$相交. 由于 $\pi_0^{-1}(H(s_0,\ t_1))=\widetilde{H}(s_0,\ t_1)$，因此弧 $\pi_0^{-1}(H(s,\ t_1))$是 $H(s,\ t_1)$通过点 $\widetilde{H}(s_0,\ t_1)$的提升. 由唯一性，$\pi_0^{-1}(H(s,\ t_1))=\widetilde{H}(s,\ t_1)$. 因此，$\pi_0^{-1}(H(s_1,\ t_1))=\widetilde{H}(s_1,\ t_1)$. 由于$(s_1,\ t_1)\in Q_0$ 的任意性，我们断定 $\pi_0^{-1}(H(s,\ t))=\widetilde{H}(s,\ t)$，$(s,\ t)\in Q_0$，这就完成了证明. 证毕.

命题 3 的一个结果是这样的事实：如果 π：$\widetilde{B}\to B$ 是覆盖映照，那么 B 中同伦的弧被提升为 $\widetilde{B}$ 中同伦的弧. 这个事实可以用下面的更一般和精确的方式来表达.

命题 4 设 π：$\widetilde{B}\to B$ 是具有提升弧性质的局部同胚. 设 α_0，α_1：$[0,\ l]\to B$ 是 B 中连接两点 p 和 q 的两条弧，取 $\tilde{p}\in\widetilde{B}$ 使得 $\pi(\tilde{p})=p$. 如果 α_0 和 α_1 是同伦的，那么 α_0 和 α_1 各自以 p 为起点的提升 $\tilde{\alpha}_0$ 和 $\tilde{\alpha}_1$ 也是同伦的.

证明 设 H 是 α_0 和 α_1 之间的同伦，$\widetilde{H}$ 是 H 以 $\tilde{p}$ 为起点的提升. 我们将证明 $\widetilde{H}$ 是 $\tilde{\alpha}_0$ 和 $\tilde{\alpha}_1$ 之间的同伦(见图 5-28).

事实上，由弧的提升的唯一性，

$$\widetilde{H}(s,0)=\tilde{\alpha}_0(s),\quad \widetilde{H}(s,1)=\tilde{\alpha}_1(s),\quad s\in[0,l]$$

这证实了定义 2 中的条件 1. 此外，$\widetilde{H}(0,\ t)$是“常值”弧 $H(0,\ t)=p$ 以 $\tilde{p}$ 为起点的提升. 由唯一性，

$$\widetilde{H}(0,t)=\tilde{p},\quad t\in[0,1]$$

类似地，$\widetilde{H}(l,\ t)$是 $H(l,\ t)=q$ 以 $\tilde{\alpha}_0(l)=\tilde{q}$ 为起点的提升；因此，

$$\widetilde{H}(l,t)=\tilde{q}=\alpha_1(l),\quad t\in[0,1]$$

于是，定义 2 中条件 2 得证，这说明 $\widetilde{H}$ 是 $\tilde{\alpha}_0$ 和 $\tilde{\alpha}_1$ 之间的同伦. 证毕.

回到引导我们考虑同伦概念的那段有启发性的论述，我们看到所谓没有“孔洞”的空间的意

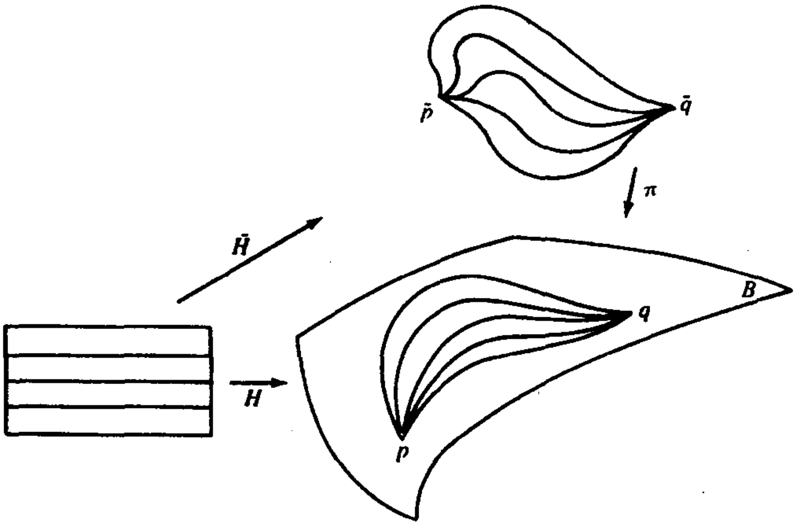


图 5-28

义仍有待于解释. 当然，我们将用作这种空间定义的恰恰是在启发性论述中用过的那个性质.

定义 3 一个道路连通集 $B\subset\mathbb{R}^3$ 称为是单连通的，如果任意给定两点 p，$q\in B$ 和两条连接 p 和 q 的弧 α_0：$[0, l]\to B$，α_1：$[0, l]\to B$，在 B 中总存在 α_0 和 α_1 之间的同伦. 特别地，B 中任何闭弧 α：$[0, l]\to B$(闭意味着 $\alpha(0)=\alpha(l)=p$)同伦于"常值"弧 $\alpha(s)=p$，$s\in[0, l]$(习题 5 表明后面这个性质实际上等价于第一个性质).

直观上，如果道路连通集 B 中的每条闭弧能连续变形为一点，那么 B 是单连通的. 可以证明平面和球面是单连通的而柱面和环面不是单连通的(见习题 5).

现在我们可叙述和证明对本节问题 2 的一个回答，它其实是下面命题的一个推论.

命题 5 设 π：$\tilde{B}\to B$ 是具有提升弧性质的局部同胚. 设 $\tilde{B}$ 道路连通，B 单连通. 那么 π 是同胚.

证明 证明实质上与在启发性论述中提出的证明是相同的.

我们需要证明 π 是 1 对 1 的. 为此，设 $\tilde{p}_1$ 和 $\tilde{p}_2$ 是 $\tilde{B}$ 的两点，$\pi(\tilde{p}_1)=\pi(\tilde{p}_2)=p$. 由于 $\tilde{B}$ 道路连通，因此 $\tilde{B}$ 中存在连接 $\tilde{p}_1$ 和 $\tilde{p}_2$ 的弧 $\tilde{\alpha}_0$. 于是 $\pi\circ\tilde{\alpha}_0=\alpha_0$ 是 B 的一条闭弧. 由于 B 是单连通的，因此 α_0 和常值弧 $\alpha_1(s)=p$，$s\in[0, l]$，是同伦的. 由命题 4，$\tilde{\alpha}_0$ 和 $\tilde{\alpha}_1$ 以 $\tilde{p}_1$ 为起点的提升 $\tilde{\alpha}_1$ 是同伦的. 而 $\tilde{\alpha}_1$ 是连接 $\tilde{p}_1$ 和 $\tilde{p}_2$ 的常值弧，因此我们断定 $\tilde{p}_1=\tilde{p}_2$. 证毕.

推论 设 π：$\tilde{B}\to B$ 是覆盖映照，$\tilde{B}$ 道路连通，B 单连通. 那么 π 是同胚.

我们已经在比原来需要的更一般的情况下证明了命题 3、4 和 5，这一事实允许我们对问题 1 给出如下所述的另一个回答.

设 π：$\tilde{B}\to B$ 是具提升弧性质的局部同胚. 假定 $\tilde{B}$ 和 B 是局部地"性质良好的"(此意义有待精确化)，那么 π 实际上是覆盖映照.

所需要的局部性质可描述如下. 回忆一下，$B\subset\mathbb{R}^3$ 称为局部道路连通，如果每一点的任意邻域都包含一个道路连通的邻域(见第 5 章附录定义 12).

定义 4 如果 B 中每一点的任意邻域都包含一个单连通的邻域，称 B 是局部单连通的.

换言之，如果 B 的每一点有任意小的单连通邻域，那么 B 是局部单连通的. 显然，如果 B 是局部单连通的，那么 B 是局部道路连通的.

我们指出正则曲面 S 是局部单连通的，这是因为 $p\in S$ 有任意小的同胚于平面中圆盘内部的邻域.

在下面命题的证明中，我们将需要局部道路连通集 $B\subset\mathbb{R}^3$ 的下列性质(见第 5 章附录部分 D). B 中包含一点 $p\in B$ 的所有道路连通子集的并集 A 显然是一个道路连通集，称为 B 的包含 p 点的道路连通分支. 由于 B 是局部道路连通的，所以 A 是 B 的开集. 于是，B 可以写成它的道路连通分支 A_α 的并集 $B=\bigcup_\alpha A_\alpha$，这些 A_α 是开集而且两两不相交.

我们再指出，正则曲面是局部道路连通的. 因此，在下面的命题中，当 $\tilde{B}$ 和 B 都是正则曲面时，加在 $\tilde{B}$ 和 B 上的假设都被满足.

命题 6 设 π: $\tilde{B}\to B$ 是具提升弧性质的局部同胚. 假定 B 局部单连通而 $\tilde{B}$ 局部道路连通，那么 π 是覆盖映照.

证明 设 $p\in B$，V 是 p 在 B 中的一个单连通邻域. 集合 $\pi^{-1}(V)$是它的道路连通分支的并集，亦即

$$\pi^{-1}(V)=\bigcup_\alpha \tilde{V}_\alpha$$

这里 $\tilde{V}_\alpha$ 是开的，道路连通的且两两不相交的集合. 考察限制映照 π: $\tilde{V}_\alpha\to V$. 如果我们证明 π 是 $\tilde{V}_\alpha$ 到 V 上的同胚，那么 π 将满足覆盖映照定义中的所有条件.

我们首先证明 $\pi(\tilde{V}_\alpha)=V$. 事实上，$\pi(\tilde{V}_\alpha)\subset V$. 假如有一点 $p\in V$，而 $p\notin\pi(\tilde{V}_\alpha)$. 那么，由于 V 是道路连通的，就存在一条弧 α: $[a, b]\to V$ 连接点 $q\in\pi(\tilde{V}_\alpha)$和 p. 由于 $\tilde{V}_\alpha$ 是 $\tilde{B}$ 的弧连通分支，因此 α 以 $\tilde{q}\in\tilde{V}_\alpha$，这里 $\pi(\tilde{p})=q$，为起点的提升是 $\tilde{V}_\alpha$ 中的弧，于是，

$$\pi(\tilde{\alpha}(b))=p\in\pi(\tilde{V}_\alpha)$$

这是一个矛盾. 所以 $\pi(\tilde{V}_\alpha)=V$.

接下来我们看到，由于 $\tilde{V}_\alpha$ 是开的，因此 π: $\tilde{V}_\alpha\to V$ 仍是一个局部同胚. 由上面的论证进一步可得到 π: $\tilde{V}_\alpha\to V$ 仍具有提升弧性质. 因此，命题 5 的条件得到满足，从而 π 是一个同胚. 证毕.

B. Hadamard 定理

现在我们将回到本节一开始提出的问题，即在什么条件下局部微分同胚 $\exp_p$: $T_p(S)\to S$ 是 $T_p(S)$到 S 上的整体微分同胚，这里 p 是曲率 $K\leqslant 0$ 的完备曲面 S 上的一点. 下面的命题将上述问题分解为问题 1 和问题 2 从而对它提供了解答.

我们需要下面的引理.

引理 1 设 S 是曲率 $K\leqslant 0$ 的完备曲面. 那么 $\exp_p$: $T_p(S)\to S$，$p\in S$，是增加长度的，即若 u，$w\in T_p(S)$，则成立

$$\langle(d\exp_p)_u(w),(d\exp_p)_u(w)\rangle\geqslant\langle w,w\rangle$$

这里，像通常那样，w 表示$(T_p(S))_u$ 中一个将 w 平移 u 后得到的向量.

证明 若 $u=0$，那么等号的成立是平凡的. 因此，设 $v=u/|u|$，$u\neq 0$，并设 γ: $[0, l]\to S$，$l=|u|$，是测地线

$$\gamma(s) = \exp_p sv, \quad s \in [0,l]$$

由 Gauss 引理，我们可假定$\langle w, v\rangle=0$. 设$J(s)=s(d\exp_p)_{sv}(w)$是由 5.5 引理 1 给出的沿γ的 Jacobi 场. 我们知道$J(0)=0$，$(DJ/ds)(0)=w$，而且$\langle J(s), \gamma'(s)\rangle=0$，$s\in[0, l]$.

现在注意，由于$K\leqslant 0$(见 5.5 等式(1))，因此，

$$\frac{d}{ds}\left\langle J, \frac{DJ}{ds}\right\rangle=\left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle+\left\langle J, \frac{D^2J}{ds^2}\right\rangle$$

$$=\left|\frac{DJ}{ds}\right|^2-K\,|J|^2\geqslant 0$$

这蕴涵着

$$\left\langle J, \frac{DJ}{ds}\right\rangle\geqslant 0;$$

因此，

$$\frac{d}{ds}\left\langle\frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle=2\left\langle\frac{DJ}{ds}, \frac{D^2J}{ds^2}\right\rangle=-2K\left\langle\frac{DJ}{ds}, J\right\rangle\geqslant 0 \tag{1}$$

由此导出

$$\left\langle\frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle\geqslant\left\langle\frac{DJ}{ds}(0), \frac{DJ}{ds}(0)\right\rangle=\langle w, w\rangle=C \tag{2}$$

因此，

$$\frac{d^2}{ds^2}\langle J, J\rangle=2\left\langle\frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle+2\left\langle J, \frac{D^2J}{ds^2}\right\rangle$$

$$\geqslant 2\left\langle\frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle\geqslant 2C \tag{3}$$

积分上面的不等式的两边，我们得到

$$\frac{d}{ds}\langle J, J\rangle\geqslant 2Cs+\left(\frac{d}{ds}\langle J, J\rangle\right)_{s=0}$$

$$=2Cs+2\left\langle\frac{DJ}{ds}(0), J(0)\right\rangle=2Cs$$

再积分一次就有

$$\langle J,J\rangle \geqslant Cs^2+\langle J(0),J(0)\rangle = Cs^2$$

在这个表达式中置$s=l$，并注意到$C=\langle w, w\rangle$，我们得到

$$\langle J(l),J(l)\rangle \geqslant l^2\langle w,w\rangle$$

由于$J(l)=l(d\exp_p)_{lv}(w)$，最后得到

$$\langle (d\exp_p)_{lv}(w),(d\exp_p)_{lv}(w)\rangle \geqslant \langle w,w\rangle$$

证毕.

为了后面的应用，建立下面的结果是有益的，这个结果可从上面的证明中得出.

(证明的)**推论** 设$K\equiv 0$. 则$\exp_p$：$T_p(S)\to S$，$p\in S$，是局部等距.

只要注意到若$K\equiv 0$，那么可以在上面的证明中用"$\equiv 0$"代替式子(1)，(2)和(3)中的"$\geqslant 0$"，于是推论成立.

命题 7 设S是 Gauss 曲率$K\leqslant 0$的完备曲面. 那么映照$\exp_p$：$T_p(S)\to S$，$p\in S$，是覆

盖映照.

证明 由于已经知道 $\exp_p$ 是一个局部微分同胚，因此，(由命题 6)只要再证明 $\exp_p$ 具提升弧性质就行了.

设 α：$[0, l]\to S$ 是 S 中的一条弧，$v\in T_p(S)$ 满足 $\exp_p v=\alpha(0)$. 由于 S 是完备的，所以这样的 v 存在. 由于 $\exp_p$ 是一个局部微分同胚，因此在 $T_p(S)$ 中存在 v 的一个邻域 U 使得 $\exp_p$ 限制于 U 时是微分同胚. 于是利用 $\exp_p(U)$ 中的 $\exp_p^{-1}$ 可以在 0 的一个邻域内定义 $\tilde{\alpha}$.

现在设 A 是使得 $\tilde{\alpha}$ 在$[0, t]$上有定义的 $t\in[0, l]$的集合. A 不是空集，而且如果 $\tilde{\alpha}(t_0)$ 有定义，那么 $\tilde{\alpha}$ 在 t_0 的一个邻域内也有定义. 也就是说，A 是$[0, l]$中的开集. 一当我们再证明 A 也是$[0, l]$中的闭集，那么由$[0, l]$的连通性我们就有 $A=[0, l]$，因而 α 可以整个被提升.

因此证明的关键在于说明 A 是$[0, l]$中的闭集. 为此，设 $t_0\in[0, l]$是 A 的一个聚点，$\{t_n\}$ 是一个序列，$\{t_n\}\to t_0$，$t_n\in A$，$n=1, 2, \cdots$. 我们将首先证明 $\tilde{\alpha}(t_n)$ 有一个聚点.

假定 $\tilde{\alpha}(t_n)$ 在 $T_p(s)$ 中没有聚点. 那么在 $T_p(s)$ 中任意给定一个中心在 $\tilde{\alpha}(0)$ 的闭圆盘 D. 就有一个 n_0 使得 $\tilde{\alpha}(t_{n0})\notin D$. 这样一来就得出在 $T_p(S)$ 中从 $\tilde{\alpha}(0)$ 到 $\tilde{\alpha}(t_n)$ 的距离可以任意大. 由引理 1，$\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 增加向量的长度，因此显然可见在 S 中从 $\alpha(0)$ 到 $\alpha(t_n)$ 的内蕴距离也可任意大. 但是这个结论与从 $\alpha(0)$ 到 $\alpha(t_0)=\lim_{t\to t_0}\alpha(t_n)$ 的内蕴距离是有限的事实矛盾，这证实了我们的断言.

我们用 q 表示 $\tilde{\alpha}(t_n)$ 的一个聚点.

现在设 V 是 q 在 $T_p(S)$ 中的邻域，使得 $\exp_p$ 限制于 V 上是微分同胚. 由于 q 是 $\{\tilde{\alpha}(t_n)\}$ 的聚点，因此存在 n_1 使得 $\tilde{\alpha}(t_{n1})\in V$. 此外，因为 α 是连续的，所以存在开区间 $I\subset[0, l]$，$t_0\in I$，使得 $\alpha(I)\subset\exp_p(V)=U$. 利用 $\exp_p^{-1}$ 在 U 上的限制可以定义 α 在 I 上以 $\tilde{\alpha}(t_{n1})$ 为起点的提升. 由于 $\exp_p$ 是局部微分同胚，这个提升与 $\tilde{\alpha}$ 在$[0, t_0)\cap I$ 中重合，因而是 $\tilde{\alpha}$ 到一个包含 t_0 的区间上的延拓. 因此，集合 A 是闭的，这就完成了命题 7 的证明. 证毕.

注 1 应该注意曲率条件 $K\leqslant 0$ 仅用来保证 $\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 为增加长度的局部微分同胚. 因此，实际上我们已经证明：如果 φ：$S_1\to S_2$ 是完备曲面 S_1 到曲面 S_2 上增加长度的局部微分同胚，则 φ 是一覆盖映照.

以下的命题称为 Hadamard 定理，它描述了曲率 $K\leqslant 0$ 的完备曲面的拓扑结构.

定理 1 **(Hadamard)** 设 S 为一个 Gauss 曲率 $K\leqslant 0$ 的单连通完备曲面. 则 $\exp_p$：$T_p(S)\to S$，$p\in S$，是微分同胚；即 S 微分同胚于一个平面.

证明 由命题 7，$\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 是覆盖映照. 而由命题 S 的推论，$\exp_p$ 是同胚. 由于 $\exp_p$ 是局部微分同胚，因而它的逆映照是可微的，所以 $\exp_p$ 是微分同胚. 证毕.

我们现在要提及覆盖空间的另一个几何应用，它也称为 Hadamard 定理. 回想一下，Gauss 曲率 $K>0$ 的连通紧致正则曲面称为卵形面(参见 5.2 的注 1).

定理 2 **(Hadamard)** 设 S 是一卵形面. 则 Gauss 映照 N：$S\to S^2$ 是微分同胚. 因而 S 微分同胚于球面.

证明 由于对每一个 $p\in S$，S 的 Gauss 曲率 $K=\det(dN_p)$ 是正的，所以 N 是局部微分同胚. 由命题 1，N 是覆盖映照. 由于球面 S^2 是单连通的，我们从命题 5 的推论中推断出 N：$S\to$

S^2 是 S 到单位球面 S^2 上的同胚．由于 N 是局部微分同胚，所以它的逆映照是可微的，因此 N 是微分同胚．证毕．

注 2 实际上我们已经证明的结论比这个还要多．由于 Gauss 映照 N 是微分同胚，所以 $\mathbb{R}^3$ 的每一个单位向量 v 作为 S 的单位法向量恰好出现一次．取一个垂直于 v 而与 S 不相交的平面，然后将此平面平行于本身移动直至与曲面 S 相遇．我们得到结论：S 位于它的每个切平面的一侧．这个结论可以表达为：卵形面 S 是*局部凸的*．由此可以证明 S 确实是一个凸集的边界(凸集是指这样的集合 $K\subset\mathbb{R}^3$ 使得连结任意两点 p，$q\in K$ 的线段完全属于 K)．

注 3 S. S Chern 和 R. K. Lashof 将 $K>0$ 的紧致曲面同胚于球面这样一个事实推广到 $K\geqslant 0$ 的紧致曲面("On the Total Curvature of Immersed Manifolds,"Michigan Math. J. 5(1958)，5～12)．对完备曲面的推广是 J. J. Stoker 首先得到的("Öber die Gestalt der positiv gekrümnten offenen Fläche"，Compositio Math. 3(1936)，58～59)，他证明了 $K>0$ 的完备曲面同胚于球面或平面，同时他还证明了其他一些结果．他的这个结果对 $K\geqslant 0$ 也是成立的，只要假定在某点 $K>0$(有关这个问题的证明和评论请看 M. do Carmo and E. Lima，"IsometricImmersions with Non-negative Sectional Curvatures，"Boletim da Soc. Bras. Mat. 2(1971)，9～22)．

习题

1. 证明：由 $\pi(t)=(\cos t,\ \sin t)$，$t\in\mathbb{R}$ 给定的映照 π：$\mathbb{R}\to S^1=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$是一个覆盖映照．

2. 证明：由 $\pi(x,\ y)=(x^2-y^2,\ 2xy)$，$(x,\ y)\in\mathbb{R}^2$，给定的映照 π：$\mathbb{R}^2-\{0,\ 0\}\to\mathbb{R}^2-\{0,\ 0\}$是一个双叶覆盖映照．

3. 设 S 是由螺旋线$(\cos t,\ \sin t,\ bt)$的主法线生成的正螺面．以 L 表示 z 轴，令 π：$S-L\to\mathbb{R}^2-\{0,\ 0\}$为投影 $\pi(x,\ y,\ z)=(x,\ y)$．证明 π 是一覆盖映照．

4. 熟悉复变函数的人会注意到，习题 2 中的映照 π 就是从$\mathbb{C}-\{0\}$到$\mathbb{C}-\{0\}$的映照 $\pi(z)=z^2$；这里$\mathbb{C}$是复平面，$z\in\mathbb{C}$．试作一推广：证明由 $\pi(z)=z^n$ 给定的映照 π：$\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}-\{0\}$是 n 叶覆盖映照．

5. 设 $B\subset\mathbb{R}^3$ 是一道路连通集．证明以下的两个性质是等价的(参见定义 3)：

   1)对任何一对点 p，$q\in B$ 和任何一对弧 α_0：$[0,\ l]\to B$，α_1：$[0,\ l]\to B$，存在 B 中连接 α_0 和 α_1 的一个同伦．

   2)对任何 $p\in B$ 和任何弧 α：$[0,\ l]\to B$，$\alpha(0)=\alpha(l)=p$(即 α 是一闭弧，以 p 为起始点和终点)，存在连接 α 和常值弧 $\alpha_0(s)=p$，$s\in[0,\ l]$的同伦．

6. 固定一个点 $p_0\in\mathbb{R}^2$ 并以 $\varphi_t(p)=tp_0+(1-t)p$，$p\in\mathbb{R}^2$ 定义一族映照 φ_t：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，$t\in[0,\ 1]$．注意 $\varphi_0(p)=p$，$\varphi_1(p)=p_0$．因而 φ_t 是连续的映照族，它开始于恒等映照，结束于常值映照 p_0．应用这些想法证明$\mathbb{R}^2$ 是单连通的．

7. a. 应用球极射影和习题 6 证明：球面 S^2 上任何一条闭弧若其象集至少略去 S^2 的一个点，则必同伦于一常值弧．

b. 证明：S^2 上的任何一条闭弧同伦于 S^2 中一个象集至少略去 S^2 的一个点的闭弧.

c. 由 a 和 b 推断 S^2 是单连通的. 为什么 b 是必需的？

8. (**Klingenberg 引理**) 设 $S\subset\mathbb{R}^2$ 是 Gauss 曲率 $K\leqslant K_0$ 的完备曲面，这里 K_0 是一非负常数. 设 p，$q\in S$，并设 γ_0 和 γ_1 是连结 p、q 的两条不同的测地线，$l(\gamma_0)\leqslant l(\gamma_1)$；这里 $l(\ \ )$ 表示相应曲线的长度. 假设 γ_0 同伦于 γ_1，即存在一个连续的曲线族 α_t，$t\in[0,1]$，连接 p 和 q，且使 $\alpha_0=\gamma_0$，$\alpha_1=\gamma_1$. 本习题的目的是证明存在 $t_0\in[0,1]$使得

$$l(\gamma_0)+l(\alpha_{t_0})>\frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}$$

(因此，这个同伦必须通过一条"长"曲线，见图 5-29)假定

$$l(\gamma_0)<\pi/\sqrt{K_0}$$

(否则就没有什么要证明的了)，然后按以下步骤来进行：

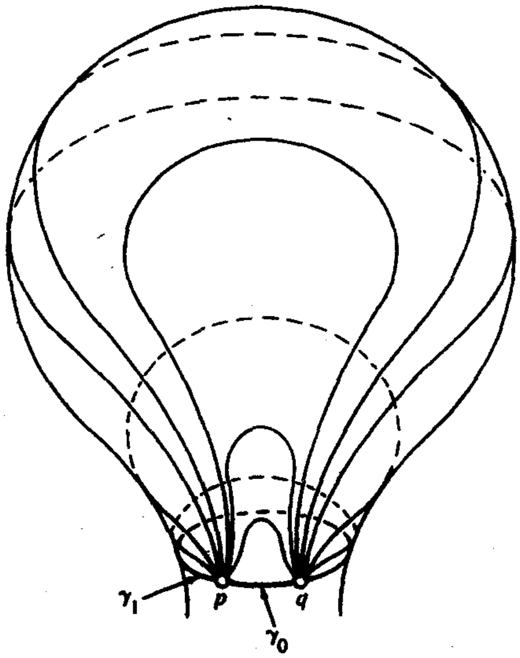


图 5-29 Klingenberg 引理

a. 利用第一比较定理(5.5 习题 3)证明：$\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 在 p 周围的一个半径为 $\pi/\sqrt{K_0}$ 的开盘 B 内没有临界点.

b. 证明：对较小的 t，可以把曲线 α_t 提升到切平面 $T(S)$中；即存在连接 $\exp_d^{-1}(p)=0$ 和 $\exp_p^{-1}(q)=\tilde{q}$ 的曲线 $\tilde{\alpha}_t$ 使得 $\exp_p\circ\tilde{\alpha}_t=\alpha_t$.

c. 证明本题 b 中的提升不能对所有的 $t\in[0,1]$定义. 推断对任何 $\varepsilon>0$，存在 $t(\varepsilon)$，使得 $\alpha_{t(\varepsilon)}$能被提升到 $\tilde{\alpha}_{t(\varepsilon)}$且 $\tilde{\alpha}_{t(\varepsilon)}$包含离 B 的边界的距离$<\varepsilon$ 的点. 因此，

$$l(\gamma_0)+l(\alpha_{t(\varepsilon)})\geqslant\frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}-2\varepsilon$$

d. 在本题 c 中选取 ε 的一序列$\{\varepsilon_n\}\to0$，并考虑$\{t(\varepsilon_n)\}$的一个收敛子序列. 推断存在曲线

α_{t_0}，$t_0\in[0,1]$，使得

$$l(\gamma_0)+l(\alpha_{t_0})\geqslant\frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}$$

9. a. 利用 Klingenberg 引理证明：如果 S 是完备的单连通曲面且 $K\leqslant 0$，则 $\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 是 1 对 1 的．

b. 利用本题 a 给出 Hadamard 定理(定理 1)的一个简单证明．

*10. (synge 引理) 我们回忆一下，曲面 S 上可微闭曲线是指一个可微映照 α：$[0,l]\to S$，使得 α 及它的所有导数在 0 和 l 处相同. 两条可微闭曲线是自由同伦的，如果存在一连续映照 H：$[0,l]\times[0,1]\to S$ 使得 $H(s,0)=\alpha_0(s)$，$H(s,1)=\alpha_1(s)$，$s\in[0,l]$. 映照 H 称为 α_0 和 α_1 之间的一个自由同伦(端点不固定). 假定 S 是可定向的并具正 Gauss 曲率. 证明：S 上的任何简单闭测地线自由同伦于一条长度较短的闭曲线.

11. 设 S 为完备曲面. 点 $p\in S$ 称为一个极点，如果每条满足 $\gamma(0)=p$ 的测地线 γ：$[0,\infty)\to S$ 都不包含关于 γ 与 p 共轭的点. 运用 Klingenberg 引理(习题 8)的技巧证明：如果 S 是单连通的，且具有一个极点 p，则 $\exp_p$：$T_p(s)\to S$ 是微分同胚.

5.7 曲线的整体性定理；Fary-Milnor 定理

在这一节，我们将对闭曲线给出一些整体性的定理. 这里所用的主要工具，是圆周的连续映照的度数理论. 为了引进度数的概念，将用到 5.6 中建立起来的覆盖映照的一些性质.

设 $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$，并设 π：$\mathbb{R}\to S^1$ 是由

$$\pi(x)=(\cos x,\sin x),\quad x\in\mathbb{R}$$

给出的实直线$\mathbb{R}$对 S^1 的覆盖. 设 φ：$S^1\to S^1$ 是连续映照. φ 的度数定义如下. 映照 φ：$S^1\to S^1$ 中的第一个 S^1，可以看成是其端点 0 和 l 相重合的闭区间$[0,l]$. 于是，φ 便可当作连续映照 φ：$[0,l]\to S^1$，满足 $\varphi(0)=\varphi(l)=p\in S^1$. 这样一来，$\varphi$ 是 S^1 中 p 处的一条闭弧，根据 5.6 的命题 2，就能在满足 $\pi(x)=p$ 的 x 处，唯一地提升为一条从 x 出发的弧 $\tilde{\varphi}$：$[0,l]\to\mathbb{R}$. 因为 $\pi(\tilde{\varphi}(0))=\pi(\tilde{\varphi}(l))$，差值 $\tilde{\varphi}(l)-\tilde{\varphi}(0)$ 应是 2π 的整数倍. 由下式给定的整数 $\deg\varphi$，

$$\tilde{\varphi}(l)-\tilde{\varphi}(0)=(\deg\varphi)2\pi$$

称作 φ 的度数.

直观上说，$\deg\varphi$ 是 φ：$[0,l]\to S^1$ 把$[0,l]$绕 S^1 的"包围"次数(图 5-30). 注意，函数 $\tilde{\varphi}$：$[0,l]\to\mathbb{R}$ 就是连续确定由固定向量 $\varphi(0)-O$ 与 $\varphi(t)-O$ 决定的正角，这里的 $t\in[0,l]$，$O=(0,0)$. 例如，5.6 部分 A 中的例 4 所叙述的映照 π：$S^1\to S^1$，就具有度数 k.

我们必须说明，度数的定义与 p 及 x 的选取无关.

首先，$\deg\varphi$ 与 x 的选取无关. 事实上. 设 $x_1>x$ 是$\mathbb{R}$中满足 $\pi(x_1)=p$ 的一点，并设 $\tilde{\varphi}_1(t)=\tilde{\varphi}(t)+(x_1-x)$，$t\in[0,l]$. 因为 x_1-x 是 2π 的整数倍，所以 $\tilde{\varphi}_1$ 是 φ 从 x_1 出发的一种提升. 根据 5.6 命题 2 的唯一性部分，$\tilde{\varphi}_1$ 确是 φ 从 x_1 出发的提升. 因为

$$\tilde{\varphi}_1(l)-\tilde{\varphi}_1(0)=\tilde{\varphi}(l)-\tilde{\varphi}(0)=(\deg\varphi)2\pi$$

所以无论是关于 x 或是关于 x_1 计算，φ 的度数都是相同的.

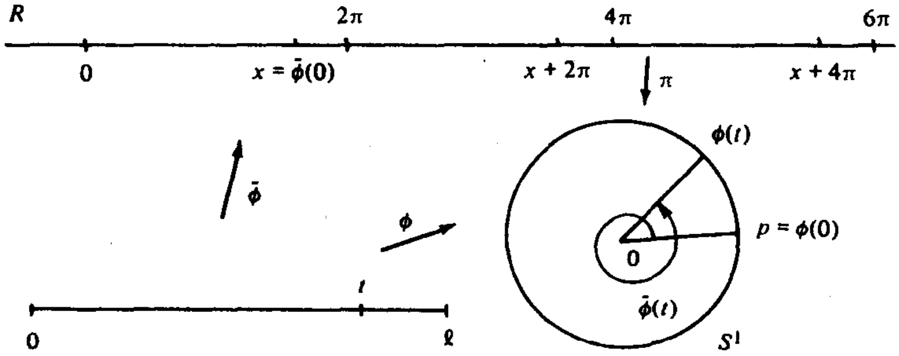


图 5-30

其次，$\deg\varphi$ 与 $p\in S^1$ 的选取无关．事实上，除了 p 的对径点以外，每一点 $p_1\in S^1$ 均属于 p 的特定邻域 U_1．在 $\pi^{-1}(U_1)$含 x 的连通分支中选取 x_1，使得 $\pi(x_1)=p_1$，并设 $\tilde{\varphi}_1$ 是

$$\varphi:[0,l]\to S^1,\quad \varphi(0)=p_1$$

从 x_1 出发的提升．显然，$|\tilde{\varphi}_1(0)-\tilde{\varphi}(0)|<2\pi$．由构造提升的一步步过程可以推出(参见 5.6，命题 2 的证明)．$|\tilde{\varphi}_1(l)-\tilde{\varphi}(l)|<2\pi$．因为两个差值 $\tilde{\varphi}(l)-\tilde{\varphi}(0)$，$\tilde{\varphi}_1(l)-\tilde{\varphi}_1(0)$都必须是 2π 的整数倍，它们的值实际上是相等的．根据连续性，这结论对 p 的对径点也成立，所以也就证明了我们的断言．

度数的最重要的性质，是它在同伦之下的不变性．说得更精确一些，设 φ_1，φ_2：$S^1\to S^1$ 是连续映照．固定点 $p\in S^1$，从而得到 p 点的两条闭弧 φ_1，φ_2：$[0,\ l]\to S^1$，$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=p$．如果 φ_1 与 φ_2 同伦，则 $\deg\varphi_1=\deg\varphi_2$．这可直接由如下的事实推出(5.6，命题 4)：$\varphi_1$ 和 φ_2 从固定点 $x\in\mathbb{R}$ 出发的提升也是同伦的，因而有相同的终点．

应该指出，如果 φ：$[0,\ l]\to S^1$ 可微，按 $\varphi(t)=(a(t),\ b(t))$就决定了两个可微函数 $a=a(t)$，$b=b(t)$，它们满足条件 $a^2+b^2=1$．这时，由 $\tilde{\varphi}_0=x$ 出发的提升 $\tilde{\varphi}$，正好是可微函数(参见 4.4，引理 1)

$$\tilde{\varphi}(t)=\tilde{\varphi}_0+\int_0^t(ab'-ba')dt$$

这件事可由提升的唯一性，以及 $\cos\tilde{\varphi}(t)=a$，$\sin\tilde{\varphi}(t)=b(t)$和 $\tilde{\varphi}(0)=\tilde{\varphi}_0$ 的事实推出．于是，在可微的情形，φ 的度数能用积分表示

$$\deg\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^l\frac{d\tilde{\varphi}}{dt}dt$$

度数的概念，已以后一形式在本书中反复出现过．例如，当 v：$U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，$U\subset S^1$，是向量场，而(0，0)是其仅有的奇点时，$v$ 在(0，0)的指标(参见 4.5，应用 5)可以解释为由 $\varphi(p)=v(p)/|v(p)|$，$p\in S^1$，给出的映照 φ：$S^1\to S^1$ 的度数．

在讨论进一步的例子之前，我们来回忆一下，所谓(可微)闭曲线是指可微映照 α：$[0,\ l]\to\mathbb{R}^3$(或$\mathbb{R}^2$，如果它是平面曲线的话)，使得 α 的分量，以及 α 的各阶导数，在 0 与 l 处相等．若 $\alpha'(t)\neq0$ 对一切 $t\in[0,\ l]$成立，曲线 α 便是正则的；若只要 $t_1\neq t_2$，t_1，$t_2\in[0,\ l)$，就有 $\alpha(t_1)\neq\alpha(t_2)$，曲线 α 便是简单的．有时候，较适宜的是仅仅假定 α 连续；这时，我们就直接

说明，α 是一条连续闭曲线.

例 1(曲线的环绕数) 设 α：$[0, l]\to\mathbb{R}^2$ 是平面上的连续闭曲线. 选取点 $p_0\in\mathbb{R}^2$，使得 $p_0\notin\alpha([0, l])$，并设 φ：$[0, l]\to S^1$ 由

$$\varphi(t)=\frac{\alpha(t)-p_0}{|\alpha(t)-p_0|},\quad t\in[0,l]$$

给定. 显然，$\varphi(0)=\varphi(l)$，故 φ 可看作 S^1 到 S^1 的映照；它称作 α 关于 p_0 的位置映照. φ 的度数叫做曲线 α 关于 p_0 的环绕数(或指标)(图 5-31)

注意，如果沿与 $\alpha([0, l])$不相交的弧 β 移动 p_0，则环绕数保持不变. 其实，α 关于 β 上任意两点的位置映照，显然可用一个同伦连接. 由此可知，当 q 在$\mathbb{R}^2-\alpha([0, l])$的连通分支中变化时，$\alpha$ 关于 q 的环绕数保持不变.

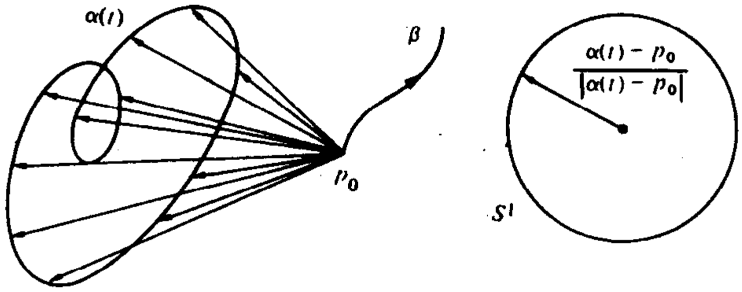


图 5-31

例 2(曲线的旋转指标) 设 α：$[0, l]\to\mathbb{R}^2$ 是正则平面闭曲线，并设 φ：$[0, l]\to S^1$ 为

$$\varphi(t)=\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|},\quad t\in[0,l]$$

显然，φ 是可微的，且 $\varphi(0)=\varphi(l)$. φ 称做 α 的切映照，而 φ 的度数则称作 α 的旋转指标. 在直观上，闭曲线的旋转指标是沿曲线的切向量场转动的整周数(见 1.7 图 1-27).

旋转指标的概念，利用顶点处的交角(见 4.5)，可推广到分段正则曲线的情形，并能证明：分段正则的简单闭曲线，它的旋转指标是±1(切线回转定理). 这个事实已在 Gauss-Bonnet 定理的证明中用到过. 在本节的后面部分，我们将证明切线回转定理的可微说法.

我们的第一个整体性定理，就是所谓 Jordan 曲线定理的可微说法. 在证明中，我们将假定读者已熟悉 2.7 的内容.

定理 1(可微分的 Jordan 曲线定理) 设 α：$[0, l]\to\mathbb{R}^2$ 是平面正则简单闭曲线. 则$\mathbb{R}^2-\alpha([0, l])$恰有两个连通分支，且以 $\alpha([0, l])$为它们的公共边界.

证明 设 $N_\varepsilon(\alpha)$是 $\alpha([0, l])$的管状邻域. 它的构造方法，与紧致曲面的管状邻域的构造方法相同(参见 2.7). 我们来回忆一下，$N_\varepsilon(\alpha)$是以 $\alpha(t)$为中心，长度为 2ε 的开法线段 $I_\varepsilon(t)$的并集. 显然，$N_\varepsilon(\alpha)-\alpha([0, l])$有两个连通分支 T_1 和 T_2. 用 $w(p)$表示 α 关于 $p\in\mathbb{R}^2-\alpha([0, l])$的环绕数. 证明的关键点在于说明：如果 p_1 与 p_2 属于 $N_\varepsilon(\alpha)-\alpha([0, l])$的不同连通分支，但属于同一个 $I_\varepsilon(t_0)$，$t_0\in[0, l]$，则 $w(p_1)-w(p_2)=\pm1$，符号依赖于 α 的定向.

选取邻近于 $\alpha(t_0)$的点 $A=\alpha(t_1)$和 $D=\alpha(t_2)$，$t_1<t_0<t_2$，使得 α 上的 AD 弧，能够同伦地

形变到图 5-32 的多边形 $ABCD$ 上去. 这里，BC 是 $\alpha(t_0)$处的切线段，而 BA 与 CD 则平行于 $\alpha(t_0)$处的法线.

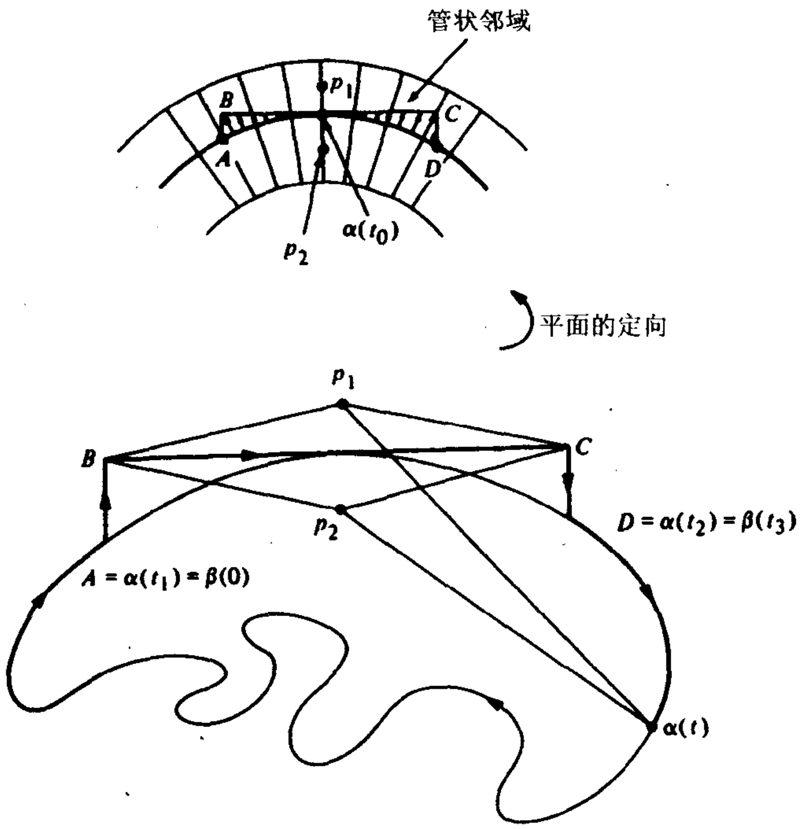


图 5-32

设 β: $[0,\ \bar{l}]\to\mathbb{R}^2$ 表示用多边形 $ABCD$ 代换 α 上的 $\widehat{AD}$ 弧后所得的曲线，且我们假定 $\beta(0)=\beta(\bar{l})=A$，而 $\beta(t_3)=D$. 显然，$w(p_1)$与 $w(p_2)$保持不变.

设 φ_1，φ_2：$[0,\ \bar{l}]\to S^1$ 分别是 β 关于 p_1，p_2 的位置映照(参见例 1)，并设 $\tilde{\varphi}_1$，$\tilde{\varphi}_2$：$[0,\ \bar{l}]$是它们从一个固定点，比如 $0\in\mathbb{R}$，出发的提升. 为方便计，我们假定 β 的定向如图 5-32 所给定.

首先注意，若 $t\in[t_3,\ \bar{l}]$，则 $\alpha(t)$到 p_1 和 p_2 的距离，都以一个与 t 无关的数作为下界，这个数就是两个距离 $\mathrm{dist}(p_1,\ BdN_\varepsilon(\alpha))$和 $\mathrm{dist}(p_2,\ BdN_\varepsilon(\alpha))$中最小的一个. 由此可知，当 p_1 趋于 p_2 时，$\alpha(t)-p_1$ 与 $\alpha(t)-p_2$ 的交角在$[t_3,\ \bar{l}]$中一致趋于零.

现在就很清楚，能把 p_1 和 p_2 选取得充分接近，使得 $\tilde{\varphi}_1(t_3)-\tilde{\varphi}_1(0)=\pi-\varepsilon_1$，$\tilde{\varphi}_2(t_3)-\tilde{\varphi}_2(0)=-(\pi+\varepsilon_2)$，这里的 ε_1 和 ε_2 小于 $\pi/3$. 而且，

$$\begin{aligned}2\pi(w(p_1)-w(p_2)) &= (\tilde{\varphi}_1(\bar{l})-\tilde{\varphi}_1(0))-(\tilde{\varphi}_2(\bar{l})-\tilde{\varphi}_2(0))\\ &=\{(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)(\bar{l})-(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)(t_3)\}\\ &\quad+\{(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)(t_3)-(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)(0)\}\end{aligned}$$

根据上述的注意，当 p_1 充分接近于 p_2 时，第一项可以任意小，比如等于 $\varepsilon_3<\pi/3$. 于是

$$2\pi(w(p_1)-w(p_2))=\varepsilon_3+\pi-\varepsilon_1-(-\pi-\varepsilon_2)=2\pi+\varepsilon$$

其中的 $\varepsilon<\pi$，如果 p_1 充分接近于 p_2 的话，由此推出 $w(p_1)-w(p_2)=1$，符合我们的断言.

要完成证明现在就比较容易了. 因为 $w(p)$ 在 $\mathbb{R}^2\to\alpha([0, l])=W$ 的每个连通分支上是常数，由上可知，W 中至少有两个连通分支. 我们来说明这种分支恰好有两个.

事实上，设 C 是 W 的连通分支. 显然，$\mathrm{Bd}C\neq\varnothing$，且 $\mathrm{Bd}C\subset\alpha([0, l])$. 另一方面，若 $p\in\alpha([0, l])$，p 就有一邻域，它只含 $\alpha([0, l])$、T_1 和 T_2 中的点（T_1 与 T_2 是 $N_\varepsilon(\alpha)-\alpha([0, l])$ 的连通分支）. 从而，或者 T_1，或者 T_2，总要和 C 相交，由于 C 是连通分支，$C\supset T_1$ 或者 $C\supset T_2$. 所以，W 至多只有两个（因此，恰好是两个）连通分支. 把它们记作 C_1 和 C_2. 上面的论证也说明 $\mathrm{Bd}C_1=\alpha([0, l])=\mathrm{Bd}C_2$. 证毕.

定理 1 给出的两个连通分支是容易区分的. 首先我们看到，如果 p_0 在包含 $\alpha([0, l])$ 的闭圆盘 D（因为 $[0, l]$ 紧致，这种圆盘存在）的外部，则 α 关于 p_0 的环绕数是零. 这是由如下的事实推出的：连接 p_0 和 $\alpha(t)$，$t\in[0, l]$ 的直线，都落在由 p_0 到圆周 $\mathrm{Bd}D$ 的两条切线所限定的、包含 D 的一个区域内. 这样一来，环绕数为零的连通分支是无界的，且包含某一确定圆盘外的所有点. 很清楚，余下的连通分支的环绕数为 ±1，且为有界. 通常分别把它们称做 α 的外部和 α 的内部.

注 1 在 Gauss-Bonnet 定理的应用（4.5）中已用过的，上述定理的一个有用的补充是：α 的内部同胚于一个开圆盘. 它的证明能在 J. J. Stoker，Differential Geometry，Wiley-Interscience，New York，1969，43～45 中找到.

我们现在来证明切线回转定理的可微说法.

定理 2 设 β: $[0, l]\to\mathbb{R}^2$ 是平面正则简单闭曲线. 则 β 的旋转指标是 ±1（符号取决于 β 的定向）.

证明 考虑一条与该曲线不相交的直线，平行移动这条直线，直至它和这条曲线相切. 这时的直线位置记为 l，曲线与 l 的切点则记为 p. 显然，整条曲线落在 l 的一边（图 5-33）. 选取这条曲线的一个新的参数表示 α: $[0, l]\to\mathrm{R}^2$，使得 $\alpha(0)=p$，现在

设
$$T=\{(t_1,t_2)\in[0,l]\times[0,l];0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant l\}$$
为三角形区域，并定义“割线映照”ψ: $T\to S^1$ 为

$$\psi(t_1,t_2)=\frac{\alpha(t_2)-\alpha(t_1)}{|\alpha(t_2)-\alpha(t_1)|},\quad t_1\neq t_2,\quad (t_1,t_2)\in T-\{(0,l)\}$$

$$\psi(t,t)=\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|},\quad \psi(0,l)=-\frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|}$$

因为 α 正则，容易看出 ψ 是连续的. 设 $A=(0, 0)$，$B=(0, l)$，$C=(l, l)$ 是三角形 T 的顶点. 注意，ψ 限制到 AC 边上时，是 α 的切映照，它的度数是 α 的旋转指标. 显然（图 5-33），这个切映照与 ψ 在其余两边 AB 和 BC 上的限制同伦. 这样一来，问题就化为证明后一映照的度数是 ±1.

假定平面和曲线的定向取得使 $\alpha'(0)$ 到 $-\alpha'(0)$ 的有向角为 π. 这时，ψ 在 AB 上的限制按正方向覆盖了半个 S^1，而 ψ 在 BC 上的限制，也按正方向覆盖了 S^1 余下的一半（图 5-33）. 于是，ψ 在 AB 与 BC 上的限制的度数是 $+1$. 把定向倒过来，这个度数就是 -1，从而完成了证明. 证毕.

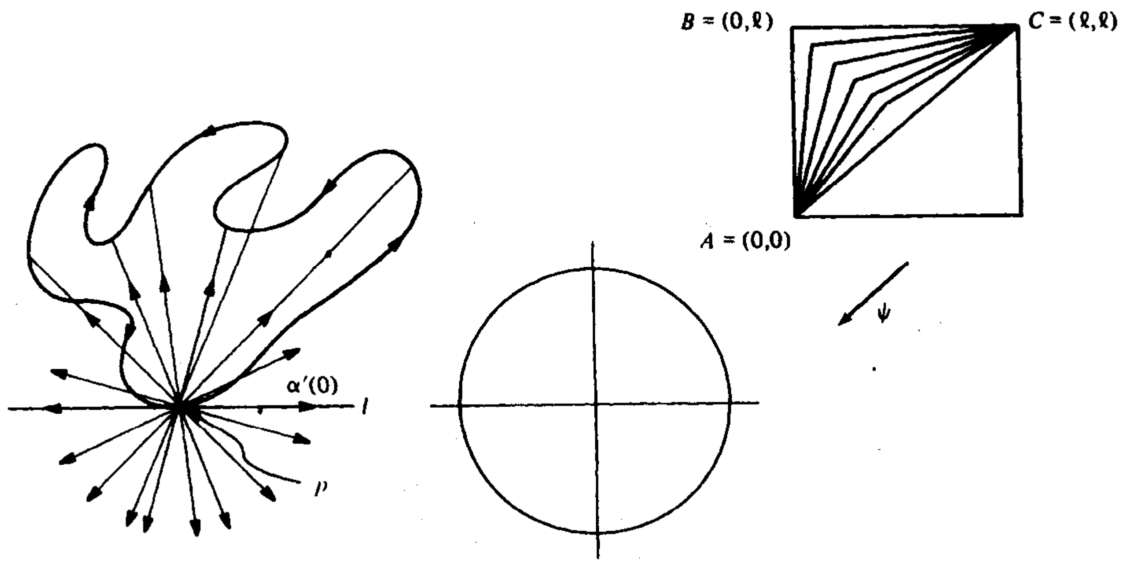
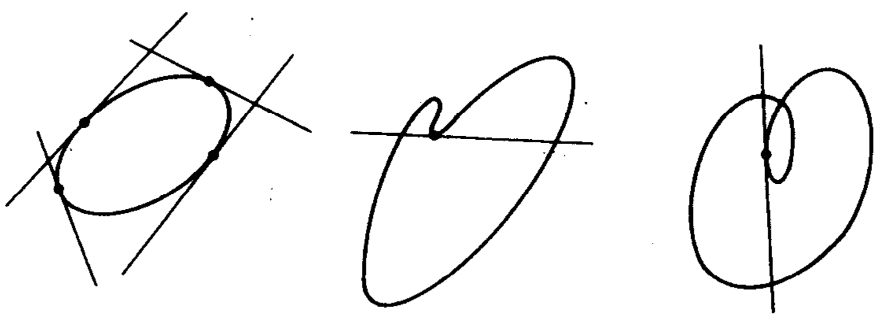


图 5-33

切线回转定理能用来给出一类重要的曲线，即凸曲线的特征.

设 α: $[0, l]\to\mathbb{R}^2$ 是平面正则闭曲线，如果对每个 $t\in[0, l]$，这条曲线总落在由 t 处的切线决定的某一闭半平面中，α 就称为凸曲线(图 5-34；也可参见 1.7). 如果 α 是简单曲线，凸性就可用曲率来表示. 回忆一下，对平面曲线，曲率总是指带符号的曲率(1.5，注 1).



(a) (b) (c)

凸曲线 非凸曲线

图 5-34

命题 1 平面正则闭曲线为凸曲线的充要条件是，它为简单曲线，且其曲率 k 不变号.

证明 设 φ: $[0, l]\to S^1$ 是 α 的切映照，且 $\tilde{\varphi}$: $[0, l]\to\mathbb{R}$ 是 φ 的从 $0\in\mathbb{R}$ 出发的提升. 首先指出，k 不变号的条件与 $\tilde{\varphi}$ 为单调($k\geqslant 0$ 时非递减，$k\leqslant 0$ 时非递增)的条件等价.

现在假设 α 为简单曲线，且 k 不变号. 我们可把曲线所在平面的定向取得使 $k\geqslant 0$. 假定 α 不是凸曲线. 这时就存在 $t_0\in[0, l]$，使得在 $\alpha(t_0)$ 处的切线 T 的两边，均能找到 $\alpha([0, l])$ 中的点. 设 $n=n(t_0)$ 是 t_0 处的法向量，并令

$$h_n(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), n\rangle, \quad t\in[0,l]$$

因为$[0, l]$紧致，且 T 的两边都有曲线上的点，所以“高度函数”h_n 就在 $t_1\neq t_0$ 有最大值，在

$t_2 \neq t_0$ 有最小值. t_0，t_1，t_2 处的切向量都是平行的，所以其中有两个，比如 $\alpha'(t_0)$，$\alpha'(t_1)$就具有相同的方向. 因此，$\varphi(t_0)=\varphi(t_1)$，而且，根据定理 2($\alpha$ 为简单曲线)，$\tilde{\varphi}(t_0)=\tilde{\varphi}(t_1)$. 让我们假定 $t_1>t_0$. 根据前面指出的事实，$\tilde{\varphi}$ 单调非递减，因此在$[t_0, t_1]$上为常值. 这件事意味着 $\alpha([t_0, t_1])\subset T$. 但这与 T 的选取是矛盾的，所以就证明了 α 是凸曲线.

反过来，假定 α 是凸曲线. 作为习题我们让读者证明：如果 α 不是简单曲线，则在自身的交点(图 5-35(a))，或在其附近(图 5-35(b))，凸性就要受到破坏. 所以，α 是简单曲线.

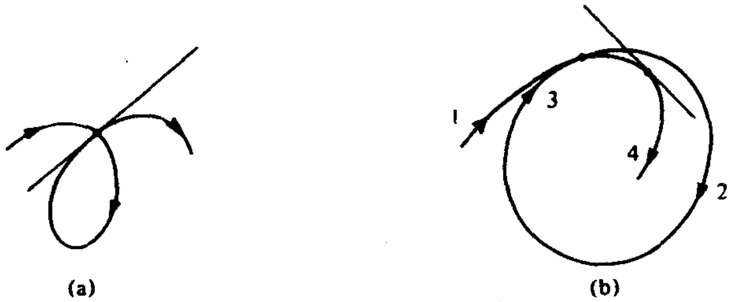


图 5-35

现在我们假定 α 是凸曲线，但 k 在$[0, l]$中变号. 这时就存在两点 t_1，$t_2\in[0, l]$，$t_1<t_2$，使得 $\tilde{\varphi}(t_1)=\tilde{\varphi}(t_2)$，但 $\tilde{\varphi}$ 在$[t_1, t_2]$中不取常值.

我们来说明这会导致矛盾，从而也就完成证明. 根据定理 2，存在 $t_3\in[0, l)$使得 $\varphi(t_3)=-\varphi(t_1)$. 根据凸性，在 $\alpha(t_1)$，$\alpha(t_2)$，$\alpha(t_3)$处的三条平行切线中，有两条必须重合. 假定重合的两切线切点是 $\alpha(t_1)=p$，$\alpha(t_3)=q$，$t_3>t_1$. 我们说，α 在 p 与 q 之间的一段弧必定是直线段 pq.

事实上，假定 $r\neq q$ 是这段弧为直线段的最后一点(r 可能与 p 重合). 因为这条曲线落在直线 pq 的同一边，容易看出，在 p 附近有一条切线 T 将在一个内点穿过线段$\overline{pq}$(图 5-36). 这时 p 与 q 就落在 T 的不同的两边. 这是矛盾的，因而证明了我们的断言.

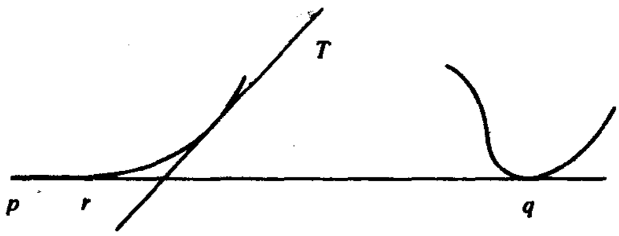


图 5-36

由此可知，重合的切线有相同的方向；也就是说，它们确定是 $\alpha(t_1)$和 $\alpha(t_2)$处的切线. 从而，$\tilde{\varphi}$ 在$[t_1, t_2]$中取常值，这个矛盾就证实了 k 在$[0, l]$中不变号. 证毕.

注 2 如图 5-34(c)的曲线例子所示，α 为简单曲线的条件对这命题是不可少的.

注 3 应该把这个命题与 5.6 的注 2 和注 3 作比较；那儿说的是对曲面也有类似的情况. 要注意的是，在曲面的情形，自身相交的不存在并不是假定，而是结论.

注 4 可以证明：平面正则闭曲线为凸曲线的充要条件是，它的内部为凸集 $K\subset\mathbb{R}^2$(参见

习题 4).

现在，我们将把注意力转向空间曲线. 以后曲线这个词将意味着以弧长 s 为参数的正则参数曲线 α：$[0, l]\to\mathbb{R}^3$. 若 α 是平面曲线，曲率 $k(s)$ 是指 α 带符号的曲率(参见 1.5)；否则，$k(s)$ 就假定为对一切 $s\in[0, l]$ 都是正的. 把积分

$$\int_0^l |k(s)|ds$$

称为 α 的全曲率是较合适的.

关于空间曲线最著名的整体性定理，可能要算是所谓的 Fenchel 定理了.

定理 3(Fenchel 定理) 简单闭曲线的全曲率总是 $\geqslant 2\pi$. 等号在且仅在曲线为平面凸曲线时成立.

在开始证明以前，我们来引进一张辅助曲面，它在证明定理 4 时也是有用的.

围绕曲线 α 的半径为 r 的管道，是指参数曲面

$$X(s,v)=\alpha(s)+r(n\cos v+b\sin v),\quad s\in[0,l],\quad v\in[0,2\pi]$$

这里的 $n=n(s)$ 和 $b=b(s)$，分别是 α 的主法向量和从法向量. 容易验证

$$|X_s\wedge X_v|=EG-F^2=r^2(1-rk\cos v)^2$$

我们假定 r 充分小，使得 $rk_0<1$，这里的 $k_0=\max|k(s)|$，$s\in[0, l]$. 这时 x 便为正则，而且通过直接计算有

$$N=-(n\cos v+b\sin v)$$
$$X_s\wedge X_v=r(1-rk\cos v)N$$
$$N_s\wedge N_v=k\cos v(n\cos v+b\sin v)=-kN\cos v$$
$$=-\frac{k\cos v}{r(1-rk\cos v)}X_v\wedge X_s$$

由此可知，这个管道的 Gauss 曲率 $K=K(s, v)$ 是

$$K(s,v)=-\frac{k\cos v}{r(1-rk\cos v)}$$

注意，X 的轨迹 T 可能会自身相交. 但是，如果 α 为简单曲线，就可以把 r 取得足够小，使得这种情况不会发生；我们可利用$[0, l]$的紧致性，如同 2.7 中构造管状邻域的情形那样，来做到这一点. 另外，如果 α 是闭曲线，T 就是同胚于环面的正则曲面，也称做围绕 α 的管道. 以下，我们总假定是这种情形.

定理 3 的证明 设 T 是围绕 α 的管道，设 $R\subset T$ 是 T 中 Gauss 曲率非负的区域. 一方面

$$\iint_R Kd\sigma=\iint_R K\sqrt{EG-F^2}dsdv$$
$$=\int_0^l kds\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos v dv=2\int_0^l k(s)ds$$

另一方面，过$\mathbb{R}^3$ 原点的每条半直线 L，至少可作为 R 上的一个法方向. 这是因为如果我们取垂直于 L 的平面 P，使得 $P\cap T=\varnothing$，并将 P 朝 T 平行移动(图 5-37)，在它最初与 T 相遇的点上，就有 $K\geqslant 0$.

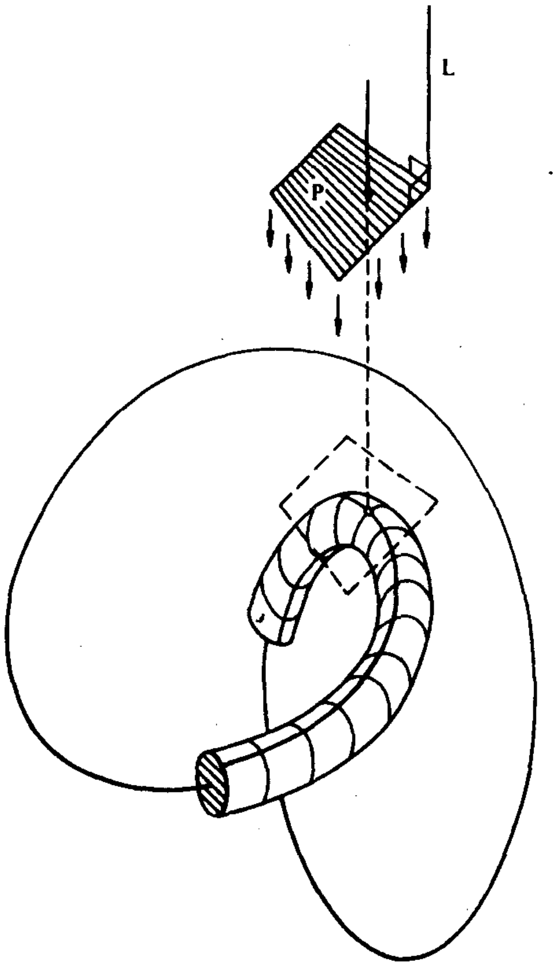


图 5-37

由此可知，R 的 Gauss 映照 N 把整个单位球面 S^2 至少覆盖一次；因而 $\iint_R K d\sigma \geqslant 4\pi$. 所以 α 的全曲率 $\geqslant 2\pi$，我们已经证明了定理 3 的第一部分.

我们看到，Gauss 映照 N 限制到每个圆周 $s=$ 常数上是 1 对 1 的，而且它的象是大圆 $\Gamma_s \subset S^2$. 我们将用 $\Gamma_s^+ \subset \Gamma_s$ 来表示对应于 $K \geqslant 0$ 点的闭半圆周.

假定 α 是平面凸曲线. 这时，所有的 Γ_s^+ 就有相同的端点 p，q，而且，根据凸性，对 $s_1 \neq s_2$，s_1，$s_2 \in [0, l)$ 有 $\Gamma_{s_1}^+ \cap \Gamma_{s_2}^+ = \{p\} \cup \{q\}$. 由定理的第一部分推出，$\iint_R K d\sigma = 4\pi$；因此，$\alpha$ 的全曲率等于 2π.

现在假定 α 的全曲率等于 2π. 由定理的第一部分知，

$$\iint_R K d\sigma = 4\pi$$

我们说，这时所有的 Γ_s^+ 就有相同的端点 p 和 q. 不然的话，就存在两个不同的大圆 Γ_{s_1} 和 Γ_{s_2}，s_1 任意接近于 s_2，它们在不属于 $N(R \cap Q)$ 的两个对径点相交，这里的 Q 是 T 中具有非正曲率

的点集. 由此可知，存在两个正曲率的点，它们被 N 映成 S^2 中的单独一点，因为 N 在这种点上是局部微分同胚，并且 S^2 中的每一点至少是 R 中一个点的象，我们就得到 $\iint_R Kd\sigma > 4\pi$，这是矛盾的.

由于我们看到，T 中 Gauss 曲率为零的点是 α 的从法线与 T 的交点，所以 α 的从法向量就与直线 pq 平行. 这样一来，α 就落在与这条直线垂直的平面上.

最后我们来证明 α 是凸曲线. 我们可假定 α 的定向取得使它的旋转指标为正. 因为 α 的全曲率是 2π，所以有

$$2\pi = \int_0^l |k| ds \geqslant \int_0^l kds$$

另一方面，

$$\int_J kds \geqslant 2\pi$$

这里的 $J = \{s \in [0, l]; k(s) \geqslant 0\}$. 这个不等式对任何平面闭曲线都是成立的，它可以用本证明开头时对 $R \subset T$ 用过的完全类似的论证办法推得. 这样一来

$$\int_0^l kds = \int_0^l |k| ds = 2\pi$$

所以，$k \geqslant 0$，因而 α 是平面凸曲线. 证毕.

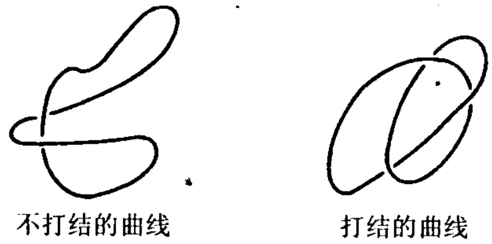
注 5 不难看出，即使 α 不是简单曲线，证明还是通得过的. 这时的管道将有自身交点，但这对证明是没有关系的. 在证明的最后一步(α 的凸性)，必须看到，我们实际上已经证明 α 是非负地弯曲的，并且它的旋转指标等于 1. 回顾命题 1 证明的第一部分，容易看出，这就蕴涵了 α 是凸曲线.

我们要利用证明 Fenchel 定理的方法得到更强的结果：如果空间曲线是打结曲线(马上要定义的一个概念)，那么其全曲率事实上大于或等于 4π.

一条简单闭的连续曲线 $C \subset \mathbb{R}^3$ 称作**不打结的曲线**，如果存在同伦 $H: S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$，$I = [0, 1]$，使得

$$H(S^1 \times \{0\}) = S^1$$
$$H(S^1 \times \{1\}) = C$$
$$\text{且} \quad H(S^1 \times \{t\}) = C_t \subset \mathbb{R}^3$$

对一切 $t \in [0, 1]$ 与 S^1 同胚. 在直观上，这意味着 C 能连续地形变到圆周 S^1 上去，使得每一个中间位置都与 S^1 同胚. 这种同伦称为**合痕**；于是不打结曲线与 S^1 合痕. 不然的话，C 就称作**打结曲线**(图 5-38)



不打结的曲线 打结的曲线

图 5-38

定理 4(Fary-Milnor) 打结简单闭曲线的全曲率大于等于 4π.

证明 设 $C=\alpha([0, l])$，T 是围绕 α 的管道，并设 $R\subset T$ 是 T 中 $K\geqslant 0$ 的区域. 设 $b=b(s)$ 是 α 的从法向量，并设 $v\in\mathbb{R}^3$ 是单位向量，对一切 $s\in[0, l]$ 满足 $v\neq b(s)$. 设 h_v：$[0, l]\to\mathbb{R}$ 是 α 沿 v 方向的高度函数；也就是 $h_v(s)=\langle\alpha(s)-0, v\rangle$，$s\in[0, l]$. 很清楚，$s$ 为 h_v 的临界点的充要条件是 v 垂直于 $\alpha(s)$ 处的切线. 而且，在临界点有

$$\frac{d^2}{ds^2}(h_v)=\left\langle\frac{d^2\alpha}{ds^2}, v\right\rangle=k\langle n, v\rangle\neq 0$$

这是因为对一切 s，$v\neq b(s)$ 且 $k>0$. 于是，h_v 的临界点就或者是极大值点，或者是极小值点.

现在，假定 α 的全曲率小于 4π. 这便意味着

$$\iint_R K d\sigma = 2\int k ds < 8\pi$$

我们断言，对某个 $v_0\notin b([0, l])$，h_{v_0} 恰好有两个临界点(因为 $[0, l]$ 紧致，这两点就对应于 h_{v_0} 的最大值点和最小值点). 不然的话，这时对每个 $v\notin b([0, l])$，h_v 就至少有三个临界点. 我们将假定其中有两点 s_1 和 s_2 是极小值点，极大值点的情形可类似处理.

考虑与 v 垂直，且 $P\cap T=\varnothing$ 的平面 P，将它朝 T 平行移动. 这时有两种情形：或者是 $h_v(s_1)=h_v(s_2)$，或者是，比如说，$h_v(s_1)<h_v(s_2)$. 在第一种情形，P 在两点 $q_1\neq q_2$ 处与 T 相遇，并且由于 $v\notin b([0, l])$，$K(q_1)$ 和 $K(q_2)$ 为正. 在第二种情形，P 在遇到 $\alpha(s_1)$ 之前，将与 T 在满足 $K(q_1)>0$ 的点 q_1 处相遇. 考虑另一张平面 $\overline{P}$，它与 P 平行，且在 P 上方相距 r 的地方(r 是管道 T 的半径). 将 $\overline{P}$ 进一步往上移，直至它到达 $\alpha(s_2)$ 处；这时 P 就在点 $q_2\neq q_1$ 处与 T 相遇(图 5-39). 因为 s_2 是极小值点，且 $v\notin b([0, l])$，所以 $K(q_2)>0$. 于是无论在何种情形，在 T 中总有使 $K>0$ 的两个不同点，并且 N 将它们映成 S^2 中的单独一点. 这与 $\iint_R K d\sigma < 8\pi$ 的事实是相矛盾的. 因而证实了我们的断言.

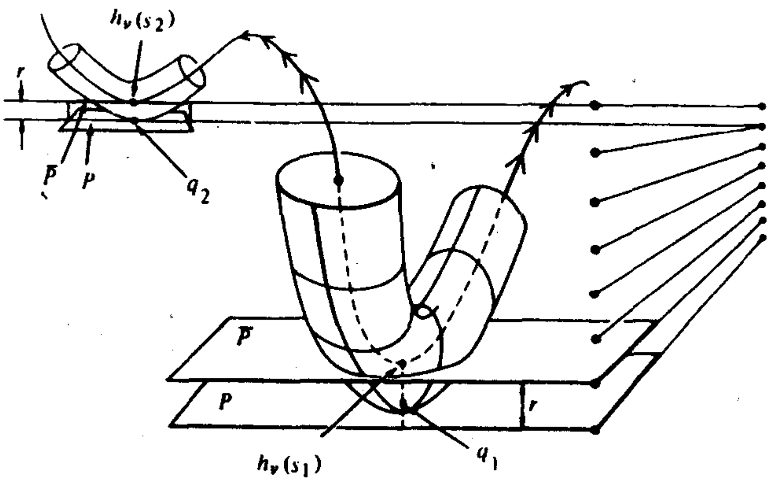


图 5-39

设 s_1 和 s_2 是 h_{v_0} 的临界点，并设 P_1 和 P_2 是与 v_0 垂直，且分别经过 $\alpha(s_1)$ 和 $\alpha(s_2)$ 的两张平面. 与 v_0 平行且在 P_1 与 P_2 之间的每一张平面，与 C 将恰好交于两点. 用直线段把这些点

对连接起来，就生成一张以 C 为边界的曲面，容易看出它与圆盘是同胚的. 这样一来，C 便是不打结曲线，这个矛盾就完成了定理的证明. 证毕.

习题

1. 决定图 5-40 中曲线(a)，(b)，(c)和(d)的旋转指标.

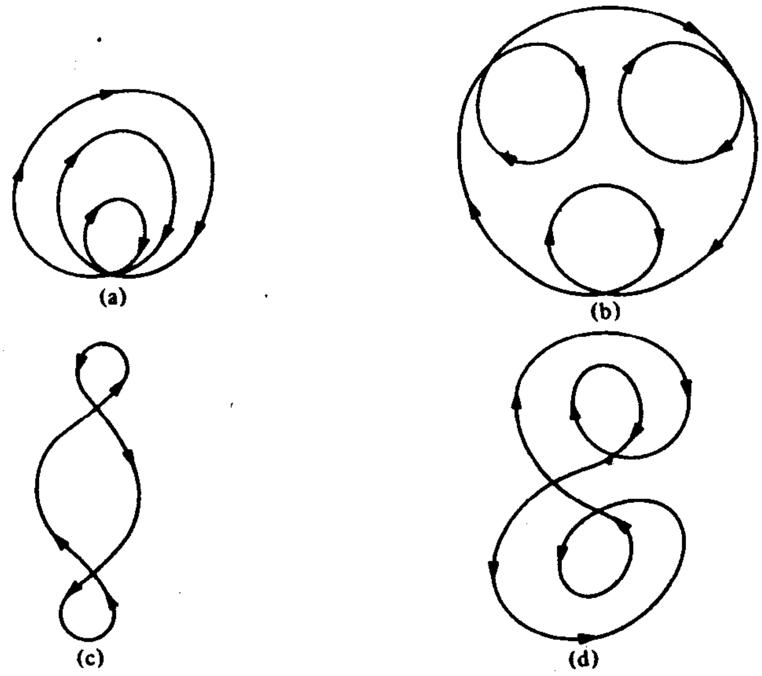


图 5-40

2. 设 $\alpha(t)=(x(t),\ y(t))$，$t\in[0,\ l]$是可微平面闭曲线. 设 $p_0=(x_0,\ y_0)\in\mathbb{R}^2$，$(x_0,\ y_0)\notin\alpha([0,\ l])$，并定义函数

$$a(t)=\frac{x(t)-x_0}{\{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2\}^{1/2}}$$

$$b(t)=\frac{y(t)-y_0}{\{(x(t_0)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2\}^{1/2}}$$

a. 利用 4.4 的引理 1 证明：可微函数

$$\varphi(t)=\varphi_0+\int_0^t(ab'-ba')dt,\quad a'=\frac{da}{dt},\quad b'=\frac{db}{dt}$$

测定了 x 轴与位置向量$(\alpha(t)-p_0)/|\alpha(t)-p_0|$的交角.

b. 利用 a 证明：当 α 是可微平面闭曲线时，α 关于 p_0 的环绕数是积分

$$w=\frac{1}{2\pi}\int_0^l(ab'-ba')dt$$

3. 设 α：$[0.\ l]\to\mathbb{R}^2$ 与 β：$[0,\ l]\to\mathbb{R}^2$ 是两条可微平面闭曲线，并设点 $p_0\in\mathbb{R}^2$ 满足 $p_0\notin\alpha([0,\ l])$和$p_0\notin\beta([0,\ l])$. 假定，对每个 $t\in[0,\ l]$，$\alpha(t)$和 $\beta(t)$这两点的距离比 $\alpha(t)$和 p_0 这两点的距离近；即

$$|\alpha(t)-\beta(t)|<|\alpha(t)-p_0|$$

利用习题 2 证明：α 关于 p_0 的环绕数等于 β 关于 p_0 的环绕数.

4. a. 设正则平面闭曲线 C 是凸曲线. 因为 C 为简单曲线，根据 Jordan 曲线定理，它就决定一个内部区域 $K\subset\mathbb{R}^2$. 证明：K 是凸集(即，给定 p，$q\in K$，直线段 $\overline{pq}$ 仍包含在 K 中；参见 1.7，习题 9).

b. 反之，设 C 是正则平面曲线(不一定是闭的)，并假定 C 是凸区域的边界. 证明：C 是凸曲线.

5. 设 C 是正则平面凸闭曲线. 根据习题 4，C 的内部 K 是凸集. 设 $p_0\in K$，$p_0\notin C$.

a. 证明：连接 p_0 和任意点 $q\in C$ 的直线，在 q 点不与 C 相切.

b. 由 a 推出，C 的旋转指标等于 C 关于 p_0 的环绕数.

c. 由 b 推出下列事实的一种简单证明：凸闭曲线的旋转指标等于 ±1.

6. 设 α：$[0,l]\to\mathbb{R}^3$ 是以弧长为参数的正则闭曲线. 假定对一切 $s\in[0,l]$，$0\neq|k(s)|\leqslant1$. 证明：$l\geqslant2\pi$，且 $l=2\pi$ 时 α 为平面凸曲线.

7.(平面曲线的 Schur 定理) 设 α：$[0,l]\to\mathbb{R}^2$ 和 $\tilde{\alpha}$：$[0,l]\to\mathbb{R}^2$ 是两条以弧长作参数的平面凸曲线，两者具有相同的长度 l. 分别用 k 和 $\tilde{k}$ 来记 α 和 $\tilde{\alpha}$ 的曲率，并分别用 d 和 $\tilde{d}$ 记 α 和 $\tilde{\alpha}$ 的弦长；即，

$$d(s)=|\alpha(s)-\alpha(0)|,\quad \tilde{d}(s)=|\tilde{\alpha}(s)-\tilde{\alpha}(0)|$$

假定 $k(s)\geqslant\tilde{k}(s)$，$s\in[0,l]$. 我们要证明 $d(s)\leqslant\tilde{d}(s)$，$s\in[0,l]$(也就是，若我们把曲线拉直，它的弦就要变长)，并且等号对任 $s\in[0,l]$成立的充要条件是，这两条曲线相差一个刚体运动. 我们指出，这条定理能推广到 $\tilde{\alpha}$ 是空间曲线的情形，它还有许多应用. 比较 S. S. Chern[10].

下列的纲要或许会有帮助.

a. 固定点 $s=s_1$. 把两条曲线 $\alpha(s)=(x(s),y(s))$，$\tilde{\alpha}(s)=(\tilde{x}(s),\tilde{y}(s))$都放到下半平面 $y\leqslant0$ 中去，使得 $\alpha(0)$，$\alpha(s_1)$，$\tilde{\alpha}(0)$和 $\tilde{\alpha}(s_1)$落在 x 轴上，并且 $x(s_1)>x(0)$，$\tilde{x}(s_1)>\tilde{x}(0)$(见图 5-41). 设 $s_0\in[0,s_1]$能使 $\alpha'(s_0)$与 x 轴平行. 选取函数 $\theta(s)$，它可微地测定了 x 轴和 $\alpha'(s)$的交角，并有 $\theta(s_0)=0$. 根据凸性证明：$-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$.

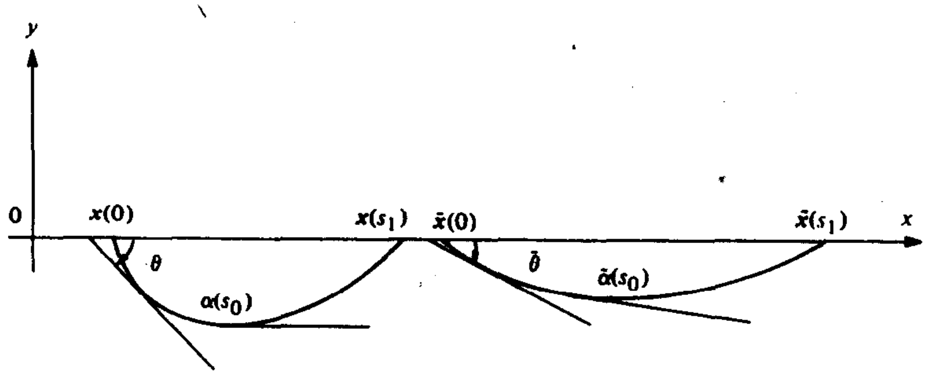


图 5-41

b. 设 $\tilde{\theta}(s)$，$\tilde{\theta}(s_0)=0$ 是 x 轴与 $\tilde{\alpha}'(s)$所成角度的一种可微分的测定方式．（注意，$\tilde{\alpha}'(s_0)$可以不平行于 x 轴.）证明：$\tilde{\theta}(s)\leqslant\theta(s)$，并利用 α 得出

$$d(s_1)=\int_0^{s_1}\cos\theta(s)ds\leqslant\int_0^{s_1}\cos\tilde{\theta}(s)ds\leqslant\tilde{d}(s_1)$$

等式的情形，只要把你的证明步骤倒回去，并且利用平面曲线的唯一性定理.

8.(平面曲线的 Stoker 定理) 设 $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 是以弧长为参数的正则平面曲线，假定 α 满足下面的条件：

1. α 的曲率严格为正.
2. $\lim\limits_{s\to\pm\infty}|\alpha(s)|=\infty$；也就是曲线沿两个方向都向无穷远延伸.
3. α 自身不相交.

这道题的目的是证明：α 的全曲率$\leqslant\pi$.

下面的提示可能会有助于证明．假定全曲率$>\pi$ 而 α 自身不相交．用下列的步骤来导出矛盾：

a. 证明：存在两点，比如是 $p=\alpha(0)$，$q=\alpha(s_1)$，$s_1>0$，使得分别在点 p，q 的切线 T_p，T_q 相互平行，而且在弧 $\alpha((0, s_1))$中不存在平行于 T_p 的切线.

b. 证明：当 s 增加时，$\alpha(s)$在一点，比如 r，与 T_p 相交(图 5-42).

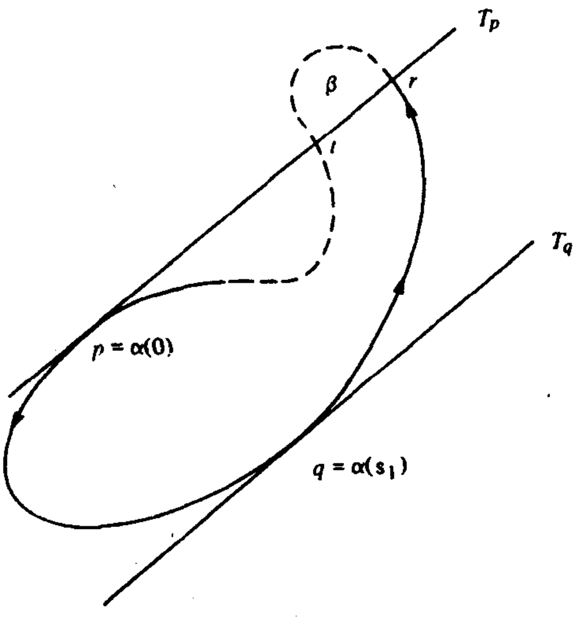


图 5-42

c. 弧 $\alpha(-\infty, 0)$必定与 T_p 在 p 与 r 之间的一点 t 相交.

d. 用一条自身不交的弧 β 连接 r，t，从而使 α 中的弧 $tpqr$ 成为一条闭曲线 C．说明 C 的旋转指标$\geqslant2$．证明：这件事蕴涵 α 自身相交，从而是个矛盾.

*9. 设 α：$[0, l]\to S^2$ 是球面 $S^2=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2=1\}$上的正则闭曲线．假定 α 以弧长为参数，并且其曲率 $k(s)$处处非零．证明

$$\int_0^l \tau(s)ds = 0$$

(上述积分，实际上是非平面曲线落在球面上的一个充分条件. 这部分内容和有关的结果，见 H. Geppert，"Sopra una caractterizzazione della sfera，" Ann. di Mat. Pura ed App. XX (1941)，59 ～ 66；以及 B. Segre，" Una nuova caracterizazzione della sfera，" Atti Accad. Naz. dei Lincei 3 (1947)，420～422.)

5.8 Gauss 曲率为零的曲面

我们已经看到(4.6)，Gauss 曲率恒等于零的正则曲面与平面局部等距. 在这一节，我们将从它们在 $\mathbb{R}^3$ 中的位置这一观点来看这些曲面，并证明下列的整体性定理.

定理 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是 Gauss 曲率为零的完备曲面. 则 S 为柱面，或是平面.

根据定义，柱面是这样的一种正则曲面 S，过每一点 $p\in S$，都有唯一的直线 $R(p)\subset S$(过 p 的母线)经过，使得 $q\neq p$ 时，直线 $R(p)$ 与 $R(q)$ 或者平行，或者重合.

在微分几何历史上的一个奇怪的事实是，在其发展过程中，上述定理却是较晚才得到证明的. 最初的证明是作为 P. Hartman 和 L. Nirenberg 的一个定理的推论给出的("On Spherical Images Whose Jacobians Do Not Change Signs"，Amer. J. Math. 81(1959)，901～920)，他们处理的是远比我们的情形更为一般的情况. 后来，W. S. Massey ("Surfaces of Gaussian Curvature Zero in Euclidean Space"，Tohoku Math. J. 14 (1962)，73 ～ 79) 和 J. J. Stoker ("Developable Surfaces in the Large，"Comm. Pure and Appl. Math. 14(1961)，627～635)分别得出了这条定理的初等且直接的证明. 我们在这里给出的，是经修改的 Massey 的证明. 应该指出，在 Stoker 的文章中还有一条稍作推广的定理.

作为开始，我们先来研究零曲率曲面的一些局部性质.

设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是 Gauss 曲率 $K\equiv0$ 的正则曲面. 因为 $K=k_1k_2$，这里的 k_1 和 k_2 是主曲率，所以 S 中的点或者是抛物点，或者是平点. 我们用 P 来记 S 中平点的集合，而且 $U=S-P$ 来记 S 中抛物点的集合.

P 是 S 中的闭集. 事实上，P 中的点满足平均曲率 $H=\frac{1}{2}\times(k_1+k_2)$ 为零的条件. 根据 H 的连续性，P 的聚点也具有零平均曲率；因此，它也属于 P. 由此可知 $U=S-P$ 是 S 中的开集.

集合 P 与 U 之间关系的一个有益的实例，在下面的例子中给出.

例 1 考虑开的三角形 ABC，且在其每一边上加一张母线与给定边平行的柱面(见图 5-43). 可以有一种方法，使这样构造出来的曲面是正则曲面. 例如，为了确保沿开线段 BC 的正则性，只要使带状柱面 $BCDE$ 被垂直于 BC 的平面截得的截线 FG，具有形式

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

就足够了. 注意，三角形的顶点 A，B，C 和这些带状柱面的边 BE，CD 等等，不属于 S 用这种方法构造出来的曲面 S，其曲率 $K\equiv0$. 集合 P 由去掉顶点的闭三角形 ABC 组成. 注意，P

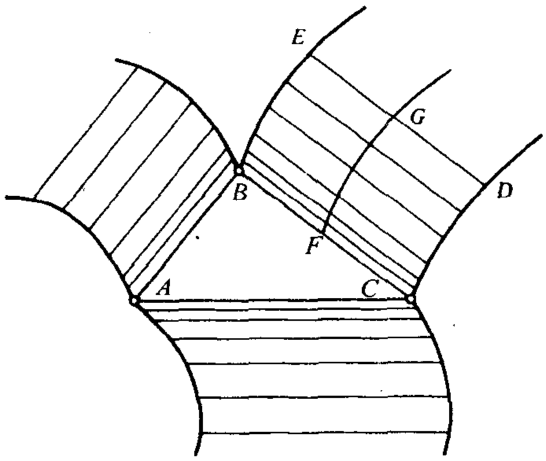


图 5-43

是 S 中的闭集．但是，它不是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭集．集合 U 由这些带状柱面的内点组成．过 U 中的每一点，总有唯一的、与 P 决不相交的一条直线通过．P 的边界由开线段 AB，BC 和 CA 构成．

下面我们将证明，这个例了中的有关性质在一般情形中也会出现．

首先，设 $p\in U$．因为 p 是抛物点，p 点的主方向中有一个是渐近方向，而且在 p 点再也没有其他渐近方向．我们要证明，经过 p 的唯一的渐近曲线是直线段．

命题 1 设曲面 S 的曲率 $K\equiv 0$．那么，经过抛物点 $p\in U\subset S$ 的唯一渐近线，是 S 中的(开)直线段．

证明 因为 p 不是脐点，可以用 $X(u, v)=X$ 来表示 p 的一个邻域 $V\subset U$，使得坐标曲线是曲率线．假设 $v=$ 常数是渐近曲线；也就是，它的法曲率为零．然后，根据 Olinde Rodrigues 定理(3.2，命题 4)，沿 $v=$常数有 $N_u=0$．因为过邻域 V 中的每一点，有曲线 $v=$ 常数通过，所以关系式 $N_u=0$ 对 V 中的所有点成立．

由此可知在 V 中

$$\langle X,N\rangle_u = \langle X_u,N\rangle + \langle X,N_u\rangle = 0$$

因此，

$$\langle X,N\rangle = \varphi(v) \tag{1}$$

这里的 $\varphi(v)$是仅含 v 的可微函数．将(1)式关于 v 微分，有

$$\langle X,N_v\rangle = \varphi'(v) \tag{2}$$

在另一方面，N_v 与 N 垂直，且由于 V 中点为抛物点，N_v 不为零．所以，N 和 N_v 是线性独立的．而且，在 V 中有 $N_{uu}=N_{uv}=0$．

现在我们看到，沿曲线 $v=$常数$=v_0$，向量 $N(u)=N_0$，且 $N_v(u)=(N_v)_0=$常值．这样一来，等式(1)就蕴涵曲线 $X(u, v_0)$落在与常值向量 N_0 垂直的平面上，而等式(2)则说明这条曲线属于正交于常值向量$(N_v)_0$ 的平面．所以，这条曲线就含在两张平面的交集中(这个交集存在是因为 N_0 和$(N_v)_0$ 线性独立)；因此，它是一条直线段．证毕．

注 $K\equiv 0$ 的条件，对上命题来说是不可少的．例如，旋转环面的顶部平行环，是由抛物点组成的渐近曲线，但它不是直线段．

现在我们来看看，当延拓这条线段时会发生些什么情况．下面的命题说明(参见例 1)，延拓线与集合 P 不相交；或者它“终止”在 S 的边界点上，或者它不定地留在 v 中．

为方便起见，采用下面的术语．过点 $p\in S$ 的一条渐近曲线称为极大渐近线，如果它不是某一条经过 p 的渐近线的真子集．

命题 2(Massey，见上面的引文) 设曲面 S 的曲率 $K\equiv 0$，r 是经过抛物点 $p\in U\subset S$ 的极大渐近线，并设 $P\subset S$ 是 S 中平点的集合，则 $r\cap P=\varnothing$.

命题 2 的证明依赖于下面的局部性引理，为此要用到 Mainardi-Codazzi 方程(参见 4.3).

引理 1 设曲面 S 的曲率为零，p 是 S 的抛物点．设 s 是经过 p 的渐近曲线的弧长，并设 $H=H(s)$ 是沿这条曲线的平均曲率．那么，在 U 中成立

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{H}\right)=0$$

引理 1 的证明 在 p 的邻域 $V\subset U$ 中引入坐标系(u,v)，使得坐标曲线是曲率线，并使曲线 $v=$常数是 V 中的渐近曲线．设 e，f，g 是这种参数表示下的第二基本形式的系数．因为 $f=0$，且曲线 $v=$常数，$u=u(s)$必须满足渐近曲线的微分方程

$$e\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2f\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+g\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

我们得到 $e=0$．在这些条件下，平均曲率 H 就为

$$H=\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e}{E}+\frac{g}{G}\right)=\frac{1}{2}\frac{g}{G} \tag{3}$$

把 $F=f=e=0$ 的值代入 Mainardi-Codazzi 方程(4.1，等式(7)和(7a))，我们得到

$$0=\frac{1}{2}\frac{gE_v}{G},\quad g_u=\frac{1}{2}\frac{gG_u}{G} \tag{4}$$

由(4)的第一式可知，$E_v=0$．于是 $E=E(u)$仅是 u 的函数．所以，可作参数变换：

$$\bar{v}=v,\quad \bar{u}=\int\sqrt{E(u)}\,du$$

我们仍用 u，v 来记新参数．现在 u 就度量了沿曲线 $v=$常数的弧长，从而 $E=1$.

在新的参数表示下$(F=0,E=1)$，Gauss 曲率的表达式为

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}=0$$

所以，

$$\sqrt{G}=c_1(v)u+c_2(v) \tag{5}$$

式中的 $c_1(v)$和 $c_2(v)$仅是 v 的函数.

另一方面，(4)中的第二个方程可写成$(g\neq 0)$

$$\frac{g_u}{g}=\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{G}\sqrt{G}}=\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}}$$

因而，

$$g=c_3(v)\sqrt{G} \tag{6}$$

这里的 $c_3(v)$是 v 的函数．把等式(5)和(6)代入(3)，我们得到

$$H=\frac{1}{2}\frac{c_3(v)}{\sqrt{G}}\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G}}=\frac{1}{2}\frac{c_3(v)}{c_1(v)u+c_2(v)}$$

最后，回忆起 $u=s$，并对上式关于 s 微分，就有结论

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{H}\right)=0$$

证毕.

命题 2 的证明 假定经过 p 点、以弧长为参数的极大渐近线 r 含有点 $q\in P$. 因为 r 连通，U 为开集，所以就有 r 上的点 p_0，它对应于 s_0，使得 $p_0\in P$，且 r 上满足 $s<s_0$ 的点均属于 U.

另外，由引理 1 我们已知道，沿 r 当 $s<s_0$ 时有

$$H(s)=\frac{1}{as+b}$$

式中的 a 与 b 是常数. 因为平均曲率在 P 中的点上为零，我们得到

$$H(p_0)=0=\lim_{s\to s_0}H(s)=\lim_{s\to s_0}\frac{1}{as+b}$$

这个矛盾就证明了命题. 证毕.

现在设 $\mathrm{Bd}(U)$是 U 在 S 中的边界；也就是说，$\mathrm{Bd}(U)$是点 $p\in S$ 的集合，使得 p 在 S 中的每个邻域都含有 U 中的点和 $S-U=P$ 中的点. 因为 U 是 S 中的开集，所以 $\mathrm{Bd}(U)\subset P$. 而且，由于边界点的定义关于 U 和 P 是对称的，我们便有

$$\mathrm{Bd}(U)=\mathrm{Bd}(P)$$

下面的命题说明(恰好与例 1 中一样)，集合 $\mathrm{Bd}(U)=\mathrm{Bd}(P)$是由直线段组成的：

命题 3(Massey) 设曲面 S 的曲率 $K\equiv 0$，$p\in\mathrm{Bd}(U)\subset S$ 是这个曲面的抛物点集合 U 的边界点. 那么必有唯一的开直线段 $C(p)\subset S$ 通过 p 点. 而且，$C(p)\subset\mathrm{Bd}(U)$；即，$U$ 的边界由直线段构成.

证明 设 $p\in\mathrm{Bd}(U)$. 因为 p 是 U 的极限点，所以能选到序列$\{p_n\}$，$p_n\in U$，使$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$. 对每个 p_n，设 $C(p_n)$是经过 p_n 的唯一极大渐近曲线(开直线段)(参见命题 1). 我们将证明，当 $n\to\infty$时，$C(p_n)$的方向趋向于一个不依赖序列$\{p_n\}$选择的确定方向.

事实上，设 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 是 p 附近充分小的球面. 因为球面 Σ 紧致，$C(p_n)$和 Σ 的交点$\{q_n\}$至少有一个聚点 $q\in\Sigma$，这时 q 的对经点也同样是聚点. 如果除了 q 和它的对径点以外，存在另一个聚点 r，这时经过任意接近的两点 p_n 和 p_m，就会有渐近线 $C(p_n)$和 $C(p_m)$通过，它们的交角会大于

$$\theta=\frac{1}{2}\text{角度}(pq,pr)$$

这与渐近线的连续性是矛盾的. 由此可知，直线 $C(p_n)$有极限方向. 用类似的论述方法可证明，这个极限方向，如前所述，与使$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$ 的序列$\{p_n\}$的选择无关.

因为 $C(p_n)$的方向收敛，且 $p_n\to p$，所以开直线段 $C(p_n)$就收敛于通过 p 的线段$C(p)\subset S$. 线段 $C(p)$本身不会退化成 p 点. 不然的话，因为 $C(p_n)$是极大渐近线，$p\in S$ 就会是不属于 S 的 $C(p_n)$的端点的聚点(参见命题 2). 根据相同的理由，线段 $C(p)$不含它的端点.

最后，我们将证明 $C(p)\subset \mathrm{Bd}(U)$. 事实上，若 $q\in C(p)$，就存在序列

$$\{q_n\}, q_n \in C(p_n) \subset U, \text{使得} \lim_{n\to\infty} q_n = q$$

这时，$q\in U\cup \mathrm{Bd}(U)$. 假定 $q\notin \mathrm{Bd}(U)$，则 $q\in U$，并且，由渐近方向的连续性知，$C(p)$是经过 q 的唯一渐近线，根据命题 2，这就蕴涵 $p\in U$ 这个矛盾的结论. 因此，$q\in \mathrm{Bd}(U)$，也就是，$C(p)\subset \mathrm{Bd}(U)$，从而完成了证明. 证毕.

现在我们已能证明本节开头所述的整体结果.

定理的证明 假设 S 不是平面，则(3.2，命题 5)S 就含抛物点. 设 U 是 S 中抛物点的(开)集合，P 是 S 中平点的(闭)集合. 我们将用 $\mathrm{int}P$ 来表示 P 的内部，即具有整个落在 P 中邻域的点构成的集合. $\mathrm{int}P$ 是 S 中仅含平点的开集. 所以，$\mathrm{int}P$ 的每个连通分支就落在一张平面中(3.2，命题 5).

我们先来证明，如果 $q\in S$ 且 $q\notin \mathrm{int}P$，则有唯一的直线 $R(q)\subset S$ 经过 q 点，而且两条这种直线或者重合，或者不相交.

事实上，当 $q\in U$ 时，就有唯一的极大渐近线 r 经过 q. r 是直线段(从而是测地线)且 $r\cap P=\varnothing$(参见命题 1 和命题 2). 把弧长取作 r 的参数，我们看到 r 不是有限线段. 不然的话，就有一条不能对一切参数值均能延拓的测地线，这与 S 的完备性是矛盾的. 所以，r 是整条直线 $R(q)$，并由于 $r\cap P=\varnothing$，故 $R(q)\subset U$. 由此可知，当 p 为 U 中的另一点，且 $p\notin R(q)$时，有 $R(p)\cap R(q)=\varnothing$. 否则的话，在交点处就会有两条渐近线通过，这与已述的唯一性是矛盾的.

另一方面，若 $q\in \mathrm{Bd}(U)=\mathrm{Bd}(P)$，则(参见命题 3)有含在 $\mathrm{Bd}(U)$中的唯一开直线段经过 q 点. 根据上面的论证方法，这个线段能延拓为整条直线 $R(q)\subset \mathrm{Bd}(U)$，并且如果 $p\in \mathrm{Bd}(U)$，$p\notin R(q)$，则 $R(p)\cap R(q)=\varnothing$.

显然，因为 U 是开集，如果 $q\in U$ 而 $p\in \mathrm{Bd}(U)$，那么 $R(p)\cap R(q)=\varnothing$. 这样一来，在 $S-\mathrm{int}P=U\cup \mathrm{Bd}(U)$的每一点，就有唯一的一条落在 $S-\mathrm{int}P$ 中的直线通过，而且任何两条这样的直线或者相同，或者不相交. 如果我们能证明这些直线平行，那么我们就有 $\mathrm{Bd}(U)$($=\mathrm{Bd}(P)$)由平行直线组成，以及 $\mathrm{int}P$ 的每个连通分支是由两条平行线界定的平面中开集的结论. 这样一来，经过每一点 $t\in \mathrm{int}P$，就有平行于公共方向的唯一直线 $R(t)\subset \mathrm{int}P$ 通过. 由此可知，在 S 的每一点，都有唯一的母线通过，且这些母线互相平行，也就是说，如我们所希望的，S 是柱面.

为了证明经过 $U\cup \mathrm{Bd}(U)$中点的那些直线平行，我们的做法如下. 设 $q\in U\cup \mathrm{Bd}(U)$，而 $p\in U$. 因为 S 连通，存在弧 α：$[0, l]\to S$，使得 $\alpha(0)=p$，$\alpha(l)=q$. 映照 $\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 是覆盖映照(5.6，命题 7)，并且是局部等距(5.6，引理 1 的推论). 设 $\tilde{\alpha}$：$[0, l]\to T_p(S)$是 α 的以原点 $0\in T_p(S)$为起点的提升. 对满足 $\exp_p\tilde{\alpha}(t)=\alpha(t)\in U\cup \mathrm{Bd}(U)$的每个 $\tilde{\alpha}(t)$，设 r_t 是以 $\tilde{\alpha}(t)$为起点的 $R(\alpha(t))$的提升. 因为 $\exp_p$ 是局部等距，r_t 便是 $T_p(S)$中的直线.

我们来证明当 $\alpha(t_1)\neq\alpha(t_2)$，$t_1$，$t_2\in[0, l]$时，直线 r_{t_1} 和 r_{t_2} 平行. 事实上，若有 $v\in r_{t_1}\cap r_{t_2}$，则

$$\exp_p(v) \in R(\alpha(t_1)) \cap R(\alpha(t_2))$$

这是矛盾的.

到目前为止，当 $\alpha(t)\in \mathrm{int}P$ 时，我们还没定义过 $R(\alpha(t))$. 现在就来做这件事. 当 $\tilde{\alpha}(t)$满足 $\exp_p\tilde{\alpha}(t)=\alpha(t)\in \mathrm{int}P$ 时，在 $T_p(S)$中，我们过 $\tilde{\alpha}(t)$画一条平行于刚才得到的公共方向的直线 r. 显然有 $\exp_p(r)\subset \mathrm{int}P$，并且，由于 $\exp_p(r)$是测地线，$\exp_p(r)$便是含在 S 中的整条直线. 这样，对每个 $t\in[0, l]$，直线 $R(\alpha(t))$都有定义.

我们现在来证明，直线 $R(\alpha(t))$，$t\in[0, l]$全是平行线. 实际上，由通常紧致性的论证方法，可找到有限个开区间 I_1，…，I_n 来覆盖区间$[0, l]$，使得 $\tilde{\alpha}(I_i)$包含在 $\tilde{\alpha}(t_i)$，$t_i\in I_i$，的邻域 V_i 中，且 $\exp_p$ 在 V_i 上的限制是等距. 现在看到，当 t_1，$t_2\in I_i$ 而 $\alpha(t_1)\neq\alpha(t_2)$时，$R(\alpha(t_1))$与 $R(\alpha(t_2))$平行. 事实上，因为 r_{t_1}与 r_{t_2}平行，且 $\exp_p$ 是 V_i 中的等距，所以开线段 $\exp_p(r_{t_1}\cap V_i)$就与 $\exp_p(r_{t_2}\cap V_i)$平行；这说明直线 $\exp_p r_{t_1}=R(\alpha(t_1))$和 $\exp_p r_{t_2}=R(\alpha(t_2))$有平行的开线段，因而是平行的. 然后，把$[0, l]$分解为 I_1，…，I_n，我们能一步步地证明直线 $R(\alpha(t))$全是平行的.

特别地有，直线 $R(q)$平行于 $R(p)$. 若 s 是 $U\cup \mathrm{Bd}(U)$中的另一点，则用同样的论述方法知，$R(s)$与 $R(p)$平行，因此也与 $R(q)$平行. 这样一来，已经证明经过 $U\cup \mathrm{Bd}(U)$的所有直线都是平行的，因而也就完成了定理的证明. 证毕.

5.9 Jacobi 定理

测地线 γ 的基本性质(4.6 性质 4)是：当 γ 上的二点 p 和 q 充分接近时，那么 γ 使 p 和 q 之间的弧长极小化. 这意味着 p 和 q 之间 γ 的弧长小于或等于连结 p 到 q 的任何曲线的弧长. 现在假定我们沿着从一点 p 出发的测地线 γ 走. 那么很自然地会问：在多长的范围内测地线 γ 能使弧长极小化. 如在球面的情形，从一点 p 出发的测地线(经线)一直到 p 点关于 γ 的第一共轭点都是最短曲线(即直到 p 的对径点). 过了对径点，正像我们可以直观地从下列考虑看到的，测地线就不再是最短曲线.

球面上连结两点 p 和 q 的测地线可被想像成连结球面上给定两点的弹性线. 当弧$\widehat{pq}$小于半径线且点 p 和 q 保持固定，那么不增加其长度就不可能移动这条线. 另一方面，当弧$\widehat{pq}$大于半径线时，这条线的微小移动(p 和 q 均固定)就会“放松”这条线(见图 5-44). 换句话说，当 q 超过 p 的对径点时，就可能得到连结 p 到 q 的一些曲线，它们接近于测地线弧$\widehat{pq}$并且比这弧更短. 显然，这远不是数学证明.

本节中我们将开始研究这个问题，并且证明 Jacobi 的一个结果，它可大致描述如下. 从一点 p 出发的测地线 γ，相对于 γ 的“邻近”曲线，只到 p 关于 γ 的“第一”共轭点才是最短的(更严格的叙述将在后面给出；见定理 1 和 2).

为简单起见，本节中所论的曲面都假定为完备曲面并且测地线都以弧长为参数.

我们需要一些预备的结果.

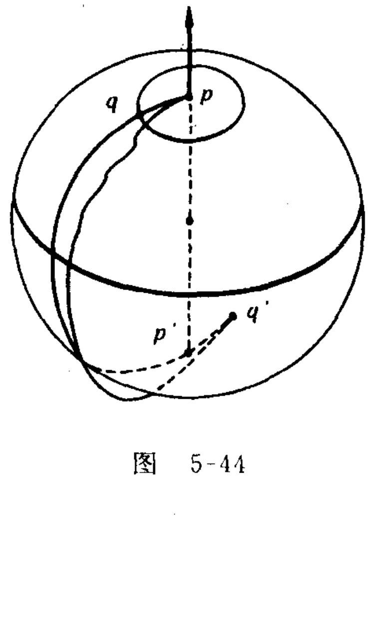


图 5-44

下列引理说明 $T_p(S)$中以 $0\in T_p(S)$为原点的一线段在指数映照 $\exp_p$：$T_p(S)\to S$ 下的象(从 p 出发的测地线)相对于

$T_p(S)$中连结上述线段端点的曲线在 $\exp_p$ 下的象是最短的.

更细致地说，设

$$p \in S, \quad u \in T_p(S), \quad l = |u| \neq 0$$

且设 $\tilde{\gamma}$：$[0, l] \to T_p(S)$是 $T_p(S)$中的直线，定义是

$$\tilde{\gamma}(s) = sv, \quad s \in [0,l], \quad v = \frac{u}{|u|}$$

设 $\tilde{\alpha}$：$[0, l] \to T_p(S)$是 $T_p(S)$的可微参数曲线，满足 $\tilde{\alpha}(0)=0$，$\tilde{\alpha}(l)=u$；若 $s\neq 0$，$\tilde{\alpha}(s)\neq 0$. 而且，设(图 5-45)

$$\alpha(s) = \exp_p \tilde{\alpha}(s) \text{ 及 } \gamma(s) = \exp_p \tilde{\gamma}(s)$$

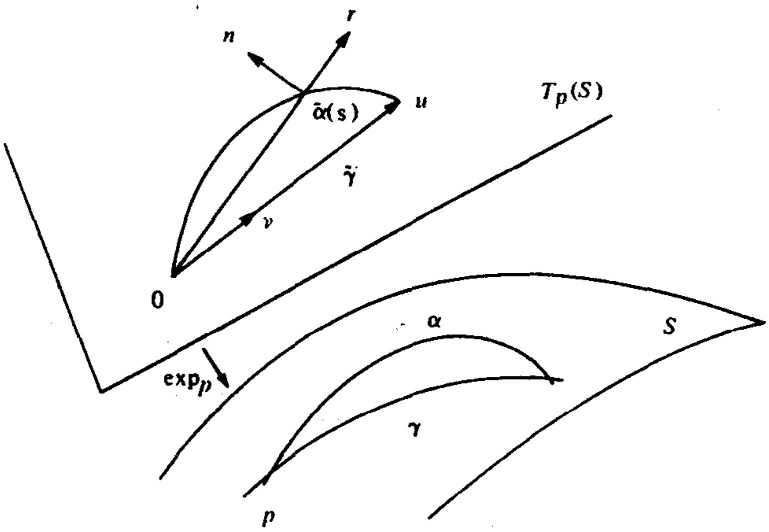


图 5-45

引理 1 在上述记号下，我们有

1. $l(\alpha) \geq l(\gamma)$，其中 $l(\ )$表示对应曲线的弧长.

加之，若 $\tilde{\alpha}(s)$不是 $\exp_p$ 的临界点，$s\in[0, l]$，且若 α 和 γ 的轨迹是不相同的，那么

2. $l(\alpha) > l(\gamma)$.

证明 设 $\tilde{\alpha}(s)/|\tilde{\alpha}(s)| = r$，且设 n 是 $T_p(S)$的单位向量，满足$\langle \gamma, n\rangle = 0$. 在 $T_p(S)$的基$\{\gamma, n\}$下我们能记(图 5-45)

$$\tilde{\alpha}'(s) = ar + bn$$

其中

$$a = \langle \tilde{\alpha}'(s), r\rangle$$

$$b = \langle \tilde{\alpha}'(s), n\rangle$$

根据定义

$$\alpha'(s) = (d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(\tilde{\alpha}'(s))$$

$$= a(d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(r) + b(d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(n)$$

所以，利用 Gauss 引理(见 5.5 引理 2)我们得到

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = a^2 + c^2$$

其中

$$c_2 = b^2 \, |(d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(n)|^2$$

由此得 $$\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle \geqslant a^2$$

另一方面，

$$\frac{d}{ds}\langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s)\rangle^{1/2} = \frac{\langle \tilde{\alpha}'(s), \tilde{\alpha}(s)\rangle}{\langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s)\rangle^{1/2}} = \langle \tilde{\alpha}'(s), r\rangle = a$$

所以，

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \int_0^l \langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle^{1/2} ds \geqslant \int_0^l a ds \\ &= \int_0^l \frac{d}{ds}\langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s)\rangle^{1/2} ds = |\tilde{\alpha}(l)| = l = l(\gamma) \end{aligned}$$

这就证明了第一部分.

为证明第 2 部分，让我们假定 $l(\alpha)=l(\gamma)$. 那么

$$\int_0^l \langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle^{1/2} ds = \int_0^l a ds$$

且因为 $$\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle^{1/2} \geqslant a$$

上式中等号对每个 $s\in[0, l]$成立. 所以

$$c = |b||(d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(n)| = 0$$

因为 $\tilde{\alpha}(s)$不是 $\exp_p$ 的临界点，我们有 $b\equiv0$. 这样得到，曲线 $\tilde{\alpha}$ 的所有切线都通过 $T_p(S)$的原点 O. 所以 $\tilde{\alpha}$ 是 $T_p(S)$中通过 O 的直线. 因 $\tilde{\alpha}(l)=\tilde{\gamma}(l)$，直线 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\gamma}$ 重合，这样就和 α 及 γ 的轨迹不同的假定矛盾. 从这个矛盾得到 $l(\alpha)>l(\gamma)$，这就证明了第 2 部分而结束了引理的证明. 证毕.

现在我们可以证明，如果一条测地线弧不包含共轭点，则它使弧长局部极小. 更确切地，我们有

定理 1(Jacobi) 设 γ: $[0, l]\to S$, $\gamma(0)=p$ 是无共轭点的测地线；即 $\exp_p$: $T_p(S)\to S$ 在 $T_p(S)$的直线 $\tilde{\gamma}(s)=s\gamma'(0)$, $s\in[0, l]$上是正则的. 设 h: $[0, l]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$ 是 γ 的正常变分. 那么

1. 存在 $\delta>0$, $\delta\leqslant\varepsilon$，使得若 $t\in(-\delta, \delta)$，则

$$L(t)\geqslant L(0)$$

其中 $L(t)$是曲线 h_t: $[0, l]\to S$ 的长度，$h_t(s)=h(s, t)$.

2. 又若 h_t 的轨迹不同于 γ，那么 $L(t)>L(0)$.

证明 证明实质上在于说明对每个 $t\in(-\delta, \delta)$，能将曲线 h_t 提升为 $T_p(s)$的曲线 $\tilde{h}_t$，使 $\tilde{h}_t(0)=0$, $\tilde{h}_t(l)=\tilde{\gamma}(l)$，然后利用引理 1.

因为 $\exp_p$ 在 $T_p(S)$中直线 $\tilde{\gamma}$ 上的点是正则的，对每个 $s\in[0, l]$存在 $\tilde{\gamma}(s)$的一个邻域 U_s 使 $\exp_p$ 限制于 U_s 是一个微分同胚. 邻域族$\{U_s\}$, $s\in[0, l]$覆盖了 $\tilde{\gamma}([0, l])$，且由紧致性，能取出有限子族，如 U_1, …, U_n，覆盖 $\tilde{\gamma}([0, l])$. 由此得到，我们能分割区间$[0, l]$如下

$$0 = s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s_{n+1} = l$$

使 $\tilde{\gamma}([s_i, s_{i+1}])\subset U_i$, $i=1$, …, n. 因为 h 是连续的，$[s_i, s_{i+1}]$是紧致的，那么存在 $\delta_i>0$，使

$$h([s_i,s_{i+1}]\times(-\delta_i,\delta_i))\subset \exp_p(U_i)=V_i$$

置 $\delta=\min(\delta_1, \cdots, \delta_n)$. 对 $t\in(-\delta, \delta)$, 曲线 h_t: $[0, l]\to S$ 可按下列办法提升为以 $\tilde{h}_t(0)=0$ 为起点的曲线 $\tilde{h}_t$: $[0, l]\to T_p(S)$. 设 $s\in[s_1, s_2]$, 那么

$$\tilde{h}_t(s)=\exp_p^{-1}(h_t(s))$$

其中 $\exp_p^{-1}$ 是 $\exp_p$: $U_1\to V_1$ 的逆映照, 再应用我们在覆盖空间中用过的技巧(见 5.6 性质 2), 我们能将 $\tilde{h}_t$ 拓广到任何 $s\in[0, l]$而得到 $\tilde{h}_t(l)=\tilde{\gamma}(l)$.

用这种方法, 我们得到 $\gamma(s)=\exp_p\tilde{\gamma}(s)$, 及 $\tilde{h}_t(s)=\exp_p\tilde{h}_t(s)$, $t\in(-\delta, \delta)$, 且 $\tilde{h}_t(0)=0$, $\tilde{h}_t(l)=\tilde{\gamma}(l)$. 再应用引理 1 于现在情形就得到所要的结论. 证毕.

注 1 不含共轭点的测地线 γ, 相对于不在 γ 邻域中的曲线可能不是最短. 例如, 在圆柱面中, (它无共轭点)就会发生这种情况, 读者从观察其上的闭测地线容易验证这一点.

这情形涉及到共轭点只提供我们指数映照的微分性质, 即在给定测地线附近的测地线"伸开"的速率. 另一方面, 测地线的整体性质是被指数映照本身所控制的. 即使当它的微分处处非奇异时, 它仍可以不是大范围 1 对 1 的.

会出现同样情况的另一例是椭球面(这次是单连通的), 读者可从 5.5 椭球面的图(图 5-19)看出.

对于从 p 点出发的测地线在大范围终止极小性质的点的轨迹(称为 p 的割迹)进行研究, 在微分几何中对某些整体定理来说是极从重要的, 但本书中将不作考虑.

现在, 我们来着手证明含有共轭点的测地线 γ 不是弧长的局部极小曲线; 即"任意接近于" γ, 总存在一条连结它两个端点的曲线, 其弧长比 γ 更短.

我们需要一些预备知识, 首先是将测地线的变分定义推广到分段可微的情形.

定义 1 设 γ: $[0, l]\to S$ 是 S 的测地线, 并且设

$$h:[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$$

是连续映照, 满足.

$$h(s,0)=\gamma(s),\quad s\in[0,l]$$

如果存在$[0, l]$的一个分割

$$0=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_{n-1}<s_n=l$$

使得

$$h:[s_i,s_{i+1}]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S,\quad i=0,1,\cdots,n-1$$

是可微的, 那么 h 称为 γ 的*分段变分*. 如果 $h(0, t)=\gamma(0)$, $h(l, t)=\gamma(l)$对任何 $t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$成立, 则该分段变分称为是*正常的*.

现在, 对 $s\in[0, l]$变分曲线 $h_t(s)$是分段可微曲线. 变分向量场 $V(s)=(\partial h/\partial t)(s, 0)$ 是沿 γ 的分段可微向量场, 即 V: $[0, l]\to\mathbb{R}^3$ 是在每个$[t_i, t_{i+1}]$中可微的连续映照. 如果对于 $s\in[0, l]$有$\langle V(s), \gamma'(s)\rangle=0$, 则分段变分 h 称为是*正交的*.

用完全类似于 5.4 性质 1 的办法, 可以证明沿 γ 的分段可微向量场 V 引出了 γ 的一个分段变分, 它的变分向量场就是 V. 并且, 若

$$V(0)=V(l)=0$$

那么变分可取为正常的.

类似地，函数 L：$(-\varepsilon, \varepsilon)\to\mathbb{R}$（变分曲线的弧长）被定义为

$$L(t)=\sum_{0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right|ds=\int_0^l\left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right|ds$$

根据 5.4 引理 1，这个和式的每个被加项在 0 的一个邻域中是可微的. 所以，L 在$(-\delta, \delta)$中是可微的，如果 δ 是充分的小.

对正常、正交的分段变分，弧长的第二变分($L''(0)$)的表达式，完全和 5.4 性质 4 所得到一样，这很容易被验证. 这样，如果 V 是沿测地线 γ：$[0, l]\to S$ 分段可微向量场，满足

$$\langle V(s),\gamma'(s)\rangle=0,\quad s\in[0,l],\quad 并且\ V(0)=V(l)=0$$

那么

$$L''_V(0)=\int_0^l\left(\left\langle\frac{DV}{ds},\frac{DV}{ds}\right\rangle-K(s)\langle V(s),V(s)\rangle\right)ds$$

现在，设 γ：$[0, l]\to S$ 是测地线，且以 $\mathcal{V}$ 表示沿 γ 的分段可微向量场的集合，它们都正交于 γ，即如果 $V\in\mathcal{V}$，那么$\langle V(s), \gamma'(s)\rangle=0$ 对所有 $s\in[0, l]$成立. 注意，$\mathcal{V}$ 关于通常加法及实数数量乘法构成一个向量空间. 以

$$I(V,W)=\int_0^l\left(\left\langle\frac{DV}{ds},\frac{DW}{ds}\right\rangle-K(s)\langle V(s),W(s)\rangle\right)ds$$

定义映照：I：$\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$，其中 V，$W\in U$.

容易验证，I 是对称的双线性映照；即 I 关于每个变量是线性的并且 $I(V, W)=I(W, V)$. 所以，I 确定了 $\mathcal{V}$ 中的一个二次型 $I(V, V)$. 这个二次型称为 γ 的指标形式.

注 2 测地线的指标形式由 M. Morse 引入，他证明了下列结果. 设 $\gamma(s_0)$是 $\gamma(0)=p$ 关于测地线 γ：$[0, l]\to S$，$s_0\in[0, l]$，的共轭点. 共轭点 $\gamma(s_0)$的重数是 $T_p(s)$中使$(d\exp_p)_{\gamma(s_0)}(u)=0$ 对任何 $u\in E$ 成立的最大子空间 E 的维数. 在向量空间 E 中二次型 Q：$E\to\mathbb{R}$ 的指标数是 E 中使 $Q(u)<0$，$u\in L$ 的子空间 L 的最大维数. 在这样术语下，Morse 指标定理可叙述如下：设 γ：$[0, l]\to S$ 是测地线，那么，γ 的二次型 I 的指标数是有限的，并且它等于在 $\gamma((0, l])$中 $\gamma(0)$的共轭点数，每个共轭点以其重数相计算. 这个定理的证明可在 J. Milnor，Morse Theory，Annals of Mathematics. Studies，Vol 51，Princeton University Press，Princeton，N. J.，1963 中找到.

对我们，只需要下列引理.

引理 2 设 $V\in\mathcal{V}$ 是沿测地线 γ：$[0, l]\to S$ 的一个 Jacobi 场，并且 $W\in\mathcal{V}$，那么

$$I(V,W)=\left\langle\frac{DV}{ds}(l),W(l)\right\rangle-\left\langle\frac{DV}{ds}(0),W(0)\right\rangle$$

证明 从

$$\frac{d}{ds}\left\langle\frac{DV}{ds},W\right\rangle=\left\langle\frac{D^2V}{ds^2},W\right\rangle+\left\langle\frac{DV}{ds},\frac{DW}{ds}\right\rangle$$

我们可将 I 写成形式(见 5.4 注 4)

$$I(V,W)=\left\langle\frac{DV}{ds},W\right\rangle\Bigg|_0^l-\int_0^l\left(\left\langle\frac{D^2V}{ds^2}+K(s)V(s),W(s)\right\rangle\right)ds$$

从 V 是正交于 γ 的 Jacobi 场知，第二项的被积函数为 0. 所以，

$$I(V,W)=\left\langle\frac{DV}{ds}(l),W(l)\right\rangle-\left\langle\frac{DV}{ds}(0),W(0)\right\rangle$$

证毕.

现在，我们能证明

定理 2(Jacobi) 如果我们设 γ: $[0, l]\to S$ 是 S 的测地线且设 $\gamma(s_0)\in\gamma((0, l))$ 是 $\gamma(0)=p$ 关于 γ 的共轭点，那么存在 γ 的一个正常分段变分 h: $[0, l]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$ 和实数 $\delta>0$, $\delta\leqslant\varepsilon$，使当 $t\in(-\delta, \delta)$ 时我们有 $L(t)<L(0)$.

证明 因为 $\gamma(s_0)$ 是 p 关于 γ 的共轭点，存在一个沿 γ 不恒为零的 Jacobi 场 J，使得 $J(0)=J(s_0)=0$. 根据 5.5 性质 4 得到，对 $s\in[0, l]$ 有 $\langle J(s), \gamma'(s)\rangle=0$. 并且，$(DJ/ds)(s_0)\neq 0$；否则 $J(s)\equiv 0$.

设 $\bar{z}$ 是沿 γ 的平行向量场，满足 $\bar{z}(s_0)=-(DJ/ds)(s_0)$，且 f: $[0, l]\to\mathbb{R}$ 是具 $f(0)=f(l)=0$, $f(s_0)=1$ 的可微函数. 定义 $z(s)=f(s)\bar{z}(s)$, $s\in[0, l]$.

对每个实数 $\eta>0$，定义沿 γ 的向量场 Y_η

$$Y_\eta=\begin{cases} J(s)+\eta z(s), & \text{当 } s\in[0, s_0] \\ \eta z(s), & \text{当 } s\in[s_0, l] \end{cases}$$

Y_η 是正交于 γ 的分段可微向量场. 因 $Y_\eta(0)=Y_\eta(l)=0$，它引出了 γ 的一个正常、正交的分段变分. 我们来计算 $L''(0)=I(Y_\eta, Y_\eta)$.

对 0 到 s_0 之间的测地线段，我们将利用 I 的双线性和引理 2 得到

$$\begin{aligned} I_{s_0}(Y_\eta, Y_\eta) &= I_{s_0}(J+\eta z, J+\eta z) \\ &= I_{s_0}(J, J)+2\eta I_{s_0}(J, z)+\eta^2 I_{s_0}(z, z) \\ &= 2\eta\left\langle\frac{DJ}{ds}(s_0), z(s_0)\right\rangle+\eta^2 I_{s_0}(z, z) \\ &= -2\eta\left|\frac{DJ}{ds}(s_0)\right|^2+\eta^2 I_{s_0}(z, z) \end{aligned}$$

其中 I_{s_0} 表示对应的积分限是从 0 到 s_0. 用 I 表示 0 到 l 的积分且注意到积分是可加的，我们有

$$I(Y_\eta, Y_\eta)=-2\eta\left|\frac{DJ}{ds}(s_0)\right|^2+\eta^2 I(z, z)$$

我们观察到，若 $\eta=\eta_0$ 充分小，上述表达式是负的. 所以，取 Y_{η_0}，我们将得到一个正常的分段变分使 $L''(0)<0$. 因 $L'(0)=0$，这意味着 0 是 L 的局部极大值点，即存在 $\delta>0$ 使当 $t\in(-\delta, \delta)$, $t\neq 0$ 时 $L(t)<L(0)$. 证毕.

注 3 Jacobi 定理是前面注 2 中所引的 Morse 指标定理的特殊情形. 实际上，指标定理证明的关键点实质上是定理 2 证明中给出的想法的推广.

习题

1. (Bonnet 定理) 设 S 是具 Gauss 曲率 $K\geqslant\delta>0$ 的完备曲面. 根据 5.5 习题 5，每条测地线 γ: $[0, \infty)\to S$ 在区间 $(0, \pi/\sqrt{\delta}]$ 中有 $\gamma(0)$ 的共轭点. 利用 Jacobi 定理来说明 S 是紧致的并且直径 $\rho(S)<\pi/\sqrt{\delta}$（这给出了 5.4Bonnet 定理的新证明）.

2. (完备曲面上的直线) 对测地线 γ: $(-\infty, \infty)\to S$ 如果其上任两点间的长度实现它们

间的(内蕴)距离，则 γ 称为直线.

a. 说明过完备的柱面 $x^2+y^2=1$ 的每一点有一条直线.

b. 假定 S 是具 Gauss 曲率 $K>0$ 的完备曲面. 设 γ：$(-\infty,\infty)\to S$ 是 S 上的测地线，且设 $J(S)$ 是沿 γ 的 Jacobi 场满足 $\langle J(0),\gamma'(0)\rangle=0$，$|J(0)|=1$，及 $J'(0)=0$. 在 $T_{\gamma(0)}(S)$ 取一个标准正交基 $\{e_1(0)=\gamma'(0),e_2(0)\}$，将它们沿 γ 平行移动得到 $T_{\gamma(s)}(S)$ 上的基 $\{e_1(s),e_2(s)\}$. 说明对某函数 $u(s)$ 有 $J(s)=u(s)e_2(s)$，而 J 的 Jacobi 方程化为

$$u''+ku=0,\quad u(0)=1,\quad u'(0)=0 \tag{$*$}$$

c. 将 5.5 习题 3 部分 b 中的比较定理推广到现在情况. 利用 $K>0$ 说明能取充分小的 $\varepsilon>0$ 使

$$u(\varepsilon)>0,\quad u(-\varepsilon)>0,\quad u'(\varepsilon)<0,\quad u'(-\varepsilon)>0$$

其中 $u(s)$ 是($*$)的解. 将($*$)与

$$v''(s)=0,\quad v(\varepsilon)=u(\varepsilon),\quad v'(\varepsilon)=u'(\varepsilon)\text{ 对 } s\in[\varepsilon,\infty)$$

及
$$w''(s)=0,\quad w(-\varepsilon)=u(-\varepsilon),\quad w'(-\varepsilon)=u'(-\varepsilon)\text{ 对 } s\in(-\infty,-\varepsilon]$$

进行比较，说明如果 s_0 充分大，那么 $J(s)$ 在区间 $(-s_0,s_0)$ 中有两个零点.

d. 利用上面结果证明：具正 Gauss 曲率的完备曲面不含有直线.

5.10 抽象曲面及其进一步推广

在 5.11，我们将证明 Hilbert 的一个定理，它断言在 $\mathbb{R}^3$ 中不存在负常曲率的完备的正则曲面.

实际上，定理还要更强一点. 为了理解 Hilbert 定理的正确的叙述及其证明，引进抽象的几何曲面的概念是方便的，它从下列考虑而产生.

迄今为止，我们处理过的曲面是 $\mathbb{R}^3$ 中的点集，在它上面可微函数是有意义的. 在每点 $p\in S$ 我们定义了切平面 $T_p(S)$，并且将 p 周围的微分几何发展为对 $T_p(S)$ 变化的研究. 但是，我们注意到所有内蕴几何的概念(Gauss 曲率，测地线，完备性等)只依赖于在每个 $T_p(S)$ 上内积的选取. 如果我们能够抽象地定义一个集合(即不参考于 $\mathbb{R}^3$)，使在它上面可微函数有意义，那么我们最终也许能将内蕴几何推广到这样的点集上.

下面的定义是从第 2 章中归纳出来的结果. 历史上，它的出现经历了相当长的时间，也许是由于在 $\mathbb{R}^3$ 的曲面定义中，参数转换的基本作用没有很清楚被理解所致.

定义 1 抽象曲面(2 维微分流形)是一个集合 S 以及从 $\mathbb{R}^2$ 中的开集 $U_\alpha\subset\mathbb{R}^2$ 到 S 中的 1 对 1 映照族 X_α：$U_\alpha\to S$，满足下列性质：

1. $\bigcup\limits_\alpha X_\alpha(U_\alpha)=S$；

2. 对 $X_\alpha(U_\alpha)\cap X_\beta(U_\beta)=W\neq\varnothing$ 的每对 α，β，$x_\alpha^{-1}(W)$，$X_\beta^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集，并且 $X_\beta^{-1}\circ X_\alpha$，$X_\alpha^{-1}\circ X_\beta$ 是可微映照(图 5-46).

(U_α,X_α)，$p\in X_\alpha(U_\alpha)$ 称为 S 在 p 点附近的一个参数表示(或坐标系) $X_\alpha(U_\alpha)$ 称为坐标邻域，并且如果 $q=X_\alpha(u_\alpha,v_\alpha)\in S$，我们说 (u_α,v_α) 是 q 在这个坐标系的坐标. 族 $\{U_\alpha,X_\alpha\}$ 称为 S 的微分结构.

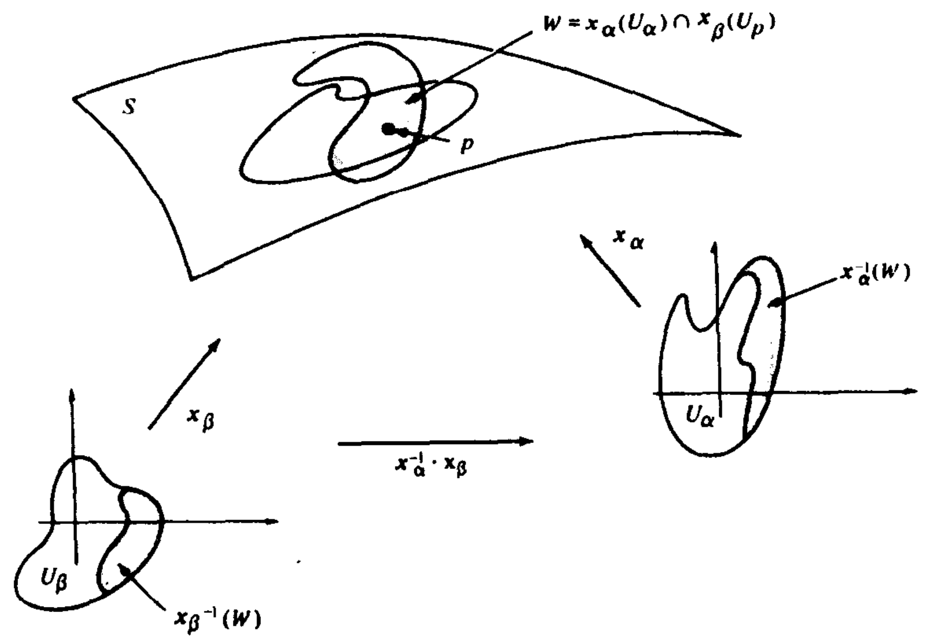


图 5-46

从条件 2 立即得到“参数变换”

$$X_\alpha^{-1}\circ X_\alpha : X_\alpha^{-1}(W)\to X_\alpha^{-1}(W)$$

是一个微分同胚.

注 1 有时对定义 1 加上进一步公理是方便的，即所谓关于条件 1 和 2 的微分结构是极大的. 这意味着满足条件 1 和 2 的任何其他族也已包含在族$\{U_\alpha, x_\alpha\}$之中.

将上述定义和$\mathbb{R}^3$ 中的正则曲面的定义(2.2 定义 1)相比较，说明主要点是在抽象曲面定义中包括了参数变换的规则(它对$\mathbb{R}^3$ 中曲面是一个定理，参见 2.3 性质 1). 因为这是使我们能在$\mathbb{R}^3$ 中的曲面上定义可微函数的性质(见 2.3 定义 1)，我们可置

定义 2 设 S_1 和 S_2 是二张抽象曲面. 映照ϕ: $S_1\to S_2$ 在点 $p\in S_1$ 是可微的，如果在$\phi(p)$周围给定一个参数表示 Y: $V\subset\mathbb{R}^2\to S_2$ 存在 p 点附近的一个参数表示 X: $U\subset\mathbb{R}^2\to S_1$ 使$\phi(X(U))\subset y(V)$并且映照

$$y^{-1}\circ\phi\circ X\circ x^{-1}(U)\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \tag{1}$$

在 $X^{-1}(p)$点是可微的. 如果ϕ在每点 $p\in S_1$ 是可微的，那么ϕ在 S_1 上是可微的(图 5-47).

显然，根据条件 2，这个定义是不依赖于参数表示的选取. 映照(1)叫做ϕ在参数表示 X，Y 下的表示.

这样，在抽象曲面上，说可微函数是有意义的，我们已经朝内蕴几何的推广走了第一步.

例 1 设 $S^2=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$是单位球面，且设 A: $S^2\to S^2$ 是对径映照，即 $A(x, y, z)=(-x, -y, -z)$. 设 P^2 是从 S^2 借助于等同 p 与 $A(p)$而得到的集合，而且 π: $S^2\to P^2$ 表示自然映照 $\pi(p)=\{p, A(p)\}$. 用坐标系 X_α: $U_\alpha\to S^2$ 覆盖 S^2，且满足$X_\alpha(U_\alpha)\cap A\circ X_\alpha(U_\alpha)=\phi$ 从 S^2 是正则曲面及 A 是微分同胚的事实得到 P^2 在族$\{U_\alpha, \pi\circ X_\alpha\}$下

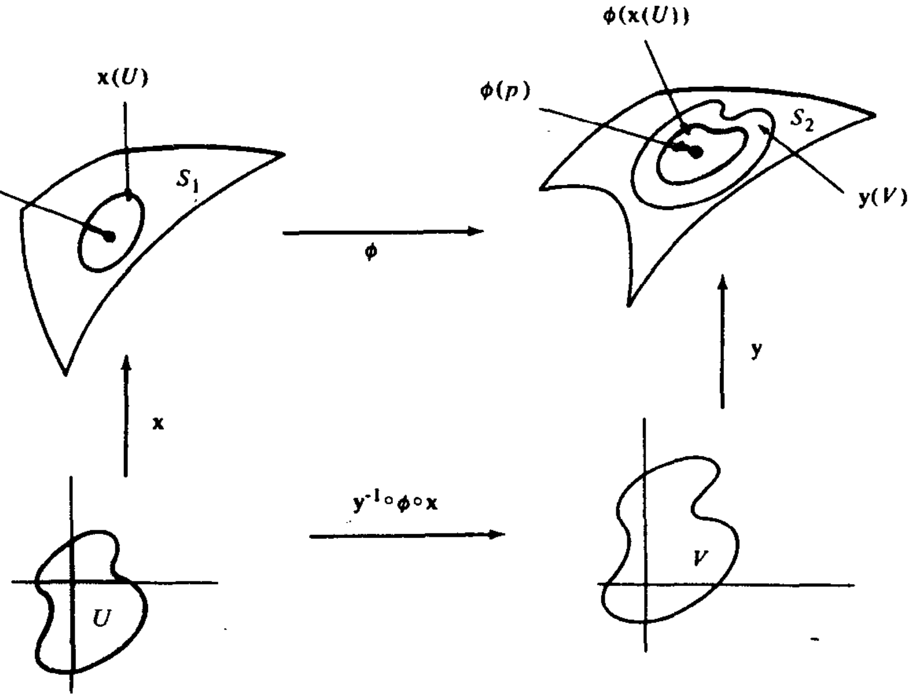


图 5-47

是抽象曲面，仍记为 P^2. 它叫做实射影平面.

例 2 设 $T\subset\mathbb{R}^3$ 是以$(0, 0, 0)\in\mathbb{R}^3$ 为中心的旋转环面(2.2 例 4)，设 A: $T\to T$ 由 $A(x, y, z)=(-x, -y, -z)$所定义(图 5-48). 设 K 是 T 在等价关系 $p\sim A(p)$下的商空间且用 π: $T\to K$ 表示映照 $\pi(p)=\{p, A(p)\}$. 用参数表示 X_α, $U_\alpha\to T$ 覆盖 T，且满足 $X_\alpha(U_\alpha)\cap A\circ X_\alpha(U_\alpha)=\varnothing$. 和前面一样，可以证明 K 在族$\{U_\alpha, \pi\circ X_\alpha\}$下是抽象曲面，它称为 Klein 瓶.

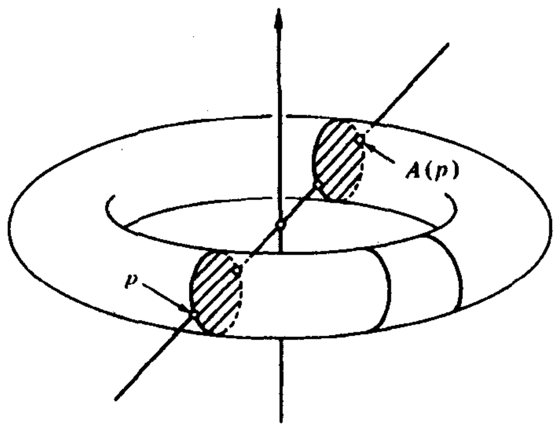


图 5-48

现在我们要使抽象曲面 S 上每一点对应一张切平面. 利用我们在$\mathbb{R}^3$ 中曲面的经验仍是有益的(2.4). 那里，某点的切平面是切向量的集合，该点的切向量被定义为曲面上曲线在该点的速率. 这样，我们必须定义什么是抽象曲面上曲线的切向量. 因为没有$\mathbb{R}^3$ 可依靠，我们必须寻求曲线切向量的不依赖于$\mathbb{R}^3$ 的特征.

下列的考虑产生了后面要给出的定义. 设 α: $(-\varepsilon, \varepsilon)\to\mathbb{R}^2$ 是$\mathbb{R}^2$ 中的可微曲线，$\alpha(0)=$

p. 记 $\alpha(t)=(u(t),\ v(t))$, $t\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$以及 $\alpha'(0)=(u'(0),\ v'(0))=w$. 设 f 是定义在 p 点领域中的可微函数. 将 f 限制于 α 且记 f 关于 w 的方向导数如下:

$$\left.\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\right|_{t=0}$$
$$=\left\{u'(0)\frac{\partial}{\partial u}+v'(0)\frac{\partial}{\partial v}\right\}f$$

这样，沿向量 w 的方向导数是一个只依赖于 w 的作用在可微函数上的算子. 这就是我们要找的切向量的特征.

定义 3 可微映照 α: $(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to S$ 称为 S 上的一条曲线. 假定 $\alpha\cdot(0)=p$ 且设 D 是 S 上在 p 点可微的函数的集合. 曲线 α 在 $t=0$ 的切向量是函数 $\alpha'(0)$: $D\to\mathbb{R}$, 定义为

$$\alpha'(0)(f)=\left|\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0},f\in D$$

在点 $p\in s$ 的切向量就是某条曲线 α: $(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to S$, $\alpha(0)=p$ 在 $t=0$ 的切向量.

在点 $p=x(0,\ 0)$附近取了参数表示 X: $U\to S$, 函数 f 和曲线 α 在 X 中可分别表示为 $f(u,\ v)$和$(u(t),\ v(t))$. 所以

$$\alpha'(0)(f)=\left.\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}(f(u(t),v(t)))\right|_{t=0}$$
$$=u'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0+v'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$
$$=\left\{u'(0)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_0+v'(0)\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_0\right\}(f)$$

它启发我们，在 p 周围的$(u,\ v)$坐标下，可用$\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_0$ 表示 p 点的一个切向量，它将函数 f 映照成$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0$; 对符号$(\partial/\partial v)_0$ 可作类似的解释. 我们指出，$(\partial/\partial u)_0$ 和$(\partial/\partial v)$. 可分别解释为“坐标曲线”

$$u\to X(u,0),\quad v\to X(0,v)$$

在 p 点的切向量(图 5-49).

从上面讨论可以看到，p 点切向量作为通常函数的微分算子的集合是二维向量空间 $T_p(S)$, 称为 S 在 p 点的切空间. 显然，p 点附近参数表示 X: $U\to S$ 的选取对 $X(U)$中任意一点 q, 确定了 $T_q(s)$的一组对应的基$\{(\partial/\partial u)_q,\ (\partial/\partial v)_q\}$.

有了切空间的概念，我们就能将微分的定义推广到抽象曲面.

定义 4 设 S_1 和 S_2 是抽象曲面，ϕ: $S_1\to S_2$ 是可微映照. 对每点 $p\in S_1$ 及每个 $W\in T_p(S_1)$, 考虑可微曲线 α: $(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to S_1$, $\alpha(0)=p$, $\alpha'(0)=W$. 置 $\beta=\phi\circ\alpha$. 由 $d\phi_p(W)=\beta'(0)$给出的映照 $d\phi_p$: $T_p(S_1)\to T_{\phi(p)}(S_2)$是有明确定义的线性映照，称为 ϕ 在 p 点的微分.

$d\phi_p$ 为有意义及线性的证明和 2.4 性质 2 的证明完全相同.

现在，我们到了推广内蕴几何的最后一步.

定义 5 几何曲面(2 维 Riemann 流形)是一个抽象曲面 S 再加上在每个切空间 $T_p(S)$,

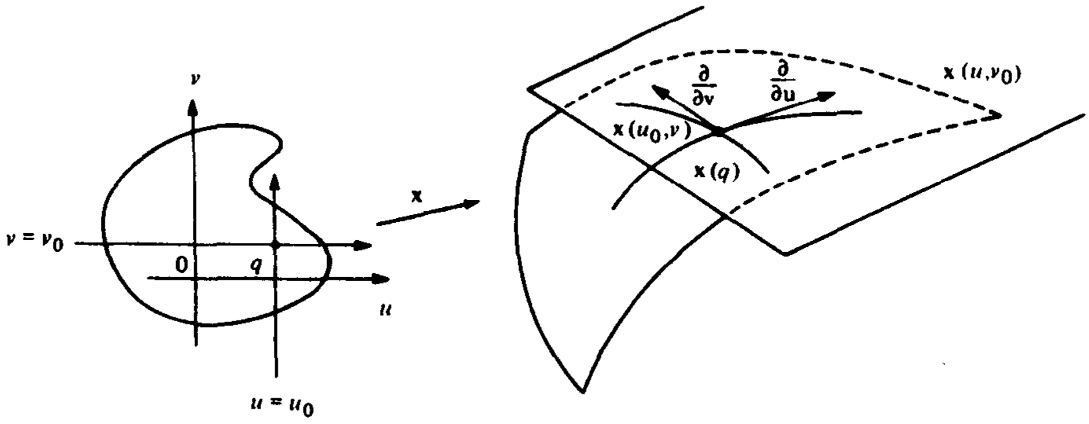


图 5-49

$p\in S$ 取定了内积$\langle,\rangle_p$，这些内积又随 p 按下列意义可微地变化. 对 p 点附近的某个(因此也就是所有)参数表示 X：$U\to S$，函数

$$E(u, v)=\left\langle\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right\rangle$$

$$F(u, v)=\left\langle\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle, \quad G(u, v)=\left\langle\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle$$

在 U 中是可微函数. 内积$\langle,\rangle$通常称为 S 上的(Riemann)度量.

现在，将内蕴几何的概念推广到几何曲面就很简单了. 确实，有了函数 E，F，G，我们用 4.3 方程组 2 来定义 Christoffel 符号. 因为内蕴几何的概念全都是用 Christoffel 符号来定义的，这样它们也就在 S 中有了定义.

因此，沿曲线向量场的协变导数由 4.4 方程(1)给出. 平行移动的存在性从 4.4 命题 2 得到，而且，测地线是其切向量场的协变导数为零的曲线. Gauss 曲率可以由 4.3 方程(5)定义，或如在 4.5 所做的一样，用平行移动来表示.

从下列考虑可以看到，这样一来引进了某些新的有趣的对象. 我们将从和 Hilbert 定理有关的例子开始.

例 3 设 $S=\mathbb{R}^2$ 是以(u, v)为坐标的平面，在每点 $q=(u, v)\in\mathbb{R}^2$ 以

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right\rangle_q=E=1, \quad \left\langle\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle_q=F=0$$

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle_q=G=e^{2u}$$

定义一个内积. $\mathbb{R}^2$ 以及这个内积构成一张几何曲面 H，称为双曲平面. H 的几何和$\mathbb{R}^2$ 的通常几何不同. 例如，H 的曲率是(4.3 习题 1)

$$\begin{aligned}K&=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}\\&=-\frac{1}{2e^u}\left(\frac{2e^{2u}}{e^u}\right)_u=-1\end{aligned}$$

实际上，H 上的几何正是 Lobachewski 非欧几何的模型，其中，欧几里得所有的公理，除了平面公理都成立(见 4.5)．为更清楚说明这一点，我们来计算 H 的测地线．

如果我们考察 $E=1$，$F=0$ 时测地线的微分方程(4.6，习题 2)，我们立即看到曲线 $v=$常数是测地线．为找另一族测地线，以 $\phi(u, v)=(v, e^{-u})$定义映照

$$\phi: H \to \mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

容易看到 ϕ 是可微的，并且因为 $y>0$，它有可微逆映照．这样，ϕ 是一个微分同胚，且由

$$\langle d\phi(W_1), d\phi(W_2)\rangle_{\phi(q)} = \langle W_1, W_2\rangle_q$$

在$\mathbb{R}_+^2$ 中能定义一个内积．为计算这个内积，注意到

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial y} = -e^u \frac{\partial}{\partial u}$$

所以，

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle = e^{2u} = \frac{1}{y^2}, \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$$

$$= 0, \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} = \right\rangle = \frac{1}{y^2}$$

具这个内积的$\mathbb{R}_+^2$ 是和 H 等距的，它有时称为 Poincaré 上半平面．

为确定 H 的测地线，我们在 Poincaré 上半平面上进行，且再做两次坐标变换．

首先，取定一点$(x_0, 0)$且置

$$x - x_0 = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta,$$

$0<\theta<\pi$，$0<\rho<+\infty$(图 5-50)．这是$\mathbb{R}_+^2$ 到自身的一个微分同胚，且

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \rho}\right\rangle = \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}, \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \frac{1}{\sin^2}\theta$$

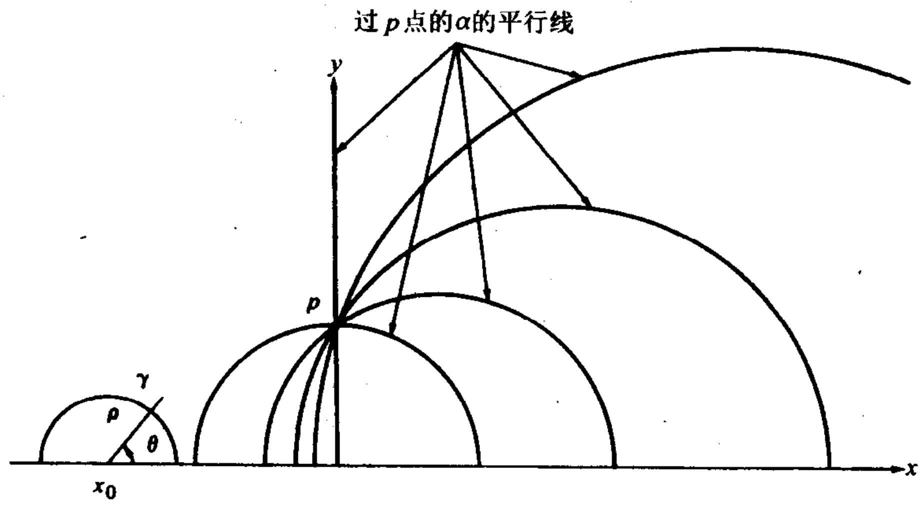


图 5-50

再考虑$\mathbb{R}_+^2$上的微分同胚(我们想改变θ，使之成为沿ρ=常数上的弧长参数)

$$\rho_1 = \rho, \theta_1 = \int_0^\theta \frac{1}{\sin\theta} d\theta$$

它给出

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \rho_1}, \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right\rangle = \frac{1}{\rho_1^2 \sin^2\theta}, \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right\rangle = 0, \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right\rangle = 1$$

再考察测地线微分方程($F=0$，$G=1$)，我们看到$\rho_1=\rho$=常数是测地线.（找$\mathbb{R}_+^2$中测地线的另一方法在习题 8 中给出.）

综合以上观察，我们得到结论，垂直于x轴的直线以及上半圆是 Poincaré 上半平面$\mathbb{R}_+^2$的测地线．它们是$\mathbb{R}_+^2$上的所有测地线，因为通过每一点$q\in\mathbb{R}_+^2$以及从q出发的每一方向，或者通过一个切于这方向且垂直于$y=0$轴的圆或者通过一垂直线(当给定的方向垂直时).

几何曲面$\mathbb{R}_+^2$是完备的；即测地线能对参数的所有值有定义．这个事实的证明留作练习(习题 7；也见习题 6).

容易看出，如果我们把$\mathbb{R}_+^2$中的测地线定义成直线，那么欧几里得的除平行公理外的所有公理在这个几何里都成立．在欧氏平面P中的平行公理说，从直线$\gamma\subset P$外一点只能作唯一直线$\gamma'\subset P$与γ不相交．实际上，在$\mathbb{R}_+^2$中不在某测地线γ上一点我们可作无限多条测地线与γ不相交.

那么产生一个问题，在$\mathbb{R}^3$中能否找到这样的正则曲面．从这个问题自然导致下列定义.

定义 6 对从抽象曲面S到$\mathbb{R}^3$中的一个可微映照ϕ：$S\to\mathbb{R}^3$，如果它的微分$d\phi_p$：$T_p(S)\to T_p(R^3)$是 1 对 1 的，那么ϕ称为浸入．而且，如果S有度量$\langle,\rangle$并且

$$\langle d\varphi_p(V), d\varphi_p(W)\rangle_{\varphi(p)} = \langle V, W\rangle_p, v, w \in T_p(S)$$

那么ϕ称为等距浸入.

注意，上述关系中的第一个内积是$\mathbb{R}^3$中的通常内积，而第二个内积是S上的 Rïemann 度量给出的．这意味着在等距浸入中，$\mathbb{R}^3$在S上“诱导”的度量和S上原来度量相一致.

准备在 5.11 中证明的 Hilbert 定理说，完备的双曲平面不能等距浸入到$\mathbb{R}^3$中去．特别地，在$\mathbb{R}^3$中不可能找到正则曲面作为 Lobachewski 几何的模型.

实际上，没必要将我们自己限制在$\mathbb{R}^3$中．当我们将$\mathbb{R}^3$换成$\mathbb{R}^4$或更一般的$\mathbb{R}^n$时，上述等距浸入的定义完全有意义．这样，我们能将开始的问题提得更一般，即问：为什么n，使完备的双曲平面能等距地侵入到$\mathbb{R}^n$中去？Hilbert 定理说$n\geqslant 4$．就我们所知$n=4$的情况还未解决[○].

因此，抽象曲面的引入带来了新的课题也使我们能更深入地考察重要的问题.

这一节的其余部分，我们将更详细地研究刚才引进的想法并说明它们如何自然地导致进一步的重要推广．这部分对理解下一节不再是必须的.

让我们看一些进一步的例子.

○ 完备的双曲平面能等距浸入到$\mathbb{R}^3$中．——译者注

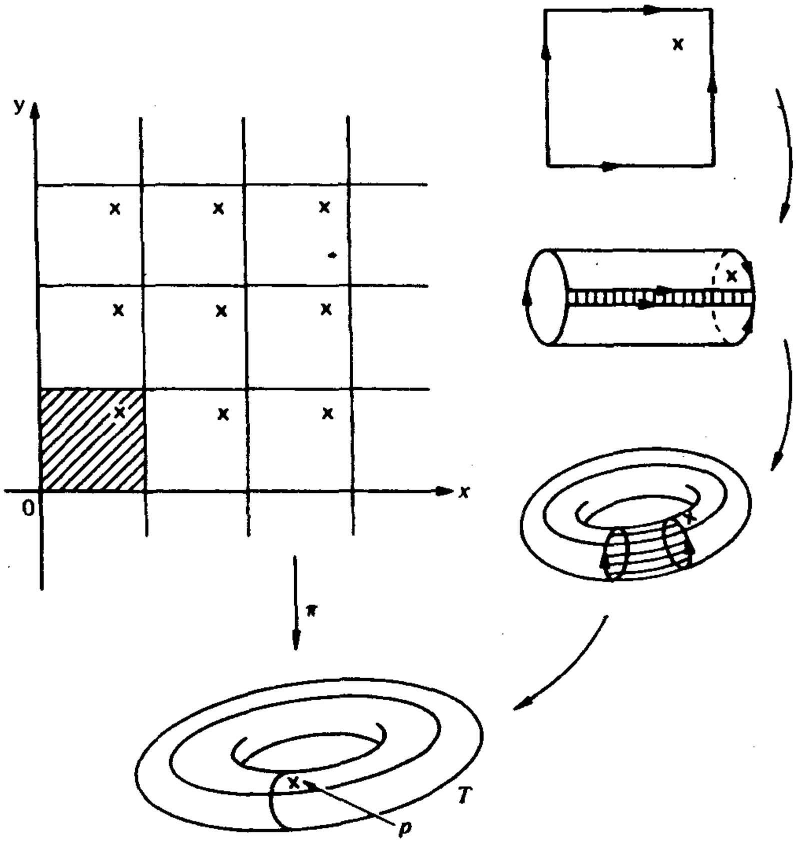


图 5-51 环面

例 4 设$\mathbb{R}^2$ 是以(x, y)为坐标的平面，$T_{m,n}$是$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的映照(平移)，定义为 $T_{m,n}(x, y)=(x+m, y+n)$，其中 m 和 n 是整数. 在$\mathbb{R}^2$ 中定义一种等价关系，如果存在整数 m，n 使 $T_{m,n}(x, y)=(x_1, y_1)$，那么$(x, y)\sim(x_1, y_1)$. 设 T 是$\mathbb{R}^2$ 在这种等价关系下的商空间，π 是$\mathbb{R}^2\to T$ 的自然投影映照，定义为$\pi(x, y)=\{T_{m,n}(x, y)$；对所有整数 m，$n\}$. 这样，在每个顶点具整数坐标的开单位正方形中，只有 T 的一个代表点，而且 T 可看作对边被等同起来的一个闭正方形.'(见图 5-51. 注意，由 x 表示的$\mathbb{R}^2$ 的所有点代表 T 中的同一点 p.)

设 i_α：$U_\alpha\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是$\mathbb{R}^2$ 的参数表示族，其中 i_α 是恒等映照，对所有 m，n 使 $U_\alpha\cap T_{m,n}(U_\alpha)=\phi$. 因为 $T_{m,n}$是微分同胚，容易验证族$(U_\alpha, \pi\circ i_\alpha)$是 T 的微分结构. T 称为(可微)环面. 从刚才 T 上微分结构的定义可知，π：$\mathbb{R}^2\to T$ 是可微映照并且是局部微分同胚(在图 5-51 中所做的结构表示，T 微分同胚于$\mathbb{R}^3$ 中的标准环面).

现在，注意到 $T_{m,n}$是$\mathbb{R}^2$ 中的等距映照且在 T 上引进几何(Riemann)结构如下. 设 $p\in T$ 和 $v\in T_p(T)$. 设 q_1，$q_2\in\mathbb{R}^2$ 及 w_1，$w_2\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\pi(q_1)=\pi(q_2)=p$ 及 $d\pi_{q_1}(w_1)=d\pi_{q_2}(w_2)=v$. 那么 $q_1\sim q_2$；所以存在 $T_{m,n}$使 $T_{m,n}(q_1)=q_2$，$d(T_{m,n})q_1(w_1)=w_2$. 因 $T_{m,n}$是等距，$|w_1|=|w_2|$. 现在，在 $T_p(T)$中定义 v 的长度为 $|v|=|d\pi_{q_1}(w_1)|$. 从此可见，它是有意义的. 显然，对任何 $p\in T$ 这产生了 $T_p(T)$上的一个内积$\langle,\rangle_p$. 因为它实质上是$\mathbb{R}^2$ 上的内积且 π 是局部微分同胚，$\langle,\rangle_p$ 随 p 可微地变化.

观察到 T 的第一基本形式的系数在$\{U_\alpha, \pi\circ i_\alpha\}$的任一参数表示下是 $E=G=1$，$F=0$. 这

样，这个环面在局部就像欧氏空间．例如，它的 Gauss 曲率恒等于零(见 4.3 习题 1)．这就是平坦环面这个名称的来源，它通常指赋于刚才描述的内积的 T.

显然，平坦环面不同能等距浸入到$\mathbb{R}^3$ 中去，因为，由紧致性，它应该有一正曲率的点(见 3.3 习题 16 或 5.2 引理 1)．但是，它能等距浸入到$\mathbb{R}^4$ 中.

事实上，设 F：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的定义为

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}(\cos2\pi x,\sin2\pi x,\cos2\pi y,\sin2\pi y)$$

因为对所有整数 m，n 有 $F(x+m,\ y+n)=F(x,\ y)$，所以我们能用 $\phi(p)=F(q)$，$q\in\pi^{-1}(p)$ 来定义映照 ϕ：$T\to\mathbb{R}^4$．显然，$\phi\circ\pi=F$ 且因为 π：$\mathbb{R}^2\to T$ 是局部微分同胚，ϕ 是可微的．并且 $d\phi$ 的秩等于 dF 的秩，容易验证其秩为 2．这样，ϕ 是一个浸入．为看出浸入是等距的，我们首先注意到如果 $e_1=(1,\ 0)$，$e_2=(0,\ 1)$是$\mathbb{R}^2$ 中规范基的二个向量，那么向量 $d\pi_q(e_1)=f_1$，$d\pi_q(e_2)=f_2$，$q\in\mathbb{R}^2$ 构成 $T_{\pi(q)}(T)$的一组基．根据 T 上内积的定义，$\langle f_i,\ f_j\rangle=\langle e_i,\ e_j\rangle$，$i$，$j=1$，2．其次，我们计算

$$\frac{\partial F}{\partial x}=dF(e_1)=(-\sin2\pi x,\cos2\pi x,0,0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=dF(e_2)=(0,0,-\sin2\pi y,\cos2\pi y)$$

且得到

$$\langle dF(e_i),dF(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\langle f_i,f_j\rangle$$

这样，

$$\begin{aligned}\langle d\phi(f_i),d\phi(f_j)\rangle&=\langle d\phi(d\pi(e_i),d\phi(d\pi(e_j))\rangle\\&=\langle f_i,f_j\rangle\end{aligned}$$

这就得到 ϕ 是等距浸入，符合我们的断言.

应该指出，一个浸入 ϕ：$S\to\mathbb{R}^n$ 的像 $\phi(S)$可能自身相交．在上述例中，ϕ：$T\to\mathbb{R}^4$ 是 1 对 1 的，并且 ϕ 是到它像上的同胚．为方便应用下列术语.

定义 7 设 S 是抽象曲面，可微映照 ϕ：$S\to\mathbb{R}^n$ 如果是一个浸入并且是一个到它像上的同胚，那么 ϕ 称为嵌入.

例如，$\mathbb{R}^3$ 中的正则曲面的特征是抽象曲面 S 在嵌入 ϕ：$S\to\mathbb{R}^3$ 下的象．这意味着只有那些能嵌入到$\mathbb{R}^3$ 中去的抽象曲面，才能在前面研究的$\mathbb{R}^3$ 中正则曲面中找到．这个很强的限制性能在下面例子中看到.

例 5 我们首先注意，可定向性的定义(见 2.6 定义 1)不必改动一个词就能被推广到抽象曲面．现在考虑例 1 中的实射影平面 P^2．我们断言 P^2 是不可定向的.

为证明这一点，先作下列一般的观察．只要抽象曲面 S 包含一个微分同胚于 Möbius 带(2.6 例 3)的开集 M，它就是不可定向的．否则，存在一族覆盖 S 的参数表示，它们的坐标变换有正的 Jacobi 行列式；这族参数表示在 M 上的限制将诱导 M 上的一个定向，这是不可能的.

现在，P^2 是从 S^2 等同对径点而得到．在 S^2 中考虑其中心在半赤道上的开经线段组成的

薄带 B(图 5-52). 在等同对径点后，B 显然成为一个 P^2 中的开 Möbius 带. 因此 P^2 是不可定向的.

用类似的讨论，可以说明例 2 的 Klein 瓶也是不可定向的. 一般地，只要正则曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 关于$\mathbb{R}^3$ 的原点是对称的，等同对称点就产生一张不可定向的抽象曲面.

可以证明，在$\mathbb{R}^3$ 中的紧致正则曲面是可以定向的(见 2.7 节注 2). 这样，P^2 和 K 不可能被嵌入到$\mathbb{R}^3$，并且对如上所生成的紧致不可定向曲面会发生同样情况. 因此，我们失漏了$\mathbb{R}^3$ 中相当数量的曲面㊀.

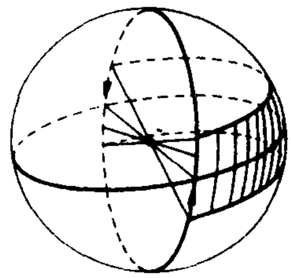


图 5-52 射影平面包含 Mabius 带

但是，P^2 和 K 能嵌入到$\mathbb{R}^4$中去. 对 Klein 瓶 K 考虑映照 G：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ 如下

$$G(u,v)=\left((r\cos v+a)\cos u,(r\cos v+a)\sin u,r\sin v\cos\frac{u}{2},r\sin v\sin\frac{u}{2}\right)$$

注意到 $G(u, v)=G(u+2m\pi, 2n\pi+v)$，其中 m 和 n 是整数. 这样，从正方形

$$[0,2\pi]\times[0,2\pi]\subset\mathbb{R}^2$$

出发，取一组对边，先将其中一边关于这边的中心反射，然后等同它们及另一组对边，从而得到一个空间，那么，G 诱导了这个空间上的一个映照 ψ(见图 5-53). 要知道这就是如例 2 所定义的 Klein 瓶也可这样来看. 去掉环面开的一半，然后等同对径点，注意到两种过程都导致同样的曲面(图 5-53).

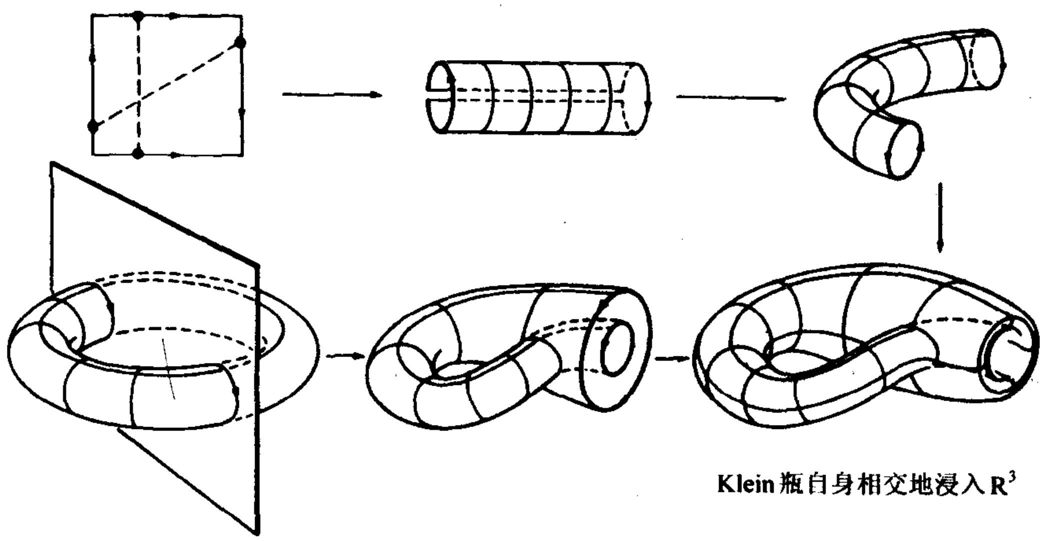


图 5-53

因此，ψ 是 K 到$\mathbb{R}^4$的映照. 还观察到

$$G(u+4m\pi,v+2m\pi)=G(u,v)$$

㊀ 从上下文看最后两句话的意思是：如果只考虑$\mathbb{R}^3$ 中正则曲面，将失漏相当数量(如 P^2 和 K 类型)的曲面. ——译者注

由此得到$G=\psi\circ\pi_1\circ\pi$，其中π：$\mathbb{R}^2\to T$实质上是到环面T上的自然投影(见例 4)，并且π_1：$T\to K$对应于等同T中的“对径点”. 根据T和K上微分结构的定义，π和π_1是局部微分同胚. 这样ψ：$K\to\mathbb{R}^4$是可微的，并且$d\psi$的秩和dG的秩相同. 而容易计算dG的秩是 2；所以ψ是一个浸入. 因为K是紧致的且ψ是 1 对 1 的，还容易看出ψ^{-1}在$\psi(K)$中是连续的. 这样，ψ如我们希望的是一个嵌入.

对射影平面P^2，考虑映照F：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$

$$F(x,y,z)=(x^2-y^2,xy,xz,yz)$$

设$S^2\subset\mathbb{R}^3$是以$\mathbb{R}^3$原点为中心的单位球面. 显然限制映照$\phi=F\mid_{S^2}$满足$\phi(p)=\phi(-p)$. 因此，ϕ诱导了一个映照

$$\tilde{\phi}:P^2\to\mathbb{R}^4$$

它的定义为

$$\tilde{\phi}(\{p,-p\})=\phi(p)$$

为看出ϕ(所以$\tilde{\phi}$)是浸入，考虑S^2的参数表示X

$$X(x,y)=(x,y,+\sqrt{1-x^2-y^2})$$

其中$x^2+y^2\leqslant 1$. 那么

$$\phi\circ X(x,y)=(x^2-y^2,xy,xD,yD),\quad D=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

容易验证$d(\phi\circ X)$的矩阵的秩是 2. 这样，$\tilde{\phi}$是浸入.

为看出$\tilde{\phi}$是 1 对 1 的，置

$$x^2-y^2=a,xy=b,xz=c,yz=d \tag{2}$$

只要证明，在条件$x^2+y^2+z^2=1$下，上述方程只有(x，y，z)及($-x$，$-y$，$-z$)形式的解. 事实上，我们可以记

$$\begin{aligned}&x^2d=bc,\quad y^2c=bd\\&z^2b=cd,x^2-y^2=a\\&x^2+y^2+z^2=1\end{aligned} \tag{3}$$

其中头三个方程来自(2)的后三个方程.

现在，如果b，c，d之一非零，那么(3)中的方程将给出x^2，y^2和z^2，并且一旦给出其中一个坐标的符号，其余二个坐标的符号将由(2)中方程所确定. 如果$b=c=d=0$，(2)中的方程和(3)中最后一个方程说明确好有二个坐标为零，而余下的坐标是± 1，不管那种情况，解有所要求的形式，并且$\tilde{\phi}$是 1 对 1 的.

由紧致性，$\tilde{\phi}$是嵌入，这就结束了本例.

如果我们回过来看抽象曲面的定义，我们看到维数 2 不起实质性的作用. 因此，我们能将那个定义推广到任意n，正像我们将看到的，这可能是有用的.

定义 1a n维的*微分流形*是集合M以及从开集$U_\alpha\subset\mathbb{R}^n$到$M$的 1 对 1 映照族$X_\alpha$：$U_\alpha\to M$，满足

1. $\bigcup\limits_\alpha X_\alpha(U_\alpha)=M$；

2. 对每对使$X_\alpha(U_\alpha)\cap X_\beta(U_\beta)=W\neq\phi$的$\alpha$，$\beta$，$X_\alpha^{-1}(W)$以及$X_\beta^{-1}(W)$是$\mathbb{R}^n$中的开集，而

且 $X_\beta^{-1}\circ X_\alpha$，$X_\alpha^{-1}\circ X_\beta$ 是可微映照；

3. 族 $\{U_\alpha, X_\beta\}$ 关于条件 1 和 2 是极大的.

满足条件 1 和 2 的族 $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ 称为 M 上的微分结构. 在 M 上给定了微分结构，我们容易使之变成极大，只要将所有可能的与给定微分结构中某些参数表示相交部分满足条件 2 的参数表示加到给定的微分结构 $\{U_\alpha, X_\alpha\}$ 中就可以了. 所以，用不太严格的话说，微分流形就是一个集合再加上一个微分结构.

注 在 M 中的开集族可按下列方式定义：对 M 中的子集 $V\subset M$，如果对每个 α，$X_\alpha^{-1}(V\cap X_\alpha(U_\alpha))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，那么 V 称为开集. 具有点集拓扑知识的读者将注意到这样的开集族定义了 M 上的一个自然拓扑. 在这个拓扑中映照 X_α 是连续的并且 $X_\alpha(U_\alpha)$ 在 M 中是开的. 在流形上某些深入定理中，有必要在 M 的自然拓扑上再加上某些条件.

可微映照和切向量的定义可逐字逐句地搬到微分流形中来. 当然，切空间现在是 n 维向量空间. 微分和定向性的定义也直接地推广到现在情形.

下面的例子中我们将说明 2 维流形上的问题是如何自然地导致考虑高维流形的.

例 6(切丛) 设 S 是抽象曲面并且设 $T(S)=\{(p, W), p\in S, W\in T_p(S)\}$. 我们将说明集合 $T(S)$ 可给一个微分结构(4 维)从而称为 S 的切丛.

设 $\{U_\alpha, X_\alpha\}$ 是 S 的微分结构. 用 (u_α, v_α) 表示 U_α 的坐标，而用 $\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$ 表示 $X_\alpha(U_\alpha)$ 的切平面中的相关基. 对每个 α，用

$$Y_\alpha(u_\alpha,v_\alpha,x,y)=\left(X_\alpha(u_\alpha,v_\alpha),x\frac{\partial}{\partial u_\alpha}+y\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

定义映照 Y_α：$U_\alpha\times\mathbb{R}^2\to T(S)$. 几何上，这意味着将 p 点的坐标 u_α，v_α 以及 w 在基 $\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$ 下的坐标取作为点 $(p, w)\in T(S)$ 的坐标.

我们将说明 $\{U_\alpha\times\mathbb{R}^2, Y_\alpha\}$ 是 $T(S)$ 的微分结构. 因为

$$\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha)=S \text{ 和 } (dX_\alpha)_q(\mathbb{R}^2)=T_{X_\alpha(q)}(S),\quad q\in U_\alpha$$

我们有

$$U_\alpha Y_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^2)=T(S)$$

这就验证了定义 1a 的条件 1. 现在设

$$(p,w)\in Y_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^2)\cap Y_\beta(U_\beta\times\mathbb{R}^2)$$

那么 $(p, w)=(X_\alpha(q_\alpha), dX_\alpha(w_\alpha))=(X_\beta(q_\beta), dX_\beta(w_\beta))$.

其中 $q_\alpha\in U_\alpha$，$q_\beta\in U_\beta$，w_α，$w_\beta\in\mathbb{R}^2$. 所以，

$$\begin{aligned}Y_\beta^{-1}\circ Y_\alpha(q_\alpha,w_\alpha)&=Y_\beta^{-1}(X_\alpha(q_\alpha),dX_\alpha(w_\alpha))\\&=((X_\beta^{-1}\circ X_\alpha)(q_\alpha),d(X_\beta^{-1}\circ X_\alpha)(w_\alpha))\end{aligned}$$

因为 $X_\beta^{-1}\circ X_\alpha$ 是可微的，所以 $d(X_\beta^{-1}\circ X_\alpha)$ 也是可微的. 由此得到 $Y_\beta^{-1}\circ Y_\alpha$ 是可微的，这就验证了定义 1a 的条件 2.

当考虑 S 上的二阶微分方程时，自然地可将问题放在切丛上考虑. 例如，几何曲面 S 上的测地线方程，在局部坐标下，可写成(见 4.7)

$$u''=f_1(u,v,u',v')$$

$$v'' = f_2(u,v,u',v')$$

微分方程中有一个经典的技巧，即用引进新的变量 $x=u'$，$y=v'$将上方程组化为一阶系统

$$\begin{aligned} x' &= f_1(u,v,x,y) \\ y' &= f_2(u,v,x,y) \\ u' &= f_3(u,v,x,y) \\ v' &= f_4(u,v,x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

这可被解释为将问题放在以$(u,\ v,\ x,\ y)$为坐标的切丛 $T(S)$中考虑，而将测地线看作为在 $T(S)$(中局部地由(4)给出的向量场的轨线．可以证明这种向量场在整个 $T(S)$)上是确有定义的；即在两个坐标邻域的相交区域中，由(4)给出的向量场是一致的．这个场(或更恰当地它的轨线)称为 $T(S)$中的*测地流*．当研究 S 上测地线的整体性质时，这是一个非常自然的研究对象．

回顾 4.7 应注意到，我们已经以一种隐蔽的形式用到了流形 $T(S)$．因为我们当时只对局部性质感兴趣，所以只涉足于坐标邻域(它实质上是$\mathbb{R}^4$的开集)．但是，当我们引进切丛概念时，即使是这个局部的工作也会变得更为简洁．

当然，我们也能定义任意 n 维流形的切丛．除了记号，细节是相同的，将它留作练习．

我们已能将几何曲面推广到任意维情形．

定义 5a Riemann *流形*是 n 维微分流形 M 以及对每点 $p\in M$，在 $T_p(M)$中定义一种内积 $\langle,\rangle_p$，它又按下述意义随 p 而可微地变化，对 $p\in X_\alpha(U_\alpha)$点附近的某个(因此一切)参数表示 X_α：$U_\alpha\to M$，函数

$$g_{ij}(u_1,\cdots,u_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i},\frac{\partial}{\partial u_j}\right\rangle,\quad i,j=1,\cdots,n$$

在 $X_\alpha^{-1}(p)$是可微的；这里$(u_1,\ \cdots,\ u_n)$是 $U_\alpha\subset\mathbb{R}^n$的坐标．

可微族$\{\langle,\rangle_p,\ p\in M\}$叫做 M 的 Riemann *结构*(或 Riemann *度量*)

注意到在曲面情形，我们已用传统的记号 $g_{11}=E$，$g_{12}=g_{21}=F$，$g_{22}=G$.

将内蕴几何的一些概念推广到 Riemann 流形不像微分流形情形那样直接．

首先，我们必须对 Riemann 流形定义协变导数的概念．为此，设 X：$U\to M$ 是以$(u_1,\ \cdots,\ u_n)$为坐标的参数表示且置

$$X_i = \partial/\partial u_i$$

因此，

$$g_{ij} = \langle X_i,X_j\rangle$$

我们想定义向量场 v 关于向量场 w 的协变导数 D_wv．我们希望 D_wv 有我们过去用过并且已被证明是有效的性质．首先，它应该有原协变导数的分配性质．因此，如果 u，v，w 是 M 上的向量场并且 f，g 是 M 上的可微函数，希望

$$D_{fu+gw}(v) = fD_uv + gD_wv \tag{5}$$

$$D_u(fv+gw) = fD_uv + \frac{\partial f}{\partial u}v + gD_uw + \frac{\partial g}{\partial u}w \tag{6}$$

其中如$\partial f/\partial u$是一个函数，它在 $p\in M$ 的值是 f 在曲线 α 上限制的导数$(f\circ\alpha)'(0)$，这里 α：$(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to M,\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=u$.

方程(5)和(6)说明，协变导数 D 一旦知道它在基向量上的值

$$D_{X_i}X_j = \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}X_k, \quad i,j,k = 1,\cdots,n$$

它就完全被确定，其中系数 Γ_{ij}^k 是还未确定的函数．其次，我们要 Γ_{ij}^k 关于 i 和 j 是对称的($\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$)；即对所有 i，j

$$D_{X_i}X_j = D_{X_j}X_i \tag{7}$$

再则，我们希望乘法规则成立；即

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\langle X_i, X_j\rangle = \langle D_{x_k}X_i, X_j\rangle + \langle X_i, D_{x_k}X_j\rangle \tag{8}$$

从方程(7)和(8)得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u_k}\langle X_i, X_j\rangle + \frac{\partial}{\partial u_i}\langle X_j, X_k\rangle - \frac{\partial}{\partial u_j}\langle X_k, X_i\rangle\\ &= 2\langle D_{x_i}X_k, X_j\rangle\end{aligned}$$

或等价地

$$\frac{\partial}{\partial u_k}g_{ij} + \frac{\partial}{\partial u_i}g_{jk} - \frac{\partial}{\partial u_j}g_{ki} = 2\sum_l \Gamma_{ik}^l g_{lj}$$

因为 $\det(g_{ij}) \neq 0$，我们可解这最后的方程组，并且得到 Γ_{ij}^k 是 Riemann 度量 g_{ij} 及其导数的函数(读者应该将上面的方程组与 4.3 方程组(2)作比较)．如果我们将 g_{ij} 看成矩阵且记它的逆阵为 g^{ij}，那么上述方程组的解是

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l}\right)$$

所以，给了 M 的一个 Riemann 结构，M 上存在满足方程组(5)～(8)的唯一的协变导数(也叫做给定 Riemann 结构的 Levi-Civita 联络)．

从协变导数出发，我们能定义平行移动，测地线，测地曲率，指数映照，完备性等等．定义完全和前面已经给出的一样．但是，曲率的概念要求更精细．下列属于 Riemann 的概念，也许是 Gauss 曲率在 Riemann 几何中最好的模拟．

设 $p \in M$ 以及 $\sigma \subset T_p(M)$ 是切空间 $T_p(M)$ 的 2 维子空间．考虑从 p 点出发与 σ 相切的所有 M 的测地线．从指数映照在 $T_p(M)$ 原点是局部微分同胚的事实，可以说明这种短测地线段组成包含 p 的一张抽象曲面 S．S 在 p 点的 Gauss 曲率叫做 M 在 p 点沿 σ 的截面曲率 $K(p, \sigma)$．

将截面曲率用 Levi-Civita 联络表示的公式是可以作出的，但是这样做就过于技术化而不能在这里描述．我们只说一下，在这一章中的大多数定理在 Riemann 几何中能被自然地作为问题提出．其中有一些是成立的，证明可毫无变动或稍作修改．(Hopf-Rinow 定理，Bonnet 定理，Hadamard 第一定理以及 Jacobi 定理都属于这一类．)但是，另一些却要作进一步假定才能成立(例如，Hadamard 第二定理)而且是使理论进一步发展的起因．

将上述想法完全展开会把我们引入 Riemann 几何的邻域．我们必须在这里止步而请读者查阅书末的参考文献．

习题

1. 在射影平面 P^2(见例 1)上引进度量，使自然投影 π: $S^2\to P^2$ 是局部等距. 这个度量的(Gauss)曲率是什么?

2. (无限 Möbius 带)设

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+y^2=1\}$$

是柱面，A: $C\to C$ 是映照(对径映照)$A(x, y, z)=(-x, -y, -z)$. 设 M 是 C 关于等价关系 $p\sim A(p)$的商空间及 π: $C\to M$ 是映照 $\pi(p)=\{p, A(p)\}$, $p\in C$.

a. 说明可以给 M 一个微分结构使 π 是局部微分同胚(这时 M 称为无限 Möbius 带).

b. 证明 M 是不可定向的.

c. 在 M 上引进 Riemann 结构使 π 是局部等距. 这个度量的曲率是什么?

3. a. 证明从球面到射影平面的投影映照 π: $S^2\to P^2$ 有下列性质：(1)π 是连续的并且 $\pi(S^2)=P^2$；(2)每点 $p\in P^2$ 有一个邻域 U 使 $\pi^{-1}(U)=V_1\cup V_2$，其中 V_1 和 V_2 是 S^2 的不相交开子集，并且 π 在每个 V_i 上的限制 $i=1, 2$，是到 U 上的同胚，所以，π 满足通常的二叶覆盖映照的条件(见 5.6 定义 1). 由于这个原因，我们说 S^2 是 P 的一个可定向二叶覆盖.

b. 在这个意义下，说明环面 T 是 Klein 瓶 K(见例 2)的可定向二叶覆盖，柱面是无限 Möbius 带(见习题 2)的可定向二叶覆盖.

4. (可定向二叶覆盖)这个习题给出不可定向曲面的可定向二叶覆盖的一般结构. 设 S 是一个抽象的、连通的、不可定向的曲面. 对每点 $p\in S$，考虑 $T_p(S)$所有基的集合 B. 对其中的两个基，如果它们的变换矩阵行列式为正则称为等价的. 这显然是一个等价关系并且将 B 分成两个不相交的集合(见 1.4). 设 $\mathcal{O}_p$ 是 B 在这等价关系下的商空间. $\mathcal{O}_p$ 有二个元素，并且每个元素 $O_p\in\mathcal{O}_p$ 是 $T_p(S)$的一个定向(见 1.4). 设 $\tilde{S}$ 是集合

$$\tilde{S}=\{(p,O_p);p\in S;O_p\in\mathcal{O}_p\}$$

为了给 $\tilde{S}$ 一个微分结构，设$\{U_\alpha, X_\alpha\}$是 S 的极大微分结构且定义 $\tilde{X}_\alpha$: $U_\alpha\to\tilde{S}$ 为

$$\tilde{X}_\alpha(u_\alpha,v_\alpha)=\left(X_\alpha(u_\alpha,v_\alpha),\left[\frac{\partial}{\partial u_\alpha},\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right]\right)$$

其中$(u_\alpha, v_\alpha)\in U_\alpha$，$[\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha]$表示被基$\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$所确定的 $\mathcal{O}_p$ 的元素. 证明：

a. $\{U_\alpha, \tilde{X}_\alpha\}$是 $\tilde{S}$ 上的一个微分结构，而且 $\tilde{S}$ 关于这个微分结构是定向曲面.

b. 由 $\pi(p, O_p)=p$ 定义的映照 π: $\tilde{S}\to S$ 是可微的满映照. 进而，每点 $p\in S$ 有一个邻域 U 使 $\pi^{-1}(U)=V_1\cup V_2$，其中 V_1 和 V_2 是 $\tilde{S}$ 的不相交的开子集而且 π 的每个 V_i，$i=1, 2$，上的限制是到 U 上的一个微分同胚. 据此，$\tilde{S}$ 称为 S 的一个可定向二叶覆盖.

5. 将 Gauss-Bonnet 定理(见 4.5)推广到可定向的几何曲面并且利用它来证明下列事实：

a. 在微分同胚于环面的抽象曲面 T 上没有曲率处处为正(或负)的 Riemann 度量.

b. 设 T 和 S^2 分别是微分同胚于环面和球面的抽象曲面，并且 φ: $T\to S^2$ 是可微映照. 那么 ϕ 至少有一个临界点，即有一点 $p\in T$ 使 $d\phi_p=0$.

6. 考虑具度量

$$E(x,y)=1,F(x,y)=0,G(x,y)=\frac{1}{y},(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$$

的上半平面$\mathbb{R}_+^2$(见例 3). 说明当向量接近于$\mathbb{R}_+^2$边界时其长度变得任意大并且垂直线段

$$x=0,0<\varepsilon\leqslant y\leqslant 1$$

的长度当$\varepsilon\to 0$时接近于 2. 证明这样度量是不完备的.

*7. 证明 Poincaré 上半平面(见例 3)是完备的几何曲面. 从而得到双曲平面是完整的.

8. 寻找 Poincaré 上半平面(见例 3)侧地线的另一种方法是利用对应变分问题的 Euler-Lagrange 方程(见 5.4 习题 4). 因为已知垂直线是测地线，我们能限于 $y=y(x)$形式的测地线. 所以，我们必须找积分($F=0$)

$$\int\sqrt{E+G(y')^2}dx=\int\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}dx$$

的临界点，因为$E=G=\frac{1}{y^2}$. 利用 5.4 习题 4 说明这个变分问题的解是形如

$$(x+k_1)^2+y^2=k_2^2,k_1,k_2 \doteq \text{常数}$$

的圆族.

9. 设$\tilde{S}$和 S 是连通的几何曲面，并且设 π: $\tilde{S}\to S$ 是可微的满映照，它有下列性质：对每点 $p\in S$，存在 p 点的一个邻域 U 使 $\pi^{-1}(U)=U_\alpha V_\alpha$，其中 V_α 是$\tilde{S}$的不相交开子集并且 π 限制于每个 V_α 是到 U 上的等距(所以，π 实质上是覆盖映照和局部等距).

a. 证明：S 是完备的充要条件为$\tilde{S}$是完备的.

b. 在习题 2 部分 C 中引进的无限 Möbius 带上是否有完备的度量?

10. (Kazdan-Warner 的结果)

a. 设在$\mathbb{R}^2$上给出度量

$E(x, y)=1$ $F(x, y)=0$, $G(x, y)>0$, $(x, y)\in\mathbb{R}^2$. 证明这个度量的曲率满足下列公式

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial x^2}+K(x,y)\sqrt{G}=0 \qquad (*)$$

b. 反之，在$\mathbb{R}^2$上给一个函数 $K(x, y)$，将 y 看为参数设$\sqrt{G}$是方程($*$)满足初始条件

$$\sqrt{G}(x_0,y)=1,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x}(x_0,y)=0$$

的解. 证明 G 在(x_0, y)的某邻域中是正的，这样在这个邻域中定义了一个度量. 这说明每一可微函数在局部是某(抽象)度量的曲率.

*c. 假定对所有$(x, y)\in\mathbb{R}^2$有 $K(x, y)\leqslant 0$. 说明上述 b 小题的解对所有 x 满足

$$\sqrt{G(x,y)}\geqslant\sqrt{G(x_0,y)}=1$$

所以，$G(x, y)$定义了整个$\mathbb{R}^2$上的度量. 并且证明这个度量是完备的. 这说明$\mathbb{R}^2$上的任何非正可微函数是$\mathbb{R}^2$上某完备度量的曲率. 如果我们不坚持度量是完备的要求，此结果对$\mathbb{R}^2$上任何可微函数 K 都成立. 试对照 J. Kazdan 和 F. Warner 的文章“Curvature Functions for

Open 2-Manifolds", Ann. of Math. 99(1974), 203～219，其中也证明了在5.4习题2中给出的 K 的条件也是对应度量为完备的充要条件.

5.11 Hilbert 定理

Hilbert 定理可叙述如下：

定理 S 是完备的几何曲面，具有负常曲率，那么它不可能被等距地浸入到 $\mathbb{R}^3$ 中去.

注 1 Hilbert 定理首先在 D. Hilbert 的"Über Flächen von konstanter Gausscher Krümung", Trans. Amer. Math. Soc. 2(1901), 87～99 一文中给出. 不久以后 E. Holmgren 在"Sur les surfaces à Courbure Constante negative", C. R. Acad. Sci. Paris 134(1902), 740～743 中给出了一个不同的证明. 我们这里将给出的证明是按照 Hilbert 原来的思想. 局部性部分本质上和 Hilbert 文章是一样的；但是，整体性部分有很大的不同. 感谢 J. A. Scheinkman 帮助我们作出这个证明，也感谢 M. Spivak 建议用下面的引理 7.

首先，注意到下面一些事实. 不妨假设曲率 $K=-1$，否则可用一常数因子乘以内积化为这种情形. 而且，因为 $\exp_p T_p(S)\to S$ 是局部微分同胚(5.5 定理的推论)，它在 $T_p(S)$ 上诱导了一个内积. 以 S' 记 $T_p(S)$ 关于这个诱导内积所组成的几何曲面，如果 ψ: $S\to\mathbb{R}^3$ 是一个等距浸入，那么 $\phi=\psi\circ\exp_p$: $S'\to\mathbb{R}^3$ 也是一个等距浸入. 这样，我们将问题化为证明不存在等距浸入 ϕ: $S'\to\mathbb{R}^3$，其中 S' 是定义了某种具 $K\equiv-1$ 的内积的平面.

引理 1 S' 的面积是无限的.

证明 我们来证明 S'(大范围)等距于双曲平面 H. 因后者的面积是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^u du dv=\infty$$

这就证明了引理.

设 $p\in H$, $p'\in S'$，且取它们切平面之间的线性等距对应 ψ: $T_p(H)\to T_{p'}(S')$. 定义映照 ϕ: $H\to S'$ 如下

$$\phi=\exp_{p'}\circ\psi\circ\exp_p^{-1}$$

因 H 的每一点都能用唯一的一条极小测地线与 p 相连结，ϕ 是有意义的.

在 p 点和 p' 点附近分别用极坐标 (ρ,θ) 和 (ρ',θ')，且要求 ϕ 将 $\theta=0$ 的轴映照到 $\theta'=0$ 的轴. 据 4.6 的结果，ϕ 保持第一基本形式；所以它是局部等距对应. 应用 Hadamard 定理后的附注，得到 ϕ 是一个覆盖映照. 因 S' 是单连通的，ϕ 是同胚，所以是一个(大范围)等距对应. 证毕.

下面，我们将假定存在一个等距浸入 ϕ: $S'\to\mathbb{R}^3$，其中 S' 是同胚于平面且具 $K\equiv-1$ 的几何曲面.

为避免 $\phi(S')$ 可能自相交的困难，证明将在 S' 上进行而利用浸入 ϕ 将 $\phi(S')\subset\mathbb{R}^3$ 的局部的外在几何转移到 S' 上来. 更仔细地说，因为 ϕ 是浸入，对每点 $p\in S'$，存在 p 的一个邻域 $V'\subset S'$，使 ϕ 在 V' 上的限制 $\phi|_{V'}=\bar{\phi}$ 是一个微分同胚. 譬如，在每一点 $\bar{\varphi}(q)\in\bar{\varphi}(V')$ 存在两个渐近方向，通过 $\bar{\phi}$，这两个方向诱导了 $q\in S'$ 上的两个方向，它们将被称为 S' 上在 q 点的渐近方向. 用这样的方式，讨论 S' 上的渐近曲线是有意义的，同样的方式能用于 $\phi(S')$ 的任何其他局部几

何对象.

让我们回顾一下，如果参数曲线网所组成的任何四边形的对边长相等，那么这样的参数曲线组成 Tchebyshef 网(见 2.5 习题 7). 在这种情况下，能取到适当的参数表示，使 $E=1$，$F=\cos\theta$，$G=1$：其中 θ 是坐标曲线的夹角(见 2.5 习题 8). 而且，在这种情况下，$K=-(\theta_{uv}/\sin\theta)$(见 4.3 习题 5).

引理 2 对每点 $p\in S'$，存在它附近的一个参数表示 $X: U\subset\mathbb{R}^2\to S'$，$p\in X(U)$，使 X 的参数曲线是 $X(U)=V'$ 的渐近曲线并构成一个 Tchebyshef 网(我们将用 V' 的渐近曲线构成 Tchebyshef 网这种说法来表达这一点).

证明 因 $K<0$，p 的某邻域 $V'\subset S'$ 能用这样的参数表示 $X(u,v)$，使 X 的坐标曲线是 V' 的渐近曲线. 这样，如果 e，f 和 g 是 S' 在这种参数表示下第二基本形式的系数，那么 $e=g=0$. 注意，这里用了上面指出过的约定，S' 的第二基本形式是指 $\phi(S')\subset\mathbb{R}^3$ 对应的第二基本形式.

在 $\phi(V')\subset\mathbb{R}^3$ 中，有

$$N_u\wedge N_v=K(X_u\wedge X_v)$$

所以，置 $D=\sqrt{EG-F^2}$，

$$(N\wedge N_v)_u-(N\wedge N_u)_v=2(N_u\wedge N_v)=2KDN$$

而且，

$$\begin{aligned}N\wedge N_u&=\frac{1}{D}\{(X_u\wedge X_v)\wedge N_u\}\\&=\frac{1}{D}\{\langle X_u,N_u\rangle X_v-\langle X_v,N_u\rangle X_u\}\\&=\frac{1}{D}(fX_u-eX_v)\end{aligned}$$

类似地，

$$N\wedge N_v=\frac{1}{D}(gX_u-fX_v)$$

因为 $K=-1=-(f^2/D^2)$ 及 $e=g=0$，我们得到

$$N\wedge N_u=\pm X_u,N\wedge N_v=\mp X_v$$

所以

$$2KDN=-2DN=\pm X_{uv}\pm X_{uv}=\pm 2X_{uv}$$

从此知 X_{uv} 平行于 N；所以，$E_v=2\langle X_{uv},X_u\rangle=0$，$G_u=2\langle X_{uv},X_v\rangle=0$. 但是 $E_v=G_u=0$ 就意味着参数曲线构成 Tchebyshef 网(2.5 习题 7). 证毕.

引理 3 设 $V'\subset S'$ 是 S' 的坐标邻域，其坐标曲线是 V' 中的渐近曲线. 那么，由坐标曲线构成的任何四边形的面积小于 2π.

证明 设$(\bar{u},\bar{v})$是 V' 的参数. 根据引理 1 的讨论，坐标曲线构成 Tchebyshef 网. 这样就能引进新的参数(u,v)使 $E=G=1$ 和 $F=\cos\theta$. 设 R 是由参数曲线组成的四边形，其顶点分别为(u_1,v_1)，(u_2,v_1)，(u_2,v_2)，(u_1,v_2)，内角分别为 α_1，α_2，α_3，α_4(图 5-54). 因 $E=G=1$，$F=\cos\theta$ 及 $\theta_{uv}=\sin\theta$，我们得到

$$A=\int_R dA=\int_R \sin\theta dudv=\int_R \theta_{uv}dudv$$
$$=\theta(u_1,v_1)-\theta(u_2,v_1)+\theta(u_2,v_2)-\theta(u_1,v_2)$$
$$=\alpha_1+\alpha_3-(\pi-\alpha_2)-(\pi-\alpha_4)=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i-2\pi<2\pi$$

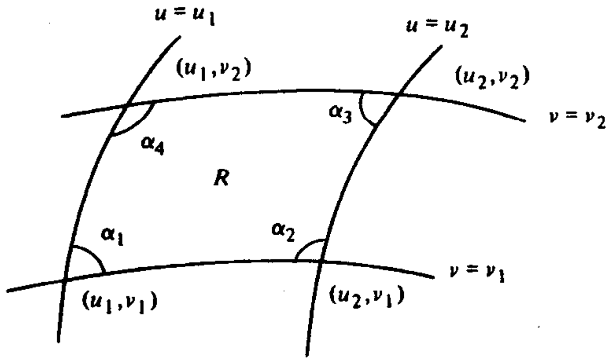


图 5-54

因为 $\alpha_i<\pi$. 证毕.

迄今为止，考虑都是局部的. 我们将定义一个映照 X：$\mathbb{R}^2\to S'$并且证明 X 是整个 S'的参数表示.

映照 X 定义如下(图 5-55). 固定 S'上一点 O 且在通过 O 的两条渐近线上取好定向. 这二条渐近线中取定一条叫做 a_1，称另一条为 a_2. 对每个$(s, t)\in\mathbb{R}^2$，沿着 a_1 从 O 出发取长度为 s 的点，称为 p'. 过 p'有二条渐近线，其一为 a_1. 取另一条渐近线，给它一个由 a_2 的定向沿 a_1 连续延伸而得的定向. 在这条定向渐近线上从 p'出发取长度 t，如此得到的点是 $X(s, t)$.

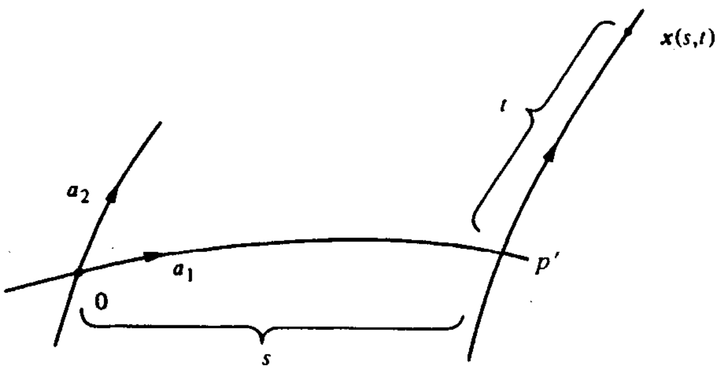


图 5-55

$X(s, t)$对所有$(s, t)\in\mathbb{R}^2$ 是有意义的. 事实上，如果 $X(s, 0)$无意义，那么存在 s_1，使 $a_1(s)$对所有 $s<s_1$ 有定义，而对 $s=s_1$ 无定义. 设 $q=\lim\limits_{s\to s_1}a_1(s)$. 由完备性，$q\in S'$. 根据引理 2，$a_1(s_1)$是有定义的，得到矛盾. 这就说明 $X(s, 0)$对所有 $s\in\mathbb{R}$ 是有意义的. 用同样的论述，可说明 $X(s, t)$对所有 $t\in\mathbb{R}$ 有定义.

现在，我们必须说明 X 是 S'的参数表示. 这将通过一系列引理来做到.

引理 4 对每一固定的 t，曲线 $X(s,t)$，$-\infty<s<\infty$是以 s 为弧长的渐近线.

证明 对每点 $X(s',t')\in s'$，根据引理 2 存在一个"矩形"邻域(即形如 $t_a<t<t_b$，$s_a<s<s_b$ 的邻域)，使这个邻域中的渐近线构成 Tchebyshef 网. 我们首先指出，如果对某个 t_0，$t_a<t_0<t_b$，曲线 $X(s,t_0)$，$s_a<s<s_b$，是渐近线，那么每一曲线 $x(s,t)$，$t_a<\bar{t}<t_b$ 也是渐近线. 事实上，点 $X(s,\bar{t})$是从 $X(s,0)$取起长度为 $\bar{t}$ 处的点，同样也是从 $X(s,t_0)$起取长度为 $\bar{t}-t_0$ 处的点. 因在这邻域内渐近曲线组成 Tchebyshef 网，这就证明了我们的断言.

现在，设 $X(s_1,t_1)\in s'$是任意一点. 根据线段 $X(s_1,t)$，$0\leqslant t\leqslant t_1$ 的紧致性，能用有限个矩形邻域覆盖它，而每个矩形邻域的渐近线组成 Tchebyshef 网(图 5-56)，因为 $X(s,0)$是渐近线，我们反复运用前面描述的过程就证明了 $X(s,t_1)$是 s_1 邻域中的渐近线. 因(s_1,t_1)是任意的，这就得到引理的结论. 证毕.

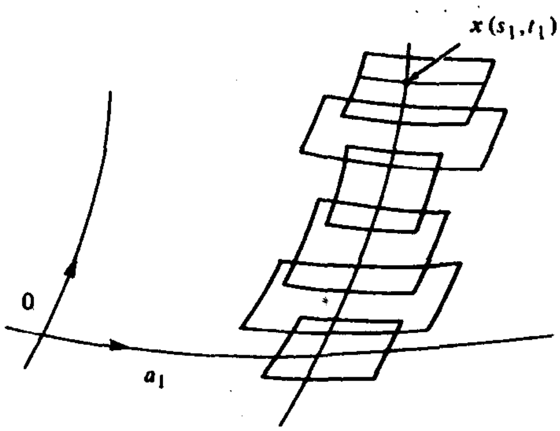


图 5-56

引理 5 X 是局部微分同胚.

证明 一方面 $X(s_0,t)$和 $X(s,t_0)$是以弧长为参数的渐近线，而另一方面 S'上能引进局部参数表示，使参数曲线为 S'的渐近线并且 $E=G=1$. 这样 X 局部就和这样参数表示相一致. 这就得到结论. 证毕.

引理 6 X 是满映照.

证明 设 $Q=X(\mathbb{R}^2)$. 因为 X 是局部微分同胚，Q 在 s'中是开集. 我们还指出，如果 $p'=X(s_0,t_0)$，那么通过 p'的两条渐近线完全落在 Q 中.

我们假定 $Q\neq S'$. 因 S'是连通的，那么边界 $\mathrm{Bd}Q\neq\phi$. 设 $p\in\mathrm{Bd}Q$. 因 Q 在 S'中是开的，$p\notin Q$. 现在考虑 p 点的一个矩形邻域 R，其中渐近线构成 Tchebyshef 网(图 5-57). 设 $q\in Q\cap R$. 那么过 q 的某条渐近线交于过 p 的某条渐近线. 根据上面指出的事实而得到矛盾. 证毕.

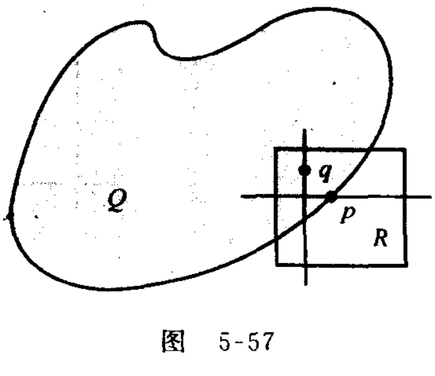


图 5-57

引理 7 在 S'上有二个线性独立的可微向量场，它们都和 s'的渐近线相切.

证明 通过 S'的每一点有两条不同的渐近线. 固定一点

$p\in S'$，且取两个单位向量 $v_1(p)$和 $v_2(p)$与过 p 点的渐近线相切. 设 $q\in S'$是任意一点而 α_0：$[0, l]\to S'$是过 p，q 的一条弧，使得 $\alpha_0(0)=p$，$\alpha_0(l)=q$：定义 $v_1(\alpha_0(s))$，$s\in[0, l]$，为 $v_1(p)$沿α_0 的(唯一)连续延伸，它切于某一渐近线. 类似地，定义 $v_2(\alpha_0(s))$，$s\in[0, l]$.

我们断言 $v_1(q)$和 $v_2(q)$不依赖于连结 p 和 q 的弧的选取. 这样，v_1 和 v_2 就是在 S'上有定义的连续向量场，它们都切于渐近线. 所以 v_1 和 v_2 是可微的，引理就被证明了.

为证明上述断言，让我们对 v_1 来进行，v_2 的情形是类似的. 设 α_1：$[0, l]\to S'$是另一条弧，$\alpha_1(0)=p$，$\alpha_1(l)=q$. 因为 S'是单连通的(它同胚于平面，见 5.6 定义 3)，存在一个 α_0 和 α_1 之间的同伦 $\alpha_t(s)=H(s, t)$，$s\in[0, l]$，$t\in[0, 1]$(见 5.6 定义 2)；即 $\alpha_t(s)$是连续 p、q 的曲线弧的连续族. 根据渐近方向的连续性和$[0, l]$的紧致性知道，对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $t_0\in[0, 1]$使当 $t<t_0$ 时 $|v_1(\alpha_t(l))-v_1(\alpha_0(l))|<\varepsilon$. 这样，如果 t_0 足够小，我们对 $t<t_0$ 有 $v_1(\alpha_t(l))=v_1(\alpha_0(l))$. 因为$[0, 1]$是紧致的，我们能逐步推广这个讨论于所有 $t\in[0, 1]$. 所以，$v_1(\alpha_1(l))=v_1(\alpha_0(l))$.

这就证明了我们的断言而得到引理的证明. 证毕.

引理 8 X 是 1 对 1 映照.

证明 我们想证明 $X(s_0, t_0)=X(s_1, t_1)$意味着$(s_0, t_0)=(s_1, t_1)$.

首先假设 $X(s_0, t_0)=X(s_1, t_0)$而 $s_1>s_0$，并且证明这将导致矛盾. 根据引理 7，一条渐近线不可能自身相交除非在交点的切线一致. 因 X 是局部微分同胚，存在 $\varepsilon>0$，使

$$X(s_0,t) = X(s_1,t), t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$$

根据同样道理，曲线 $x(s_0, t)$上的满足

$$X(s_0,t) = X(s_1,t)$$

的点组成这条曲线上的既开又闭的集；所以 $X(s_0, t)=X(s_1, t)$对所有 t 均成立. 进而，根据映照 X 的构造，$X(s_0+a, t_0)=X(s_1+a, t_0)$，$0\leqslant a\leqslant s_1-s_0$；所以，对所有 t，$X(s_0+a, t)=X(s_1+a, t)$. 这样，或者

1. 对所有 $t>t_0$，$x(s_0, t_0)\neq x(s_0, t)$，或者

2. 存在 $t=t_1>t_0$，使 $X(s_0, t_0)=X(s_0, t_1)$；根据类似的讨论，我们将证明对所有 s，$0\leqslant b\leqslant t_1-t_0$，$X(s, t_0+b)=X(s, t_1+b)$.

情况 1. X 将$\mathbb{R}^2$ 中距离为 s_1-s_0 的两条垂线间的带状域映照到 S'上，且将这些垂线上具相同 t 的点等同起来. 这就意味着 S'同胚于一个柱面，因而得到矛盾(图 5-58).

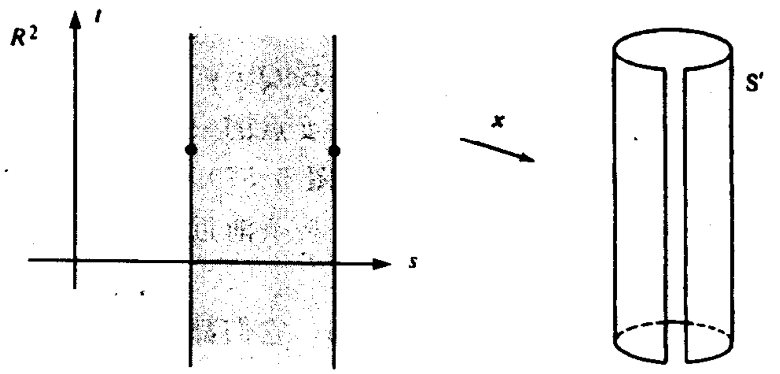


图 5-58

情况 2. X 将两条距离为 s_1-s_0 的水平线及两条距离为 t_1-t_0 的垂直线组成的矩形映照到 S' 上，且将边界中对边的对应点等同起来. 这意味着 S' 同胚于一个环面，也得到矛盾(图 5-59).

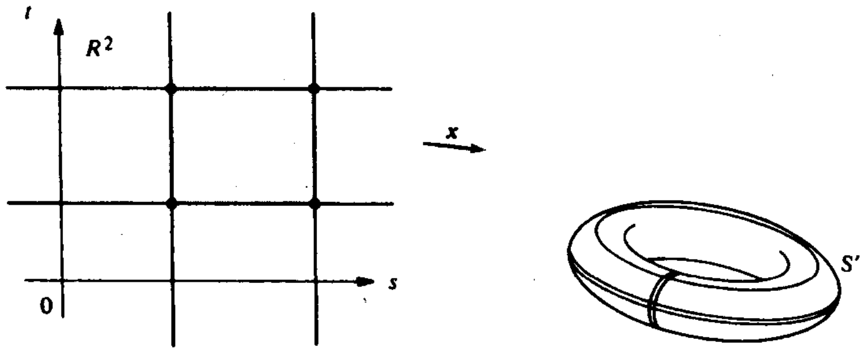


图 5-59

根据类似的讨论，我们说明 $X(s_0, t_0)=X(s_0, t_1)$ 而 $t_1>t_0$，导致同样的矛盾.

我们现在考虑情况 $X(s_0, t_0)=X(s_1, t_1)$，但 $s_1>s_0$，$t_1>t_0$. 根据 X 是局部微分同胚和 S' 的连通性，我们看到 X 将 $\mathbb{R}^2$ 中两条距离为 $\sqrt{(s_1-s_0)^2+(t_1-t_0)^2}$、垂直于向量 $(s_1-s_0, t_1-t_0)\in\mathbb{R}^2$ 的直线间的带状域映照到 S' 上. 现在我们也能如前面的讨论一样考虑情况 1 和 2，从而说明 S' 或者同胚于柱面，或者同胚于环面. 无论怎样，这种情况也得到矛盾. 证毕.

现在就容易得到 Hilbert 定理的证明.

定理的证明 假定存在一个等距浸入 ψ: $S\to\mathbb{R}^3$，其中 S 是具有 $K\equiv-1$ 的完备曲面. 设 $p\in S$ 且用 S' 表示赋以由 $\exp_p$: $T_p(S)\to S$ 所诱导度量的切平面 $T_p(S)$. 那么 $\phi=\psi\circ\exp_p$: $S'\to\mathbb{R}^3$ 是等距浸入，引理 5，6 和 8 说明存在整个 S' 上参数表示 X: $\mathbb{R}^2\to S'$，使 X 的坐标曲线是 S' 的渐近线(引理 4). 这样，我们能用坐标四边形 Q_n 的并来覆盖 S'，且有 $Q_n\subset Q_{n+1}$. 根据引理 3，Q_n 的面积小于 2π. 另一方面，由引理 1，S' 的面积是无界的. 这个矛盾也就完成了证明. 证毕.

注 2 Hilbert 定理被 N. V. Efimov 在"Appearance of Singularities on Surfaces of Negative Curvature", Math. Sb. 106(1954). A. M. S. Translation Seriesr Vol. 66, 1968, 154～190 中所推广. 他证明了下列 Cohn-Vossen 的猜测：设 S 是具曲率 K，$K\leqslant\delta<0$ 的完备曲面. 那么不存在 S 到 $\mathbb{R}^3$ 中的等距浸入. Efimov 的证明是非常长的，希望有一个简短的证明.

关于 Efimov 证明的精彩评述可在 T. Klotz Milnor 的文章"Efimov's Theorem About Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature", Advances in Mathematics 8(1972), 474～453 中找到. 这篇文章也包括了 Hilbert 定理的另一个证明，它是对 C^2 类曲面成立的.

关于双曲平面浸入的进一步结果见 M. L. Gromov 和 V. A. Rokhlin 的文章"Embeddings and Immersions in Riemannian Geometry", Russian Math. Surveys(1970), 1～57，特别是第 15 页.

习题

1.(Stoker 附注)设 S 是完备的几何曲面. 假定 Gauss 曲率 K 满足 $K\leqslant\delta<0$. 证明不存在等距浸入 ϕ: $S\to\mathbb{R}^3$ 且使平均曲率 H 的绝对值是有界的. 这就证明了注 2 中具平均曲率的附加条件的 Efimov 定理. 下列概要是有用的:

a. 假定这样的 ϕ 存在, 考虑 Gauss 映照 N: $\phi(S)\subset\mathbb{R}^3\to S^2$, 其中 S^2 是单位球面. 因为 $K\neq0$ 处处成立, N 在 S 上诱导了一个新的度量(,), 使 $N\circ\phi$: $S\to S^2$ 是局部等距. 在 S 上取坐标使坐标曲线在 ϕ 下的象是 $\phi(S)$的曲率线. 证明新度量在这坐标系下的系数是

$$g_{11}=(k_1)^2E, g_{12}=0, g_{22}=(k_2)_2G$$

其中 E, $F(=0)$和 G 是原来度量在同一坐标系下的系数.

b. 说明存在一个常数 $M>0$, 使 $k_1^2\leqslant M$, $k_2^2\leqslant M$. 利用原来度量是完备的事实来证明新度量也是完备的.

c. 利用上面 b 的结果说明 S 是紧致的; 所以, 它有正曲率的点, 得到矛盾.

2. 本题的目的是证明在$\mathbb{R}^3$ 中没有具 $K\leqslant\delta<0$ 的正则完备旋转面(这就证明了旋转面的 Efimov 定理), 假定这样曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是存在的.

a. 证明 S 的母线只可能如图 5-60(a)及 5-60(b)所示, 其中经线在两头都趋于无穷. 注意到在图 5-60(b)中, 经线下端渐近于 z 轴.

b. 将母线用参数表示($\phi(s)$, $\psi(s)$), 其中 $s\in\mathbb{R}$ 是弧长使 $\psi(0)=0$. 利用关系式 $\phi''+K\phi=0$ (见 3.3 例 4 中方程(9))和 $K\leqslant\delta<0$, 说明存在一点 $s_0\in[0, +\infty)$使$(\phi'(s_0))^2=1$.

c. 说明通过点 $p_0=(\phi(s_0), \psi(s_0))$, S 的子午线可能是如图 5-60(c)所示的三种情况 Ⅰ, Ⅱ 和 Ⅲ 之一, 这样导致矛盾. 这样, S 不是完备的.

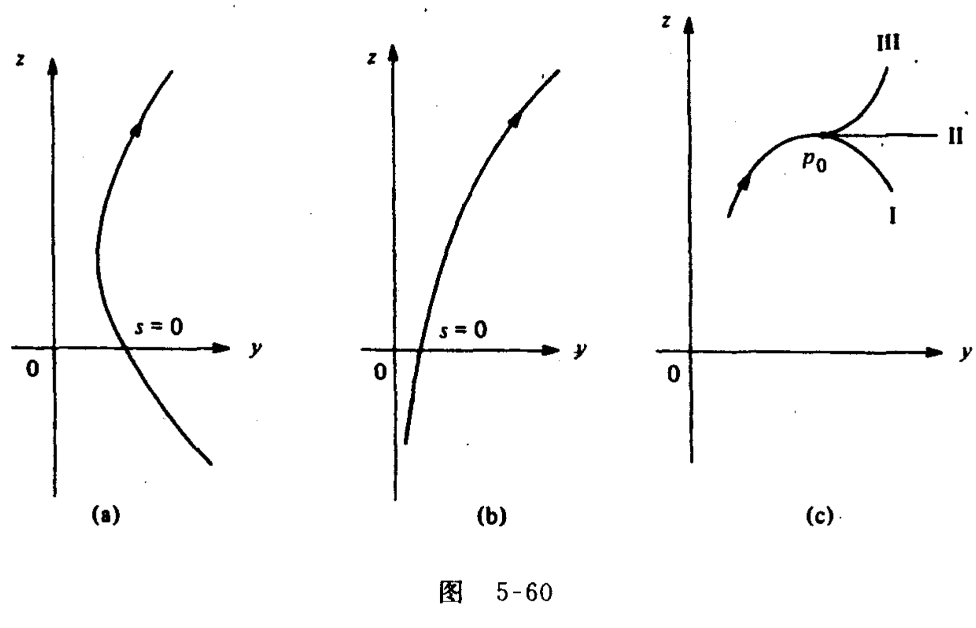


图 5-60

3.(Hilbert 定理的 T. K. Milnor 的证明)设 S 是具完备度量 g_1 的平面使其曲率 $K\equiv-1$. 假定存在等距浸入 ϕ: $S\to\mathbb{R}^3$. 为得到矛盾, 进行如下:

a. 考虑 Gauss 映照 N：$\phi(S)\subset\mathbb{R}^3\to S^2$ 且设 g_2 是 S 上的度量使 $N\circ\phi$：$S\to S^2$ 是局部等距. 在 S 上取局部坐标系使坐标曲线在 ϕ 下的象是 $\phi(S)$ 的渐近线. 证明：在这种坐标系下 g_1 可写成

$$du^2+2\cos\theta du dv+dv^2$$

而 g_2 可写成

$$du^2-2\cos\theta du dv+dv^2$$

b. 证明 $g_3=\frac{1}{2}(g_1+g_2)$ 是 S 上具零曲率的度量. 利用 g_1 是完备度量以及 $3g_3\geqslant g_1$ 的事实导出 g_3 是完备的度量.

c. 证明以 g_3 为度量的平面整体等距于标准(欧氏)平面 $\mathbb{R}^2$. 这样，就有一个等距对应 ϕ：$S\to\mathbb{R}^2$. 进一步证明：ϕ 将 S 的以弧长为参数的渐近线映照到 $\mathbb{R}^2$ 中以弧长为参数的直线的矩形族.

d. 利用 c 给出的 S 上的大范围坐标系来导出如本书中 Hilbert 定理证明里的矛盾.

附录 欧氏空间的点集拓扑

在第 5 章中我们已经很自由地应用了 $\mathbb{R}^n$ 的一些基本的拓扑性质. 实质上，我们需要用到的都是高等微积分课程中的那些有关 $\mathbb{R}^n$ 的紧致子集和连通子集的一般性质. 为完整起见，我们在这里对这方面的材料作一简要的叙述和证明. 我们将承认第 2 章附录 A，及实数的一些基本性质.

A. 预备知识

这里我们将在某几点上把第 2 章附录 A 的材料补充完整.

在下文中 $U\subset\mathbb{R}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集. 指标 i 在 1，2，…，m，…的范围中变化，且如果 $p=(x_1,\cdots,x_n)$，$q=(y_1,\cdots,y_n)$，则 $|p-q|$ 表示 p 到 q 的距离，即

$$|p-q|^2=\sum_j(x_j-y_j)^2, j=1,\cdots,n$$

定义 1 如果给定 $\varepsilon>0$，总存在序列 $p_1,\cdots,p_i,\cdots\in\mathbb{R}^n$ 的一个指标 i_0，使对所有的 $i>i_0$，$p_i\in B_\varepsilon(p_0)$，$p_0\in\mathbb{R}^n$，就称此序列收敛于 p_0. 在这种情况下，p_0 是序列 $\{p_i\}$ 的极限，记作 $\{p_i\}\to p_0$.

下面的命题表达了收敛性与连续性的关系.

命题 1 映照 F：$U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 $p_0\in U$ 连续的充要条件是，对 U 上的每一个收敛序列 $\{p_i\}\to p_0$，序列 $\{F(p_i)\}$ 收敛于 $F(p_0)$.

证明 假设 F 在 p_0 是连续的，并设 $\varepsilon>0$ 是给定的. 由于连续性，故存在 $\delta>0$ 使 $F(B_\delta(p_0))\subset B_\varepsilon(F(p_0))$. 设 $\{p_i\}$ 是 U 上的一个序列，$\{p_i\}\to p_0\in U$. 则对应于 δ 存在一指标 i_0，使对 $i>i_0$ 有 $p_i\in B_\delta(p_0)$. 因此对 $i>i_0$，有

$$F(p_i)\in F(B_\delta(p_0))\subset B_\varepsilon(F(p_0))$$

这蕴涵 $\{F(p_i)\}\to F(p_0)$.

现在，设 F 在 p_0 不连续．则存在一个数 $\varepsilon>0$，使对每一个 $\delta>0$，我们能找到一个点 $p\in B_\delta(p_0)$，而 $F(p_i)\notin B_\varepsilon(F(p_0))$．固定这个 ε，并令 $\delta=1$，$1/2$，…，$1/i$，…，则得一个收敛于 p_0 的序列 $\{p_i\}$．然而，由于 $F(p_i)\notin B_\varepsilon(F(p_0))$，序列 $\{F(p_i)\}$ 不收敛于 $F(p_0)$．证毕．

定义 2　如果 $p\in\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的每一个邻域总包含 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的一个不同于 p 的点，则称点 p 是集合 A 的一个极限点．

为避免和序列的极限这一概念相混淆，极限点有时称为聚点．

定义 2 等于说 p 的每一个邻域包含无限多个 A 的点．事实上，令 $q_1\neq p$ 是由定义 2 给出的 A 的点，并考虑一球 $B_\varepsilon(p)\subset V$，使 $q_1\notin B_\varepsilon(p)$．于是存在一点 $q_2\neq p$，$q_2\in A\cap B_\varepsilon(p)$．重复这个过程，我们得到 V 中的一个序列 $\{q_i\}$，这里 $q_i\in A$ 是全部相异的．由于 $\{q_i\}\to p$，此论证也说明，当且仅当 p 是由 A 中相异点组成的某个序列的极限时，p 是 A 的一个极限点．

例 1　序列 1，1/2，1/3，…，$1/i$，…收敛于 0．序列 3/2，4/3，…，$(i+1)/i$，…收敛于 1．"交错的"序列 1，3/2，1/2，4/3，1/3，…，$1+(1/i)$，$1/i$，…不收敛，但有两个极限点，即 0 和 1(图 A5-1)．



图　A5-1

应该看到，收敛序列的极限 p_0 具有性质：p_0 的任一个邻域包含此序列中除了有限多个点以外的所有点，而一集合的极限点 p 具有较弱的性质：p 的任何一个邻域包含此集合中无限多个的点．因此，一个不包含常子序列的序列，当且仅当它作为一个集合仅包含一个极限点时才是收敛的○．

有理数集 Q 给出了一个有趣的例子．能够证明 Q 是可数的，即能把 Q 排成一个序列．由于在任一实数的任意近旁总存在有理数，因此序列 Q 的极限点的集合是实直线 $\mathbb{R}$．

定义 3　如果集合 $F\subset\mathbb{R}^n$ 的每一个极限点都属于 F，则称 F 是闭集．$A\subset\mathbb{R}^n$ 的闭包是 A 和它的极限点的并集，记作 $\overline{A}$．

直观上，如果 F 包含它的所有收敛序列的极限，或者说如果 F 在极限运算下是不变的，那么 F 是闭集．

显然，一个集合的闭包是一个闭集．为方便起见，约定空集 $\varnothing$ 即是开集又是闭集．

在开集和闭集之间有一个很简单的关系．

命题 2　当且仅当 $F\subset\mathbb{R}^n$ 的余集 $\mathbb{R}^n-F$ 是开集时 F 是闭集．

证明　假设 F 是闭集，并设 $p\in\mathbb{R}^n-F$．由于 p 不是 F 的极限点，则存在一个不包含 F 中点的球 $B_\varepsilon(p)$．因此 $B_\varepsilon\subset\mathbb{R}^n-F$，所以 $\mathbb{R}^n-F$ 是开集．

反之，假定 $\mathbb{R}^n-F$ 是开集，且 p 是 F 的一个极限点，我们要证明 $p\in F$．假如不是这样，则存在一个球 $B_\varepsilon(p)\subset\mathbb{R}^n-F$．这说明 $B_\varepsilon(p)$ 不包含 F 的点，与 p 是 F 的一个极限点这事实相

○ 必须加序列有界的条件，不然未必成立，如 $\left\{1,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ n,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}$．——译者注

矛盾. 证毕.

连续性也能用闭集的方式来表达，这是下述事实的结果.

命题 3 映照 $F: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 连续的充要条件是对每个开集 $V\subset\mathbb{R}^m$，$F^{-1}(V)$是开集.

证明 设 F 是连续的，并设 $V\subset\mathbb{R}^m$ 是$\mathbb{R}^m$ 中的一个开集. 如果 $F^{-1}(V)=\varnothing$，则无需证明，因为我们已经约定空集是开集，如果 $F^{-1}(V)\neq\varnothing$，设 $p\in F^{-1}(V)$. 则 $F(p)\in V$. 而且因为 V 是开集，所以存在一个球 $B_\varepsilon(F(p))\subset V$. 根据 F 的连续性，存在一个球 $B_\delta(p)$使

$$F(B_\delta(p))\subset B_\varepsilon(F(p))\subset V$$

因此，$B_\delta(p)\subset F^{-1}(V)$，所以 $F^{-1}(V)$是开集.

现在假设对每一个开集 $V\subset\mathbb{R}^m$，$F^{-1}(V)$是开集. 设 $p\in U$，给定 $\varepsilon>0$，则 $A=F^{-1}(B_\varepsilon(F(p)))$ 是开集. 于是，存在 $\delta>0$，使 $B_\delta(p)\subset A$. 因此

$$F(B_\delta(p))\subset F(A)\subset B_\varepsilon(F(P))$$

所以 F 在 p 是连续的. 证毕.

推论 $F: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 连续的充要条件是对每一个闭集 $A\subset\mathbb{R}^m$，$F^{-1}(A)$是闭集.

例 2 命题 3 及其推论，给出了描述$\mathbb{R}^n$ 中开子集和闭子集的一种可能是最好的方法. 举个例子说，设 f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 由 $f(x, y)=(x^2/a^2)-(y^2/b^2)-1$ 给定. 由于 f 是连续的 $0\in\mathbb{R}$ 是$\mathbb{R}$ 中的一个闭集，$(0, +\infty)$是$\mathbb{R}$ 中的一个开集，因此集合

$$F_1=\{(x,y);f(x,y)=0\}=f^{-1}(0)$$

在$\mathbb{R}^2$ 中是闭的，且集合

$$U_1=\{(x,y);f(x,y)>0\}$$
$$U_2=\{(x,y);f(x,y)<0\}$$

在$\mathbb{R}^2$ 中是开的，另一方面，集合

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,x^2+y^2<1\}$$
$$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2=1,x>0,y>0\}$$

即不是开的，也不是闭的(图 A5-2).

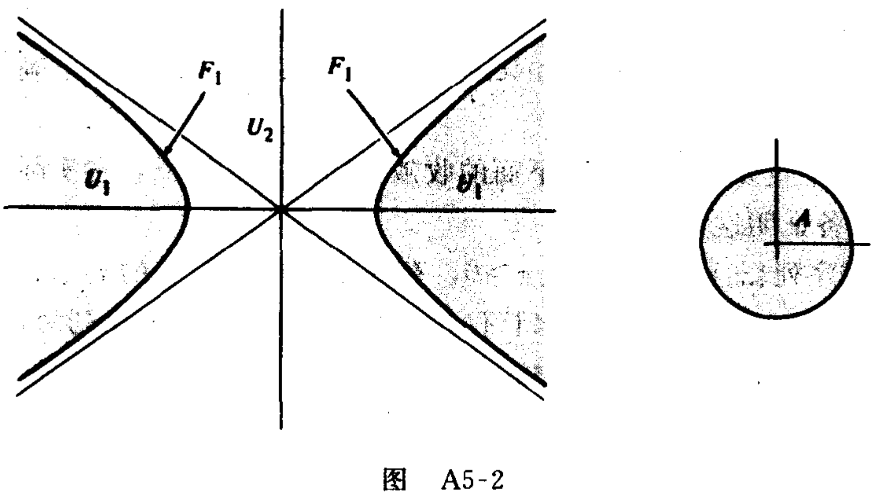


图 A5-2

最后这个例子启发我们作下面的定义.

定义 4 设 $A\subset\mathbb{R}^n$. A 的边界 BdA 是$\mathbb{R}^n$ 中这种点 p 的集合：p 的每一个邻域既包含 A 中的点又包含$\mathbb{R}^n-A$ 中的点.

因此，如果 A 是例 2 的集合，则 BdA 是圆 $x^2+y^2=1$. 显然，当且仅当 BdA 的点不属于 A 时，$A\subset\mathbb{R}^n$ 是开集. 当且仅当 BdB 的所有点都属于 B 时，$B\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集.

这些预备概念中的最后一个注：这里和第 2 章的附录一样，诸定义是在$\mathbb{R}^n$ 为"外围"空间的假定下给出的. 如同在第 2 章的附录中已经指出的那样，把这样的定义推广到任意集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的子集上去，常常会带来方便. 为做到这点，我们采用下面的定义.

定义 5 设 $A\subset\mathbb{R}^n$. 我们称 $V\subset A$ 是 A 中的开集，如果存在一个$\mathbb{R}^n$ 中的开集 U 使 $V=U\cap A$. $p\in A$ 在 A 中的邻域是 A 中包含 p 的一个开集.

有了这个 A 中的"邻近"的概念，就很容易把前面的一些定义推广到 A 的子集上去，并可验证已证明的各命题在这些新的定义下仍然成立.

现在我们回顾一下实数的基本性质. 我们需要一些定义.

定义 6 如果对实直线$\mathbb{R}$ 的一个子集 $A\subset\mathbb{R}$ 存在 $M\in\mathbb{R}$，使对所有的 $a\in A$ 有 $M\geq a$，则称 $A\subset R$ 上有界，数 M 称为 A 的一个上界. 当 A 上有界时，A 的上确界或最小的上界 sup$A$(或 l. u. b. A)是指满足下列条件的上界 M：给定 $\varepsilon>0$，存在 $a\in A$ 使 $M-\varepsilon<a$. 改变上述不等式的符号，我们类似地定义 A 的下界和 A 的下确界(或最大下界，inf$A$(或 g. l. b. A).

实数的完备性公理 设集 $A\subset\mathbb{R}$ 非空且上(下)有界. 则存在 sup$A$(inf$A$).

实数系的完备性这一基本性质，有好几种等价的表达方式. 我们选择了上面这种，它虽然不是最直观的，但可能是最有效的一种.

为方便起见作以下的约定. 如果 $A\subset\mathbb{R}$ 不是上(下)有界，我们说 sup$A=+\infty$(inf$A=-\infty$). 有了这个约定之后，上述的公理可以这样来叙述：实数的每一个非空集合都有上确界和下确界.

例 3 集合(0，1)的上确界是 1，它不属于这个集合. 集合

$$B=\{x\in\mathbb{R};0<x<1\}\cup\{2\}$$

的上确界是 2. 点 2 是 B 的一个孤立点，即它属于 B，但不是 B 的极限点. 注意 B 的最大的极限点是 1，它不是 B 的上确界. 然而，如果一有界集没有孤立点. 则其上确界肯定是它的一个极限点.

实数完备性的一个重要的结果，是下面的收敛性的"内在"特征，它实际上是与完备性等价的(然而，我们不准备证明这点).

引理 1 对实数序列$\{x_i\}$，如果给定 $\varepsilon>0$，存在 i_0，使对所有的 i，$j>i_0$ 有 $|x_i-x_j|<\varepsilon$，则称实数序列$\{x_i\}$是 Cauchy 序列. 当且仅当一个序列是 Cauchy 序列时，此序列是收敛的.

证明 设$\{x_i\}\to x_0$. 这时，如果给定 $\varepsilon>0$，存在 i_0，使对 $i>i_0$ 有 $|x_i-x_0|<\varepsilon/2$. 则对 i，$j>i_0$ 我们有

$$|x_i-x_j|\leq|x_i-x_0|+|x_j-x_0|<\varepsilon$$

所以$\{x_i\}$是一 Cauchy 序列.

反之，设$\{x_i\}$是一 Cauchy 序列. 很清楚，集合$\{x_i\}$是有界集. 设 $a_1=\inf\{x_i\}$，$b_1=\sup\{x_i\}$. 或者这两点中有一点是$\{x_i\}$的极限点，因而$\{x_i\}$收敛于此点，或者两点都是集合$\{x_i\}$的孤立点. 在后一种情况，考虑在开区间(a_1, b_1)中的点的集合，并设 a_2 和 b_2 分别是它的下确界和上确界. 按照这个方法进行下去，我们得到或者$\{x_i\}$收敛，或者有两个有界序列 $a_1<a_2<\cdots$ 和 $b_1>b_2>\cdots$. 设 $a=\sup\{a_i\}$和 $b=\inf\{b_i\}$. 由于$\{x_i\}$是一 Cauchy 序列，因而 $a=b$，且这个公共值 x_0 是$\{x_i\}$唯一的极限点. 因此$\{x_i\}\to x_0$. 证毕.

完备性的这种形式，自然能推广到欧氏空间.

定义 7 对序列$\{p_i\}$，$p_i\in\mathbb{R}^n$ 如果给定 $\varepsilon>0$，存在一指标 i_0 使对所有的 i，$j>i_0$ 距离 $|p_i-p_j|<\varepsilon$，则称序列$\{p_i\}$是 Cauchy 序列.

命题 4 序列$\{p_i\}$，$p_i\in\mathbb{R}^n$ 收敛的充要条件为它是 Cauchy 序列.

证明 很清楚，收敛序列是 Cauchy 序列(见引理 1 中的论证). 反之，设$\{p_i\}$是 Cauchy 序列，并考虑它在$\mathbb{R}^n$ 的 j 轴上的投影 $j=1, \cdots, n$. 这给出一个实数的序列$\{x_{ji}\}$；由于投影减小距离，这序列又是 Cauchy 序列. 由引理 1，$(x_{ji})\to x_{j0}$. 故$\{p_i\}\to p_0=\{x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}\}$. 证毕.

B. 连通集

定义 8 连续曲线 α：$[a, b]\to A\subset\mathbb{R}^n$ 称为 A 中连接 $\alpha(a)$和 $\alpha(b)$的弧.

定义 9 设 $A\subset\mathbb{R}^n$，如果对任意给定的两点 p，$q\in A$，存在 A 中连接 p 和 q 的弧，则称 A 是*道路连通集*.

在本书的前面部分，我们已应用“连通”这个词代表“道路连通”(2.2). 由于我们当时考虑的仅仅是正则曲面，因而这样的说法是合理的，这一点稍后即可证明. 然而，道路连通的概念对$\mathbb{R}^n$ 的一般子集来说，限制是过多了些. 而使用下面的定义是更方便的.

定义 10 如果集 $A\subset\mathbb{R}^n$ 不能写成 $A=U_1\cup U_2$，这里 U_1 和 U_2 是 A 中的非空开集，且 $U_1\cap U_2=\varnothing$，则A 称为*连通集*.

直观上，这意味着不可能把 A 分解成不相交的片段. 如例 2 中的集合 U_1 和 F_1 是不连通的. 如果取 U_1 和 U_2 的余集，我们就看到，在定义 10 中可以用“闭”字代替“开”字.

命题 5 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是连通集，并设 $B\subset A$ 在 A 中是开集同时又是闭集. 则或者 $B=\varnothing$，或者 $B=A$.

证明 假定 $B\neq\varnothing$且 $B\neq A$，并记 $A=B\cup(A-B)$. 由于 B 在 A 中是闭集，故 $A-B$ 在 A 中是开集. 因此 A 是不相交的非空开集 B 和 $A-B$ 的并集. 这与 A 的连通性矛盾. 证毕.

下面的命题表明，连通集的连续象是连通的.

命题 6 设 F：$A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 连续，且 A 是连通集. 则 $F(A)$也是连通集.

证明 假设 $F(A)$不是连通集. 则 $F(A)=U_1\cup U_2$，这里 U_1 和 U_2 是 $F(A)$中的不相交的非空开集. 由于 F 是连续的，故 $F^{-1}(U_1)$，$F^{-1}(U_2)$也是 A 中不相交的非空开集. 由于 $A=F^{-1}(U_1)\cup F^{-1}(U_2)$，这和 A 的连通性矛盾. 证毕.

为了本节的目的，把区间的定义作如下推广是有利的：

定义 11 实直线$\mathbb{R}$ 的一个区间，是集合 $a<x<b$，$a\leqslant x\leqslant b$，$a<x\leqslant b$，$a\leqslant x<b$，$x\in\mathbb{R}$ 中

的任一个．也不排除 $a=b$，$a=-\infty$，$b=+\infty$ 的情况，故一个区间可以是一个点，一条半直线或 $\mathbb{R}$ 本身．

命题 7 $A\subset\mathbb{R}$ 是连通集的充要条件为 A 是一个区间．

证明 设 $A\subset\mathbb{R}$ 是一个区间，并假设 A 不是连通集．我们将引出矛盾．

因为 A 不是连通集，$A=U_1\cup U_2$，这里 U_1 和 U_2 非空、不相交、并在 A 中是开的．设 $a_1\in U_1$，$b_1\in U_2$，并假设 $a_1<b_1$．以中点 $(a_1+b_1)/2$ 将闭区间 $[a_1, b_1]=I_1$ 分为两个区间，其中的一个，记为 I_2，它的一个端点在 U_1 中，另一个端点在 U_2 中．考虑 I_2 的中点，如上面一样处理，我们可得到一个区间 $I_3\subset I_2\subset I_1$．这样，我们得到一族闭区间 $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$，它们的长度趋近于零．让我们改记 $I_i=[c_i, d_i]$，则有 $c_1\leqslant c_2\leqslant\cdots\leqslant c_n\leqslant\cdots$ 和 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n\geqslant\cdots$．设 $c=\sup\{c_i\}$ 和 $d=\inf\{d_i\}$．因为 d_i-c_i 可任意小，所以 $c=d$．进而，c 的任何邻域当 i 充分大时包含某个 I_i．因此，c 是 U_1 和 U_2 两者的极限点．因为 U_1 和 U_2 又是闭的，所以 $c\in U_1\cap U_2$，这与 U_1 和 U_2 不相交这一点相矛盾．

反之，假设 A 是连通集．如果 A 只有一个点，则 A 是一个退化的区间．假设 A 至少有两个点，并设 $a=\inf A$，$b=\sup A$，$a\neq b$．显然 $A\subset[a, b]$．我们将证明 $(a, b)\subset A$，这就蕴涵着 A 是一个区间．假设不是这样，即存在一个 t，$a<t<b$，而 $t\notin A$．集合 $A\cap(-\infty, t)=V_1$，$A\cap(t, +\infty)=V_2$ 在 $A=V_1\cup V_2$ 中是开的．因为 A 是连通集，这两个集合中的一个，比如说 V_2，是空集．因为 $b\in(t, +\infty)$，这说明 $b\notin A$ 并且 b 不是 A 的极限点．这与 $b=\sup A$ 这个事实相矛盾．用同样的方法，如果 $V_1=\varnothing$，我们会发现与 $a=\inf A$ 这样一个事实相矛盾．证毕．

命题 8 设 $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续的，且 A 是连通集．假设对所有的 $q\in A$，$f(q)\neq 0$．则 f 在 A 上不改变符号．

证明 由命题 5，$f(A)\subset\mathbb{R}$ 是连通集．由命题 7，$f(A)$ 是一个区间．由假设条件，$f(A)$ 不包含零．因此 $f(A)$ 上的点都具有相同的符号．证毕．

命题 9 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是道路连通集，则 A 是连通集．

证明 假设 A 不是连通集，则 $A=U_1\cup U_2$，这里 U_1，U_2 是 A 中非空、不相交的开集．设 $p\in U_1$，$q\in U_2$，因为 A 是道路连通的，所以存在弧 α: $[a, b]\to A$ 连接 p 和 q．由于 α 是连续的，所以 $B=\alpha([a, b])\subset A$ 是连通集．令 $V_1=B\cap U_1$，$V_2=B\cap U_2$．则 $B=V_1\cup V_2$，而 V_1 和 V_2 是 B 中非空、不相交的开集，这是一个矛盾．证毕．

一般来说，这个命题的逆是不正确的．然而，也有一个逆命题能成立的重要的特殊情况．

定义 12 如果对任一点 $p\in A\subset\mathbb{R}^n$ 及 p 在 A 中的每个邻域 V，存在 p 在 A 中的一个道路连通邻域 $U\subset V$，则称集合 A 是*局部道路连通的*．

直观上，这意味着 A 的每一点有任意小的道路连通邻域．正则曲面是 $\mathbb{R}^3$ 中局部道路连通集合的一个简单例子．事实上，对每个 $p\in S$ 和 p 在 $\mathbb{R}^3$ 中的每个邻域 W，都存在 p 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一邻域 $V\subset W$ 使得 $V\cap S$ 与 $\mathbb{R}^2$ 上的开圆盘同胚．因为开圆盘是道路连通的，所以 $p\in S$ 的每个邻域 $W\cap S$ 包含一个道路连通邻域．

下一个命题说明，我们对道路连通曲面使用"连通集"这个词是合理的．

命题 10 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是局部道路连通集，则当且仅当 A 是道路连通集时，A 是连通集．

证明 命题的一半已经在命题 9 中证明了. 现在，假设 A 是连通集. 设 $p\in A$，并设 A_1 是能用 A 中的弧与 p 点连接的 A 中点的集合. 我们断言 A_1 在 A 中是开的.

事实上，设 $q\in A$，并设 α: $[a, b]\to A$ 是连接 p 和 q 的弧. 因为 A 是局部道路连通的，则存在 q 在 A 中的邻域 V，使 q 能用弧 β: $[b, c]\to V$ 与任何点 $r\in V$ 连接(图 A5-3). 由此得到 A 中的弧

$$\alpha\circ\beta=\begin{cases}\alpha(t), & \text{当 } t\in[a,b]\\ \beta(t) & \text{当 } t\in[b,c]\end{cases}$$

连接 q 和 r. 这证明了我们的断言.

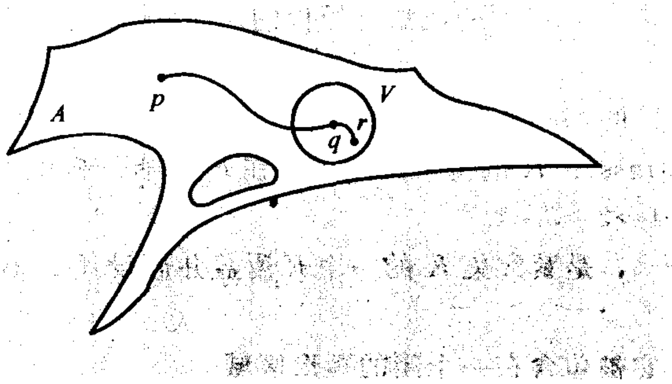


图 A5-3

根据同样的方法，我们证明 A_1 的补集也是 A 中的开集. 因此，A_1 在 A 中既是开集又是闭集. 因为 A 是局部道路连通的，所以 A_1 不是空集. 由于 A 是连通集所以 $A_1=A$. 证毕.

例 4 一个集合可能是道路连通但不是局部道路连通的. 例如，设 $A\subset\mathbb{R}^2$ 是由通过$(1/n, 0)$，$n=1, \cdots$，的垂直方向的直线加上 x 和 y 轴组成的集合. A 显然是道路连通的，但$(0, y)$，$y\neq 0$，的一个小邻域不是道路连通的. 这是由下列事实而来的：虽然存在一段"长"弧连接任意两点 p，$q\in A$，但可能没有短弧连接这两点(图 A5-4).

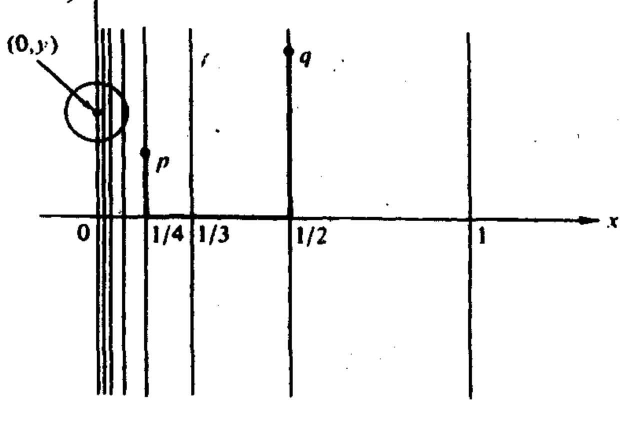


图 A5-4

C. 紧致集

定义 13 如果集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 包含在 $\mathbb{R}^n$ 的某个球中，则称集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是有界的. 如果 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集并且有界，则称集合 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是紧致集.

我们在 2.7 中已遇到过紧致集. 为完整起见我们将在这里证明紧致集合的性质 1 和性质 2，这两个性质在 2.7 中是未加证明而承认的.

定义 14 集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的开覆盖是一族开集 $\{U_\alpha\}$，$\alpha\in\mathscr{A}$ 使得 $\bigcup_\alpha U_\alpha=A$. 当族中仅存在有限多个 U_α 时，我们说这个覆盖是有限的，如果子族 $\{U_\beta\}$，$\beta\in\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$，仍然覆盖 A，即 $\bigcup_\beta U_\beta=A$，则我们说 $\{U_\beta\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的一个子覆盖.

命题 11 对集合 $K\subset\mathbb{R}^n$，以下的说法是等价的.

1. K 是紧致集.
2. (Heine-Borel). K 的每一个开覆盖都有有限子覆盖.
3. (Bolzano-Weierstrass). K 的每个无限子集在 K 中有一极限点.

证明 我们将证明 $1\Rightarrow2\Rightarrow3\Rightarrow1$.

$1\Rightarrow2$ 设 $\{U_\alpha\}$，$\alpha\in\mathscr{A}$，是紧致集 K 的一个开覆盖并假设 $\{U_\alpha\}$ 不存在有限子覆盖. 我们将证明这会导致矛盾.

因为 K 是紧致的，它被包含在一个闭的矩形区域

$$B=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n;a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,j=1,\cdots,n\}$$

中，让我们用超平面 $x_j=(a_j+b_j)/2$ 来分割 B(例如，如果 $K\subset\mathbb{R}^2$，B 是一矩形，那么 B 被分割成 $2^2=4$ 个矩形). 从而我们得到 2^n 个较小的闭的矩形区域. 根据假设，这些区域中至少有一个，记为 B_1，是这样的：$B_1\cap K$ 不能被 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个开集覆盖. 我们现在以类似的方法来分割 B_1. 重复以上的过程，我们得到一列闭矩形区域(图 A5-5)

$$B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_i\supset\cdots$$

使得没有一个 $B_i\cap K$ 能被 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个开集所覆盖，且 B_i 的最大边的长度收敛于零.

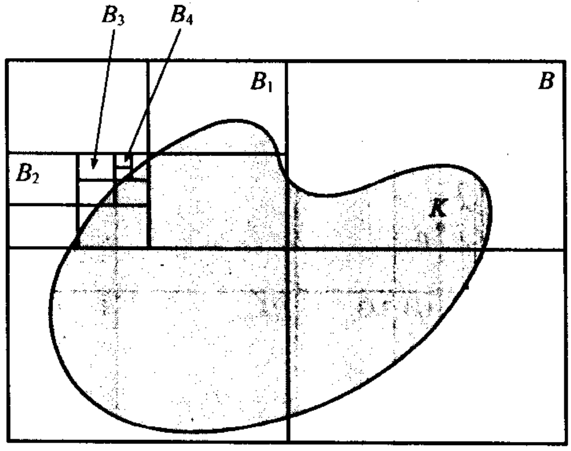


图 A5-5

我们断言存在 $p\in\bigcap B_i$. 事实上，将每个 B_i 投影到 $\mathbb{R}^n$ 的 j 轴上，$j=1$，…，n，我们得到一个闭区间的序列，

$$[a_{j_1},b_{j_1}]\supset[a_{j_2},b_{j_2}]\supset\cdots\supset[a_{ji},b_{ji}]\supset\cdots$$

因为$(b_{ji}-a_{ji})$可任意小，我们可以看到

$$a_j\Rightarrow\sup\{a_{ji}\}=\inf\{b_{ji}\}=b_j$$

因此，

$$a_j\in\bigcap_i[a_{ji},b_{ji}]$$

从而，如同我们断言的那样，$p=(a_1,\cdots,a_n)\in\bigcap\limits_i B_i$.

现在，p 的任何邻域对充分大的 i 都包含某个 B_i. 因此它包含无限多个 K 中的点. 从而 p 是 K 的一个极限点，且由于 K 是闭的，故 $p\in K$. 设 U_0 是族$\{U_\alpha\}$中包含 p 的一个开集. 由于 U_0 是开的，所以存在一个球 $B_\varepsilon(p)\subset U_0$. 另一方面，对充分大的 i，$B_i\subset B_\varepsilon(p)\subset U_0$. 这与没有一个 $B_i\cap K$ 能被有限个 U_α 所覆盖的事实相矛盾. 因而证明了 $1\Rightarrow2$.

$2\Rightarrow3$　假设 $A\subset K$ 是 K 的一个无限子集，且 K 中没有一个点是 A 的极限点. 于是，对每个 $p\in K$，$p\notin A$，可以选择 p 的一个邻域 V_p，使 $V_p\cap A=\varnothing$；而对每个 $q\in A$，可以选择 q 的一个邻域 W_q，使 $W_q\cap A=q$. 因此族$\{V_p, W_q\}$，$p\in K-A$，$q\in A$ 是 K 的一个开覆盖. 由于 A 是无限的，并且从这个族中去掉任何一个 W_q 会使点 q 不被覆盖，所以族$\{V_p, W_q\}$没有有限的子覆盖. 这与说法 2 矛盾.

$3\Rightarrow1$　我们必须证明 K 是闭集且为有界. K 是闭的，这是因为如果 p 是 K 的一个极限点，考虑同心球 $B_{1/i}(p)=B_i$，可得到一个以 p 为极限点的序列 $p_1\in B_1-B_2$，$p_2\in B_2-B_3$，…，$p_i\in B_i-B_{i+1}$，…. 由说法 3，$p\in K$.

K 是有界的. 否则考虑半径为 1，2，…，i，…的同心球 $B_i(p)$我们将得到一个无极限点的序列 $p_1\in B_1$，$p_2\in B_2-B_1$，…，$p_i\in B_i-B_{i-1}$，…. 这证明 $3\Rightarrow1$. 证毕.

下面的命题表明紧致集的连续象是紧致集.

命题 12　设 F：$K\subset\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$ 是连续的，且设 K 是紧致集. 则 $F(K)$是紧致集.

证明　如果 $F(K)$是有限的，显然它是紧致的. 假设 $F(K)$不是有限的，考虑一个无限的子集$\{F(p_\alpha)\}\subset F(K)$，$p_\alpha\in K$. 显然集合$\{p_\alpha\}\subset K$ 是无限的，且根据紧致性它有一极限点 $q\in K$. 因此存在一序列 p_1，…，p_i，…，$\rightarrow q$，$p_i\in\{p_\alpha\}$. 由于 F 的连续性，序列 $F(p_i)\rightarrow F(q)\in F(K)$(命题 1). 因此$\{F(p_\alpha)\}$有极限点 $F(q)\in F(K)$；所以 $F(K)$是紧致的. 证毕.

下面的性质可能是紧致集最重要的性质.

命题 13　设 $K\subset\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ 是定义于紧致集 K 上的一个连续函数. 则存在 p_1，$p_2\in K$，使对所有的 $p\in K$

$$f(p_2)\leqslant f(p)\leqslant f(p_1)$$

即 f 在 p_1 达到最大值，在 p_2 达到最小值.

证明　我们将证明 p_1 的存在性；对最小值的情况可以用类似的方法处理.

由命题 12，$f(K)$是紧致集，因而是闭集并且有界. 所以存在 $\sup f(K)=x_1$. 由于 $f(K)$是闭集，故 $x_1\in f(K)$. 从而存在 $p_1\in K$，$x_1=f(p_1)$. 显然，对所有的 $p\in K$，$f(p)\leqslant f(p_1)=$

x_1. 证毕.

虽然我们以后并不使用一致连续性的概念，但这个概念放在目前这一场合处理是非常自然的，所以我们应该说上几句.

称映照 $F: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 A 上是一致连续的，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使对所有的 $p\in A$ 有 $F(B_\delta(p))\subset B_\varepsilon(F(p))$.

从形式上看，这个定义和(单纯)连续性定义的区别在于：这里对给定的 ε，数 δ 对所有的 $p\in A$ 是相同的；而在单纯连续性的情况，对给定的 ε，数 δ 可随 p 变化. 因此一致连续性是整体的概念，而不是局部的概念.

一个重要的事实是：在紧致集合中这两个概念是一致的. 更精确地说，设 $F: K\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是连续的，且 K 是紧致集，则 F 在 K 上一致连续.

如果我们回顾一下 2.7 中引入的开覆盖的 Lebesgue 数的概念，那么这个事实的证明是简单的. 事实上，如果给定 $\varepsilon>0$，则对每个 $p\in K$ 存在一个数 $\delta(p)>0$ 使得 $F(B_{\delta\varphi(p)}(p))\subset B_{\varepsilon/2}(F(p))$. 族 $\{B_{\delta(p)}(p),\ p\in K\}$ 是 K 的一个开覆盖. 设 $\delta>0$ 是这个族的 Lebesgue 数(2.7 性质 3). 如果 $q\in B_\delta(p)$，$p\in K$，则 q 和 p 属于这个开覆盖的某个元素. 因此 $|F(p)-F(q)|<\varepsilon$. 由于 q 是任意的，所以 $F(B\delta(p))\subset B_\varepsilon(F(p))$. 这表明，正如我们希望的那样，$\delta$ 满足一致连续性的定义.

D. 连通分支

当一个集合不是连通集时，可以将它分解为一些连通分支. 为使这个想法精确化，我们首先证明下面的命题.

命题 14 设 $C_\alpha\subset\mathbb{R}^n$ 是一族连通集，且

$$\bigcap_\alpha C_\alpha\neq\varnothing$$

则 $\bigcup_\alpha C_\alpha=C$ 是连通集.

证明 假设 $C=U_1\cup U_2$，这里 U_1 和 U_2 是 C 中非空、不相交的开集，并假设某个点 $p\in\bigcap_\alpha C_\alpha$ 属于 U_1. 设 $q\in U_2$. 由于 $C=\bigcup_\alpha C_\alpha$ 和 $p\in\bigcap_\alpha C_\alpha$，所以存在某个 C_α 使 $p, q\in C_\alpha$. 因此 $C_\alpha\cap U_1$ 和 $C_\alpha\cap U_2$ 是 C_2 中非空不相交的开集. 这与 C_α 的连通性矛盾，从而表明 C 是连通集. 证毕.

定义 15 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 和 $p\in A$. A 中所有包含 p 的连通子集的并集，称为 A 的包含 p 的连通分支.

由命题 14 知连通分支是连通集. 直观上，A 的包含 $p\in A$ 的连通分支是 A 的最大的连通子集(即它不包含在 A 的任何包含 p 的连通子集中).

集合 A 的连通分支在 A 中总是闭的. 这是下面的命题的一个结果.

命题 15 设 $C\subset A\subset\mathbb{R}^n$ 是一个连通集. 则 C 在 A 中的闭包 $\overline{C}$ 是连通的.

证明 我们假设 $\overline{C}=U_1\cup U_2$，这里 U_1，U_2 是 $\overline{C}$ 中非空不相交的开集. 由于 $\overline{C}\supset C$，所以集合 $C\cap U_1=V_1$，$C\cap U_2=V_2$ 是 C 中不相交的开集，且 $V_1\cup V_2=C$. 我们将证明 V_1 和 V_2 是非空的，这样就和 C 的连通性矛盾.

设 $p\in U_1$. 因为 U_1 在 $\overline{C}$ 中是开的，所以在 A 中存在 p 的一个邻域 W 使 $W\cap\overline{C}\subset U_1$. 因为 p 是 C 的一个极限点，故存在 $q\in W\cap C\subset W\cap\overline{C}\subset U_1$. 因而 $q\in C\cap U_1=V_1$，于是 V_1 不是空的. 采用类似的方法可以证明 V_2 不是空的. 证毕.

推论 集合 A 的连通分支 $C\subset A\subset\mathbb{R}^n$ 在 A 中是闭的.

事实上，如果 $\overline{C}\neq C$，则存在 A 的一个连通子集，即 $\overline{C}$，它包含 C 作为真子集. 这与连通分支 C 的极大性矛盾.

在一些特殊的情况，集合 A 的连通分支也是 A 中的一个开集.

命题 16 设 $C\subset A\subset\mathbb{R}^n$ 是一局部道路连通集 A 的一个连通分支. 则 C 在 A 中是开的.

证明 设 $p\in C\subset A$. 因为 A 是局部道路连通的，所以存在 p 在 A 中的一个道路连通邻域 V. 根据命题 9，V 是连通的. 因为 C 是最大的，$C\supset V$，所以 C 在 A 中是开的. 证毕.

文献与评注

关于曲面的微分几何的基本著作是 Gauss 的论文"Disqui-sitiones generales circa superficies curvas", *Comm. Soc. Göttingen* Bd 6, 1823~1827. 此文有好几种语言的译本，例如

1. Gauss, K. F., *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, New York, 1965.

我们相信本书的读者现在已经有能力去读懂这篇文章，耐心和虚心是需要的，但最有益的是经验.

曲面微分几何的经典著作是 Darboux 的四卷论文集：

2. Darboux, G., *Théorie des Surfaces*, Gauthier-Villars, Paris, 1887, 1889, 1894, 1896. There exists a reprint published by Chelsea Publishing Co., Inc., New York.

这几卷对初学者来说是难以阅读的. 然而，除了它能作为有价值的资料之外，这部书中还有许多未被深入研究的思想，值得经常反复地去研读.

用英语出版的书中最有影响的经典著作可能是

3. Eisenhart, L. P., *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ginn and Company, Boston, 1909, reprinted by Dover, New York, 1960.

经典微分几何中一些直观的思想的出色表述，可以在下面这本书的第 4 章中找到.

4. Hilbert, H., and S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, Chelsea Publishing Company, Inc., New York, 1962(translation of a book in German, first published in 1932).

下面，我们将按年代顺序提出几本其他的教科书. 它们或多或少与本书处于同样的水平. 在[6]中可以找到一张更完全的书名目录. 此外，[9]中还包括了相当多的整体定理.

5. Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950.

6. Pogorelov, A. V., *Differential Geometry*, Noordhoff, Groningen, Netherlands, 1958.

7. Willmore, T. J., *An Introduction to Differential Geometry*, Oxford University Press, Inc., London 1959.

8. O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966.

9. Stoker, J. J., *Differential Geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1969.

在[8]中，对本书没有论述的活动标架法，有一个清楚而基本的阐述. 另外，本书中仅作简要论述的曲线论在[5]、[6]和[9]中有更详细的论述.

尽管下面的参考文献不是教科书，却应该包括在内. 参考文献[10]出色地给出了曲线和曲面的一些整体性定理. [11]是一组讲义，它已经成为有关这个课题的经典著作.

10. Chern, S. S., *Curves and Surfaces in Euclidean Spaces*, Studies in Global Geometry and Analysis, MAA Studies in Mathe-matics, The Mathematical Association of America, 1967.

11. Hopf, H., *Lectures on Differenaial Geometry in the Large*, notes published by Stanford University, 1955.

更深一步的阅读，可能应该从学习一些微分流形和李群开始. 例如

12. Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1, Brandeis University, 1970.

13. Warner, F., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman, Glenview, III., 1971.

参考文献[12]是一本读起来很有趣的书. [13]的 1～4 章对这个课题的基础问题作了精练的说明.

在这以后，根据读者的爱好和兴趣，可供选择的阅读材料是很广的. 下面我们列举了一些可能的选择，但它们决不是唯一的参考读物. 在[16]和[17]中可以找到详尽的参考书和参考文献目录

14. Berger, M., P. Gauduchon, and E. Mazet, *Le Spectre d'une Variéié Riemannienne*, Lecture Notes 194, Springer, Berlin, 1971.

15. Bishop, R. L., and R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.

16. Cheeger, J., and D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

17. Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1963.

18. Kobayashi, S., and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vols. I and II, Wiley-Interscience, New York, 1963 and 1969.

19. Klingenberg, W., D. Gromoll, and W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lecture Notes 55, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

20. Lawson, B., *Lectures on Minimal Submanifolds*, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

21. Milnor, J., *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

22. Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. II, Brandeis University, 1970.

极小子流形理论见[20]及其中的参考文献；与谱有关的问题见[14]；以及正弯曲流形的拓扑行为见[16]和[19]，它们仅仅是当代微分几何中许多令人感兴趣问题中的三个专题.

提示与答案

1.3

2. a. $\alpha(t)=(t-\sin t,\ 1-\cos t)$；见图 1-7. 奇点：$t=2\pi n$，这里 n 是任何整数.

7. b. 为了证明当 h，$k\to 0$ 时，向量$(\alpha(t+h)-\alpha(t+k))/(h-k)$收敛于向量 $\alpha'(t)$，可以对函数 x，y，z 中的每一个应用中值定理. 由于 $\alpha'(t)\neq 0$，所以由 $\alpha(t+h)$，$\alpha(t+k)$确定的直线趋于由 $\alpha'(t)$确定的直线.

8. 根据积分的定义，对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$，使得如果 $|P|<\delta'$，则

$$\left|\left(\int_a^b |\alpha'(b)|\,dt\right)-\sum(t_i-t_{i-1})\,|\alpha'(t_i)|\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

另一方面，由于 α'在$[a,\ b]$中是一致连续的，所以对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta''>0$，使得如果 t，$s\in[a,\ b]$且 $|t-s|<\delta''$，则

$$|\alpha'(t)-\alpha'(s)|<\varepsilon/2(b-a)$$

置 $\delta=\min(\delta',\ \delta'')$. 于是如果 $|P|<\delta$，用向量函数的中值定理我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\sum|\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)|-\sum(t_{i-1}-t_i)\,|\alpha'(t_i)|\right|\\ \leqslant&\left|\sum(t_{i-1}-t_i)\sup_{s_i}|\alpha'(s_i)|-\sum(t_{i-1}-t_i)\,|\alpha'(t_i)|\right|\\ \leqslant&\left|\sum(t_{i-1}-t_i)\sup_{s_i}|\alpha'(s_i)-\alpha'(t_i)|\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

这里 $t_{i-1}\leqslant s_i\leqslant t_i$. 与前面的结合起来，就给出了所需的不等式.

1.4

2. 设点 $p_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$和 $p=(x,\ y,\ z)$属于平面 P. 则 $ax_0+by_0+cz_0+d=0=ax+by+cz+d$. 于是，$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. 由于向量$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$平行于 P，所以向量$(a,\ b,\ c)$垂直于 P. 给定一点 $p=(x,\ y,\ z)\in P$，从平面 P 到原点 O 的距离 ρ 由 $\rho=|p|\cos\theta=(p\cdot v)/|v|$ 给出，这里 θ 是 Op 与法向量 v 的夹角. 由于 $p\cdot v=-d$，

$$\rho=\frac{p\cdot v}{|v|}=-\frac{d}{|v|}$$

3. 这是它们的法向量的夹角.

4. 两个平面平行的充要条件是它们的法向量是平行的.

6. v_1 和 v_2 都垂直于交线. 于是，$v_1\wedge v_2$ 与交线平行.

7. 当平面的法向量与直线的方向垂直时，这个平面与这条直线平行.

8. 给定的这两条直线的公垂线的方向，是 $u\wedge v$ 的方向. 这两条直线间的距离，可通过将向量 $r=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)$投影到公垂线上的方法得到. 这个投影显然是 r 与单位向量$(u\wedge v)/|u\wedge v|$ 的内积.

1.5

2. 应用这个事实：$\alpha'=t$，$\alpha''=kn$，$\alpha'''=kn'+k'n=-k^2t+k'n-k\tau b$.

4. 微分 $\alpha(s)+\lambda(s)n(s)=$常数，得到

$$(1-\lambda k)t+\lambda' n-\lambda\tau b=0$$

由此导出 $\tau=0$(曲线落在一平面内)和 $\lambda=$常数$=1/k$.

7. a. 用弧长作参数表示 α.

b. 用弧长 s 作参数表示 α. 在 s_1 和 s_2 处的法线分别是

$$\beta_1(t)=\alpha(s_1)+tn(s_1),\quad \beta_2(\tau)=\alpha(s_2)+\tau n(s_2),\quad t\in\mathbb{R},\quad \tau\in\mathbb{R}$$

它们的交点将由满足下式的 t 和 τ 的值确定：

$$\frac{\alpha(s_2)-\alpha(s_1)}{s_2-s_1}=\frac{tn(s_1)-\tau n(s_2)}{s_2-s_1}$$

应用 Taylor 公式 $n(s_2)=n(s_1)+(s_2-s_1)n'(s_1)+R$，并令 $s_2\to s_1$，就得到 $\alpha'(s_1)=-\bar{t}n'(s_1)$，这里 $\bar{t}$ 是当 $s_2\to s_1$ 时 t 和 τ 的公共极限值. 由此，$\bar{t}=1/k$.

13. 为了证明条件是必要的，将 $|\alpha(s)|^2=$常数微分三次，得到 $\alpha(s)=-Rn+R'Tb$. 为证充分性，微分 $\beta(s)=\alpha(s)+Rn-R'Tb$，得到

$$\beta'(s)=t+R(-kt-\tau b)+R'n-(TR')b-R'n=-(R\tau+(TR')')b$$

另一方面，微分 $R^2+(TR')^2=$常数，就有

$$0=2RR'+2(TR')(TR')'=\frac{2R'}{\tau}(R\tau+(TR')')$$

这是由于 $k'\neq 0$ 和 $\tau\neq 0$. 因此，$\beta(s)$是一固定点 p_0，且

$$|\alpha(s)-p_0|^2=R^2+(TR')^2=\text{常数}$$

15. 由于 $b'=\tau n$ 是已知的，$|\tau|=|b'|$. 于是，除一个符号外，n 是确定的. 由于 $t=n\wedge b$ 以及曲率是正的并由 $t'=kn$ 给定，因此曲率也能被确定.

16. 首先证明

$$\frac{n\wedge n'\cdot n''}{|n'|^2}=\frac{\dfrac{k'}{\tau}}{\left(\dfrac{k}{\tau}\right)^2+1}=a(s)$$

于是，$\int a(s)ds=\arctan(k/\tau)$；因此 k/τ 能够被决定. 由于 k 是正的，这也给出 τ 的符号. 此外，还知道 $|n'|^2=|-k\tau-\tau b|^2=k^2+\tau^2$，与 k/τ 结合起来就完全决定了 k^2 和 τ^2.

17. a. 设 a 是固定方向的单位向量，θ 是不变角. 于是，$t\cdot a=\cos\theta=$常数，将其微分就给出 $n\cdot a=0$. 因此，$a=t\cos\theta+b\sin\theta$，将其微分就给出 $k\cos\theta+\tau\sin\theta=0$，或 $k/\tau=-\tan\theta=$常数. 反之，若 $k/\tau=$常数$=-\tan\theta=-(\sin\theta/\cos\theta)$，我们可以将所有步骤倒过去，得到 $t\cos\theta+b\sin\theta$ 是一个常向量 a. 于是，$t\cdot a=\cos\theta=$常数.

b. 从部分 a 的论证中直接得出，$t\cdot a=$常数蕴涵 $n\cdot a=0$；而后一条件意味着 n 平行于与 a 垂直的一张平面. 反之，若 $n\cdot a=0$，则$(dt/ds)\cdot a=0$；因此，$t\cdot a=$常数.

c. 从部分 a 的论证中得出，$t \cdot a=$常数蕴涵 $b \cdot a=$常数. 反之，若 $b \cdot a=$常数，微分以后我们就发现 $n \cdot a=0$.

18. a. 用弧长 s 作参数表示 α 并关于 s 微分 $\bar{\alpha}=\alpha+rn$，得到

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds}=(1-rk)t+r'n-r\tau b$$

由于 $d\bar{\alpha}/ds$ 与 $\bar{\alpha}$ 相切，$(d\bar{\alpha}/ds) \cdot n=0$；因此，$r'=0$.

b. 用弧长 s 作参数表示 α. 用 $\bar{s}$ 和 $\bar{t}$ 表示 $\bar{\alpha}$ 的弧长和单位切向量. 因为 $d\bar{t}/ds=(d\bar{t}/d\bar{s})(d\bar{s}/ds)$，我们得到

$$\frac{d}{ds}(t \cdot \bar{t})=t \cdot \frac{d\bar{t}}{ds}+\frac{dt}{ds} \cdot \bar{t}=0$$

因此，$t \cdot \bar{t}=$常数$=\cos\theta$. 于是，利用 $\bar{\alpha}=\alpha+rn$，我们有

$$\cos\theta=\bar{t} \cdot t=\frac{d\bar{\alpha}}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}} \cdot t=\frac{ds}{d\bar{s}}(1-rk)$$

$$|\sin\theta|=|\bar{t} \wedge t|=\left|\frac{ds}{d\bar{s}}((t+rn') \wedge t\right|=\left|\frac{ds}{d\bar{s}}r\tau\right|$$

从这两个关系导出

$$\frac{1-rk}{r\tau}=\text{常数}=\frac{B}{r}$$

于是，置 $r=A$，最后可得 $Ak+B\tau=1$.

反之，设最后一个关系式成立，置 $A=r$，并定义 $\bar{\alpha}=\alpha+rn$. 于是，再利用这个关系式，我们得到

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds}=(1-rk)t-r\tau b=\tau(Bt-rb)$$

于是，$\bar{\alpha}$ 的单位切向量 $\bar{t}$ 是 $(Bt-rb)/\sqrt{B^2+r^2}=\bar{t}$. 由此导出 $d\bar{t}/ds=((Bk-r\tau)/\sqrt{B^2+r^2})n$. 因而，$\bar{n}(s)=\pm n(s)$，而且 $\bar{\alpha}$ 与 α 在 s 处的主法线重合. 因此，α 是 Bertrand 曲线.

c. 假设存在两条不同的 Bertrand 侣线 $\bar{\alpha}=\alpha+\bar{r}n$，$\tilde{\alpha}=\alpha+\tilde{r}n$. 根据 b 存在常数 C_1 和 C_2 使得 $1-\bar{r}k=C_1(\bar{r}\tau)$，$1-\tilde{r}k=C_2(\tilde{r}\tau)$. 明显地，$C_1 \neq C_2$. 微分这些表达式，我们分别得到 $k'=\tau'C_1, k'=\tau'C_2$. 这蕴涵 $k'=\tau'=0$. 利用曲线局部理论的基本定理中唯一性部分，容易看出圆柱螺旋线是唯一的这种曲线.

1.6

1. 假定 $s=0$，并考察在 $s=0$ 附近的规范形式. 由条件 1，P 必须是形如 $z=Cy$ 或 $y=0$. 平面 $y=0$ 是从切面，因而不满足条件 2. 注意到如果 $|s|$ 充分小，则 $y(s)>0$，且 $z(s)$ 与 s 有相同的符号. 根据条件 2，$C=z/y$ 既是正的又是负的. 于是，P 是平面 $z=0$.

2. a. 在 $s=0$ 的一个邻域内，考察 $\alpha(s)=(x(s), y(s), z(s))$ 的规范形式. 设 $ax+by+cz=0$ 是通过 $\alpha(0)$，$\alpha(0+h_1)$，$\alpha(0+h_2)$ 的平面. 定义函数 $F(s)=ax(s)+by(s)+cz(s)$ 并注意到 $F(0)=F(h_1)=F(h_2)=0$. 利用规范形式去证明 $F'(0)=a$，$F''(0)=bk$. 利用中值定理去证明当 h_1，$h_2 \to 0$ 时，$a \to 0$，$b \to 0$. 于是，当 h_1，$h_2 \to 0$ 时，平面 $ax+by+cz=0$ 趋向于平面 $z=$

0，即趋向于密切平面.

1.7

1. 不存在. 可用等周不等式.

2. 设 S' 是圆，$\overline{AB}$ 是 S' 的一条弦，且由 A 和 B 在 S' 上决定的两条弧 α 和 β 中的一条，比方说 α，有长度 l. 考察由 β 和 C 组成的分段 C^1 闭曲线(见定理 1 后面的注 2). 设 β 固定，而 C 在所有连接 A 和 B 并具长度 l 的曲线族中变动. 由分段 C^1 曲线的等周不等式，这个曲线族中围成最大面积的曲线是 S'. 由于 β 是固定的，因此圆弧 α 就是我们的问题的解.

4. 选择坐标系，使得坐标中心 O 在 p 点，且 x 轴和 y 轴分别按照 p 点的切向量和法向量来定向. 用弧长作参数来表示 C，$\alpha(s)=(x(s), y(s))$，并假定 $\alpha(0)=p$. 考察(有限项的) Taylor 展开式

$$\alpha(s)=\alpha(0)+\alpha'(0)s+\alpha''(0)\frac{s^2}{2}+R$$

这里 $\lim\limits_{s\to 0}R/s^2=0$. 设 k 是 α 在 $s=0$ 的曲率，可得

$$x(s)=s+R_x, y(s)=\pm\frac{ks^2}{2}+R_y$$

这里 $R=(R_x, R_y)$ 且符号依赖于 α 的定向. 于是，

$$|k|=\lim_{s\to 0}\frac{2|y(s)|}{s^2}=\lim_{d\to 0}\frac{2h}{d^2}$$

5. 设 O 是圆盘 D 的中心. 通过一族同心圆将 D 的边界收缩，直到它与曲线 C 相交于 p 点. 应用习题 4 去证明 C 在 p 的曲率 k 满足 $|k|\geqslant 1/r$.

8. 由于 α 是简单曲线，由切线回转定理我们有

$$\int_0^l k(s)ds=\theta(l)-\theta(0)=2\pi$$

因为 $k(s)\leqslant c$，我们得到

$$2\pi=\int_0^l k(s)ds\leqslant c\int_0^l ds=cl$$

9. 由 Jordan 曲线定理，一条简单闭曲线 C 围成一个集 K. 如果 K 不是凸的，就有点 p，$q\in K$，使得线段 $\overline{pq}$ 包含不属于 K 的点，且 $\overline{pq}$ 与 C 相交于一点 r，$r\neq p$，q. 利用在四顶点定理的证明中间给出的论证方法，证明由 p 和 q 决定的直线 L 与 C 在点 p，q，r 相切，且线段 $\overline{pq}$ 包含在 $C\subset K$ 中，这是一个矛盾.

11. 注意，H 所围的面积大于或等于 C 所围的面积，而 H 的长度小于或等于 C 的长度. 通过一族平行于 H 的曲线(习题 6)扩张 H，直到它的长度达到 C 的长度. 由于在这个过程中，面积或是保持不变或是进一步增大，我们就得到一条与 C 长度相等但所围面积大于或等于 C 的面积的凸曲线 H'.

12.

$$M_1=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{1/3}dp\right)d\theta=\frac{2\pi}{3}$$

$$M_2=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 dp\right)d\theta=2\pi$$

（见图 1-40）.

2.2

5. 不是. x 不是 1.1 的.

11. b. 为了证明 x 是 1.1 的，注意从 z 可以得到 $\pm u$. 由于 $\cosh v>0$，因此 u 的符号与 x 的符号相同. 于是，$\sinh v$(因此 v)是确定的.

13. $x(u, v)=(\sinh u\cos v, \sinh u\sin v, \cosh v)$.

15. 在连接 $p(t)=(0, 0, t)$和 $q(t)=(a, t, 0)$的直线的方程 $x/a=y/t=-(z-t)/t$ 中消去 t.

17. c. 将命题 3 推广到平面曲线并利用例 5 中的论证.

18. 第一部分使用反函数定理. 为决定 F，置 $u=\rho^2$，$v=\tan\varphi$，$w=\tan^2\theta$. 记 $x=f(\rho, \theta)\cos\varphi$，$y=f(\rho, \theta)\sin\varphi$，这里 f 是待定的. 于是，

$$x^2+y^2+z^2=f^2+z^2=\rho^2, \quad \frac{f^2}{z^2}=\tan^2\theta$$

由此导出 $f=\rho\cos\theta$，$z=\rho\sin\theta$. 因此，

$$F(u,v,w)=\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{(1+w)(1+v^2)}},\frac{v\sqrt{u}}{\sqrt{(1+w)(1+v^2)}},\frac{\sqrt{uw}}{\sqrt{(1+w)}}\right)$$

19. 不是. 对 C，注意在垂直的弧上的点在$\mathbb{R}^2$ 中没有邻域能写成一个可微函数的图. 同样的论证也适用于 S.

2.3

1. 由于 A^2 是恒等变换，所以 $A=A^{-1}$.

5. d 是下面的函数 d：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 在 s 上的限制：

$$d(x,y,z)=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\}^{1/2}$$
$$(x,y,z)\neq(x_0,y_0,z_0)$$

8. 如果 $p=(x, y, z)$，则 $F(p)$落在直线 $t\to(tx, ty, z)$，$t>0$ 与 H 的交中. 于是，

$$F(p)=\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}x,\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}y,z\right)$$

设 U 是去掉 z 轴的$\mathbb{R}^3$. 那么，如上定义的 F：$U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是可微的.

13. 如果 f 是这样的一种限制，则 f 是可微的(例 1). 为了证明它的逆，设 x：$U\to\mathbb{R}^3$ 是 s 在 p 附近的一个参数表示. 如同命题 1 中一样，延拓 x 成为 F：$U\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$. 设 W 是 p 在$\mathbb{R}^3$ 中的一个邻域使得在 W 上 F^{-1}是一个微分同胚. 用 $g(q)=f\circ x\circ\pi\circ F^{-1}(q)$，$q\in W$ 来定义 g：$W\to\mathbb{R}$，其中 π：$U\times\mathbb{R}\to U$ 是自然投影. 那么，g 是可微的，而且限制 $g|_{W\cap s}=f$.

16. 作为可微映照的复合 F 在 $S^2-\{N\}$上是可微的. 为了证明 F 在 N 也是可微的，考察从南极点 $s=(0, 0, -1)$所作的球极投影 πs，并置 $Q=\pi_s\circ F\circ\pi_s^{-1}$：$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$（当然，我们已将平面 $z=1$ 与$\mathbb{C}$ 等同起来）. 然后证明 $\pi_N\circ\pi_s^{-1}$：$\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}$ 是由 $\pi_N\circ\pi_s^{-1}(\zeta)=4/\zeta$ 给出的. 从

而得到

$$Q(\zeta)=\frac{\zeta^n}{\bar{a}_0+\bar{a}_1\zeta+\cdots+\bar{a}_n\zeta^n}$$

因此，Q 在 $\zeta=0$ 是可微的．于是，$F=\pi_s^{-1}\circ Q\circ\pi_s$ 在 N 是可微的．

2.4

1. 设 $\alpha(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$是曲面上在 $t=0$ 时通过 $p_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$的曲线．于是，$f(x(t),\ y(t),\ z(t))=0$；因此，$f_x x'(0)+f_y y'(0)+f_z z'(0)=0$，这里所有的导数都在 p_0 处计算．这意味着 p_0 处的所有切向量都垂直于向量$(f_x,\ f_y,\ f_z)$，因此，就得所需要的方程．

4. 用 f'表示 $f(y/x)$关于 $t=y/x$ 的导数．则 $z_x=f-(y/x)f'$，$z_y=f'$．于是，在$(x_0,\ y_0)$处的切平面方程是 $z=x_0f+(f-(y_0/x_0)f')(x-x_0)+f'(y-y_0)$，其中的函数都是在$(x_0,\ y_0)$处计算的．由此导出，若 $x=0$，$y=0$，则 $z=0$．

12. 对于正交性，比方说，考虑前面的两个曲面．它们的法向量平行于向量$(2x-a,\ 2y,\ 2z)$，$(2x,\ 2y-b,\ 2z)$．在这两个曲面的交集上 $ax=by$，因而，在这两个向量的内积中利用这一关系就可证明这个内积等于 0．

13. a. 设 $\alpha(t)$是 s 上满足 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=w$ 的曲线．那么，

$$df_p(w)=\frac{d}{dt}(\langle\alpha(t)-p_0,\alpha(t)-p_0\rangle^{1/2})\mid_{t=0}=\frac{\langle w,p-p_0\rangle}{\mid p-p_0\mid}$$

由此得出，当且仅当对所有的 $w\in T_p(S)$成立$(w,\ p-p_0)=0$ 时，p 是 f 的一个临界点．

14. a. $f(t)$在区间$(-\infty,\ C)$中是连续的，$\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=0$，$\lim\limits_{t\to C,t<c}f(t)=+\infty$．于是，对某个 $t_1\in(-\infty,\ C)$，$f(t_1)=1$．类似地可找到实根 $t_2\in(c,\ b)$，$t_3\in(b,\ a)$．

b. 两曲面 $f(t_1)=1$ 和 $f(t_2)=1$ 是正交的条件为

$$f_x(t_1)f_x(t_2)+f_y(t_1)f_y(t_2)+f_z(t_1)f_z(t_2)=0$$

这个条件可化为

$$\frac{x^2}{(a-t_1)(a-t_2)}+\frac{y^2}{(b-t_1)(b-t_2)}+\frac{z^2}{(c-t_1)(c-t_2)}=0$$

而上式可从 $t_1\neq t_2$ 和 $f(t_1)-f(t_2)=0$ 导出．

17. 由于每一曲面局部上都是一个可微函数的图，所以在 p 的一个邻域内，s_1 由 $f(x,\ y,\ z)=0$ 给定，s_2 由 $g(x,\ y,\ z)=0$ 给定；这里 0 是可微函数 f 和 g 的一个正则值．在 p 的这个邻域内，$s_1\cap s_2$ 是作为映照 F：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$：$F(q)=(f(q),\ g(q))$在$(0,\ 0)$的原象给出的．由于 s_1 和 s_2 是横截相交的，因此法向量$(f_x,\ f_y,\ f_z)$和$(g_x,\ g_y,\ g_z)$是线性独立的．于是，$(0,\ 0)$是 F 的正则值而 $s_1\cap s_2$ 是一条正则曲线(参见 2.2 习题 17)．

20. 在$(x_0,\ y_0,\ z_0)$处的切平面的方程是

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$$

过 O 且垂直于切平面的直线由下式给定

$$\frac{xa^2}{x_0}=\frac{yb^2}{y_0}=\frac{zc^2}{z_0}$$

由最后一个表达式，我们得到

$$\frac{x^2a^2}{xx_0}=\frac{y^2b^2}{yy_0}=\frac{z^2c^2}{zz_0}=\frac{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}{xx_0+yy_0+zz_0}$$

由同一表达式并顾及椭球面的方程，我们得到

$$\frac{xx_0}{x_0^2/a^2}=\frac{yy_0}{y_0^2/b^2}=\frac{zz_0}{z_0^2/c^2}=\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{1}$$

再从同一表达式并利用切平面的方程，我们得到

$$\frac{x^2}{(x_0x)/a^2}=\frac{y^2}{(y_0y)/b^2}=\frac{z^2}{(z_0z)/c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{1}$$

后面三个方程式的右边部分是相等的，因此就得到所断言的方程.

21. 模仿第 2 章附录中命题 9 的证明.

22. 设 r 是与 S 的法线相交的那条直线，并设 $p\in S$. 包含 p 和 r 的平面 P_1 也包含 S 在 $P_1\cap S$ 上的点处的所有法线. 考虑通过 p 且垂直于 r 的一个平面 P_2. 由于过 p 的法线与 r 相交，因此 P_2 横截于 $T_p(S)$；因此，$P_2\cap S$ 在 p 的一个邻域内是一条正则平面曲线 C(参见 2.4 习题 17). 更进一步，$P_1\cap P_2$ 垂直于 $T_p(S)\cap P_2$；因此，$P_1\cap P_2$ 垂直于 C. 由此得出 C 的所有法线都通过一固定点 $q=r\cap P_2$；从而，C 被包含在一个圆周上(参见 1.5 习题 4). 于是，每一点 $p\in S$ 都有一个邻域属于某个以 r 为轴的旋转曲面. 由连通性，s 属于这些曲面中确定的一个.

2.5

8. 由于 $\partial E/\partial v=0$，$E=E(u)$ 只是 u 的函数. 置 $\bar{u}=\int\sqrt{E}du$. 类似地，$G=G(v)$ 只是 v 的函数，可置 $\bar{v}=\int\sqrt{G}dv$. 于是，$\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 度量了沿坐标曲线的弧长，因此 $\bar{E}=\bar{G}=1$，$\bar{F}=\cos\theta$.

9. 用弧长将生成曲线参数化.

3.2

13. 由于密切平面与 N 垂直，$N'=\tau n$，因此，$\tau^2=|N'|^2=k_1^2\cos^2\theta+k_2^2\sin^2\theta$，这里 θ 是 e_1 与曲线的切线的夹角. 由于是渐近方向，我们得到 $\cos^2\theta$ 和 $\sin^2\theta$ 是 k_1 和 k_2 的函数，将它们代入上面的表达式就得到 $\tau^2=-k_1k_2$.

14. 置 $\lambda_1=\lambda_1N_2$ 及 $\lambda_2=\lambda_2N_1$，我们有

$$|\lambda_1-\lambda_2|=k|\langle n,N_1\rangle N_2-\langle n,N_2\rangle N_1|=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2\cos\theta}$$

另一方面，

$$|\sin\theta|=|N_1\wedge N_2|=|n\wedge(N_1\wedge N_2)|=|\langle n,N_2\rangle N_1-\langle n,N_1\rangle N_2|$$

16. 用一个包含环面的轴的平面去截这个环面并利用习题 15.

18. 利用下面的事实，即如果 $\theta=2\pi/m$，则

$$\sigma(\theta)=1+\cos^2\theta+\cdots+\cos^2(m-1)\theta=\frac{m}{2}$$

这一事实可利用下列两点加以证明，即

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4}\left(\sum_{v=-(m-1)}^{m-1} e^{2vi\theta} + 2m + 1\right)$$

以及在求和符号下的表达式正好是一个几何级数的和，它给出

$$\frac{\sin(2m\theta - \theta)}{\sin\theta} = -1$$

19. a. 将 t 和 h 用主方向构成的基 $\{e_1, e_2\}$ 表示出来，并计算 $\langle dN(t), h\rangle$.

b. 微分 $\cos\theta=\langle N, n\rangle$，利用 $dN(t)=-k_n t+\tau_g h$，并注意 $\langle N, b\rangle=\langle h, N\rangle=\sin\theta$，这里 b 是从法向量.

20. 设 S_1，S_2 和 S_3 是过 p 的曲面. 证明 $C_1=S_2\cap S_3$ 关于 S_2 和 S_3 的测地挠率相等；其值用 τ_1 表示. 类似地，τ_3 表示 $C_2=S_1\cap S_3$ 的测地挠率，τ_2 表示 $S_1\cap S_2$ 的测地挠率. 利用 τ_g 的定义证明：由于 C_1，C_2，C_3 是两两正交的，因此 $\tau_1+\tau_2=0$，$\tau_2+\tau_3=0$，$\tau_3+\tau_1=0$，由此得出 $\tau_1=\tau_2=\tau_3=0$.

3.3

2. 渐近曲线：$u=$常数，$v=$常数. 曲率线：

$$\log(v+\sqrt{v^2+c^2}) \pm u = \text{常数}$$

3. $u+v=$常数. $u-v=$常数.

6. a. 取直线 r 为 z 轴，r 的一条垂线为 x 轴，我们有

$$z' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

置 $x=\sin\theta$，我们得到

$$z(\theta) = \int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta = \log\tan\frac{\theta}{2} + \cos\theta + C$$

如果 $z(\pi/2)=0$，则 $C=0$.

8. a. 如果 $X=X_1$ 和 $\overline{X}=\overline{X}_1$ 是满足接触定义的参数表示，那么断言显然是真的. 如果 X 和 $\overline{X}$ 是任意的，考察 $\overline{X}=X_1\circ h$，这里 h 是坐标变换. 由此得出 $f\circ X=f\circ X_1\circ h$ 的偏导数是 $f\circ X_1$ 的偏导数的线性组合，因此，随着后者等于零它们也等于零.

b. 引入参数表示 $X(x, y)=(x, y, f(x, y))$ 和 $\overline{X}(x, y)=(x, y, \overline{f}(x, y))$，并定义函数 $h(x, y, z)=f(x, y)-z$. 注意 $h\circ X=0$ 及 $h\circ\overline{X}=f-\overline{f}$. 从 a，应用函数 h 就可得出 $f-\overline{f}$ 有阶数 $\leqslant 2$ 且在 $(0, 0)$ 处等于零的偏导数.

d. 由于阶数 $\geqslant 2$ 的接触蕴涵阶数 $\geqslant 1$ 的接触，因此这个抛物面通过 p 且在 p 点与曲面相切. 取平面 $T_p(S)$ 为 xy 平面，则抛物面的方程变成

$$\overline{f}(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey$$

设 $z=f(x, y)$ 是曲面在平面 $T_p(S)$ 上的新表示，利用部分 b，我们得到 $d=c=0$，$a=\frac{1}{2}f_{xx}$，$b=f_{xy}$，$c=\frac{1}{2}f_{yy}$.

15. 如果存在这样的例子，那么局部地它可写成 $z=f(x, y)$，而 $f(0, 0)=0$，$f_x(0, 0)=f_y(0, 0)=0$. 所给的条件要求在 $(0, 0)$ 处 $f_{xx}^2+f_{yy}^2\neq 0$ 并且 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$ 当且仅当 $(x, y)=(0, 0)$ 时成立.

作为尝试，置 $f(x, y)=\alpha(x)+\beta(y)+xy$，这里 $\alpha(x)$ 只是 x 的函数，$\beta(y)$ 只是 y 的函数. 我们证明 $\alpha_{xx}=\cos x$，$\beta_{yy}=\cos y$ 满足上面的条件. 由此得出

$$f(x,y)=\cos x+\cos y+xy-2$$

就是一个这样的例子.

16. 取一个包含这个曲面的球面然后连续地减少它的半径. 研究球面第一次碰到这曲面的那些点处的法截线.

19. 证明双曲面包含两个单参数的直线族，族中直线都必定是渐近线. 为了找出这种直线族，将双曲面的方程写成

$$(x+z)(x-z)=(1-y)(1+y)$$

并证明：对每一个 $k\neq 0$，直线 $x+z=k(1+y)$，$x-z=(1/k)(1-y)$ 属于曲面.

20. 注意，对某个函数 f 成立 $(x/a^2, y/b^2, z/c^2)=fN$，并且对曲面上每一条曲线 $\alpha(t)=(x(t), y(t), z(t))$，脐点满足方程

$$\left\langle \frac{d(fN)}{dt}\wedge\frac{d\alpha}{dt},N\right\rangle=0$$

假定 $z\neq 0$，用 z/c^2 乘这个方程然后消去 z 和 dz/dt（注意此方程对曲面上的每一个切向量都成立）. 于是就可找到四个脐点，即

$$y=0,x^2=a^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\quad z^2=c^2\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}$$

若 $z=0$，则并不能得到任何新的脐点.

21. a. 设 $dN(v_1)=av_1+bv_2$，$dN(v_2)=cv_1+dv_2$. 直接计算得到

$$\langle d(f(N)(v_1)\wedge d(fN)(v_2),fN\rangle=f^3\det(dN)$$

b. 证明 $fN=(x/a^2, y/b^2, z/c^2)=W$，并注意

$$d(fN)(v_i)=\left(\frac{\alpha_i}{a^2},\frac{\beta_i}{b^2},\frac{\gamma_i}{c^2}\right),\text{这里 } v_i=(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i),i=1,2$$

选择 v_i 使得 $v_1\wedge v_2=N$，就可得到

$$\langle d(fN)(v_1)\wedge df(N)(v_2),fN\rangle=\frac{\langle W,X\rangle}{a^2b^2c^2}\frac{1}{f}$$

这里 $X=(x, y, z)$. 于是，$\langle W, X\rangle=1$.

24. d. 在 $\mathbb{R}^3$ 中选择一坐标系使得点 $p\in S$ 为原点 O，xy 平面与 $T_p(S)$ 重合，z 轴的正向与 S 在 p 点的定向相同. 进一步，在 $T_p(S)$ 中取 x 和 y 轴与 p 点的主方向一致. 如果 V 充分小，则它可表示为下面的可微函数的图，

$$z=f(x,y),(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$$

这里 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开圆盘，且

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=f_{xy}(0,0)=0,f_{xx}(0,0)=k_1,f_{yy}(0,0)=k_2$$

不失一般性，我们可假定在 D 上 $k_1\geqslant 0$，$k_2\geqslant 0$，并设法证明在 D 上 $f(x, y)\geqslant 0$.

假定对某个$(\bar{x}, \bar{y})\in D$，$f(\bar{x}, \bar{y})<0$. 考察函数 $h_0(t)=f(t\bar{x}, t\bar{y})$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 由于 $h'_0(0)=0$，存在 t_1，$0\leqslant t_1\leqslant 1$，使得 $h''_0(t_1)<0$. 设 $p_1=(t_1\bar{x}, t_1, \bar{y}, f(t_1\bar{x}, t_1\bar{y}))\in S$，并考虑 V 关于在 p_1 处的切平面 $T_{p_1}(S)$的高度函数 h_1. 限制于曲线 $\alpha(t)=(t\bar{x}, t\bar{y}, f(t\bar{x}, t\bar{y}))$ 时，高度函数是 $h_1(t)=\langle\alpha(t)-p_1, N_1\rangle$，这里 N_1 是 p_1 处的单位法向量. 于是，$h''_1(t)=\langle\alpha''(t), N_1\rangle$，且在 $t=t_1$ 处，

$$h''_1(t_1)=\langle(0, 0, h''_0(t_1)), (-f_x(p_1), -f_y(p_1), 1)\rangle=h''_0(t_1)<0$$

但是 $h''_1(t_1)=\langle\alpha''(t_1), N_1\rangle$，除了一个正因子外，是 p 处在 $\alpha'(t_1)$方向上的法曲率. 这是一个矛盾.

3.4

10. c. 将问题化为这样一个事实，即如果 λ 是无理数，m 和 n 取遍整数，则集合$\{\lambda m+n\}$在实直线中稠密. 为了证明这一事实，仅须证明集合$\{\lambda m+n\}$有任意小的正元素. 假如不是这样，设法证明$\{\lambda m+n\}$的正元素的下确界仍属于$\{\lambda m+n\}$，从而得到一个矛盾.

11. 考察 w 的轨线的集合$\{\alpha_i, I_i\to I\}$，要求 $\alpha_i(0)=p$，并置 $I=U_iI_i$. 由唯一性，极大的轨线 α：$I\to U$ 可用$\alpha(t)=a_i(t)$，$t\in I_i$ 来定义.

12. 对任一 $q\in S$，存在 q 的一个邻域 U 和区间$(-\varepsilon, \varepsilon)$，$\varepsilon>0$，使得 $\alpha(0)=q$ 的轨线 $\alpha(t)$ 在$(-\varepsilon, \varepsilon)$中是有定义的. 由紧致性，可以用有限个这样的邻域覆盖 S. 设 ε_0 是相应的 ε 值的最小值. 如果 $\alpha(t)$对 $t<t_0$ 有定义而对 t_0 没有定义，则取 $t_1\in(0, t_0)$而 $|t_0-t_1|<\varepsilon_0/2$. 考察 W 的满足 $\beta(t_1)=\alpha(t_1)$的轨线 $\beta(t)$，得到矛盾.

4.2

3. 必要性部分的证明是直接的. 为了证明充分性的部分，设 $p\in S$，$v\in T_p(S)$，$v\neq 0$. 考察曲线 α：$(-\varepsilon, \varepsilon)\to S$，$\alpha'(0)=v$. 我们断言：$|d\varphi_p(\alpha'(0))|=|\alpha'(0)|$. 否则，比方说 $|d\varphi_p(\alpha'(0))|>|\alpha'(0)|$，从而在 0 的一个含在$(-\varepsilon, \varepsilon)$中的邻域 J 内，我们有 $|d\varphi_p(\alpha'(t))|>|\alpha'(t)|$. 这意味着 $\alpha(J)$的长度大于 $\varphi\circ\alpha(J)$的长度，这是一矛盾.

6. 在 t_0 的一个邻域内用弧长 s 作为 α 的参数. 在平面中作一曲线具曲率 $k=k(s)$，然后应用习题 5.

8. 置 $O=(0, 0, 0)$，$G(O)=p_0$，$G(p)-p_0=F(p)$. 于是，映照 F：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 满足 $F(O)=0$ 且 $|F(p)|=|G(p)-G(O)|=|p|$. 这说明 F 保持$\mathbb{R}^3$ 的内积. 于是，它将基

$$\{(1,0,0)=f_1,(0,1,0)=f_2,(0,0,1)=f_3\}$$

映成一个标准正交基，而且若 $p=\Sigma a_if_i$，$i=1, 2, 3$，则 $F(p)=\Sigma a_iF(f_i)$. 因此，F 是线性的.

11. a. 由于 F 是保持距离不变的，而且一条可微分曲线的弧长是它的内接多边形的边长的极限，因此 F 在 S 上的限制 $F|S$ 保持 S 中曲线的弧长不变.

c. 考察平面上的一块开带形到去掉一条母线的圆柱上的等距.

12. $F(x, y, z)=(x, -y, -z)$在 C 上的限制是 C 的一个等距(参见习题 11)，它的不动点是(1，0，0)和(−1，0，0).

17. 斜驶线与球面的经线交成固定角．在 Mercator 投影(见习题 16)下，经线变成平面上的平行直线．由于 Mercator 投影是共形的，因此斜驶线也变成直线．于是，球面上的那个三角形的内角和，等于一个平面直线三角形的内角和.

4.4

6. 利用这个事实，即测地曲率的绝对值等于普通曲率在切平面上的投影的绝对值.

8. 利用习题 1 的部分 b 及 3.2 的命题 5.

9. 利用经线是测地线及平行移动保持角度的性质.

10. 应用关系式 $k_g^2+k_n^2=k^2$ 及＝Meusnier 定理于投影柱面.

12. 将 $p\in S$ 的一个邻域用参数表示，使得两族测地线成为坐标曲经(3.4 推论 1)．证明这意味着 $F=0$，$E_v=0=G_u$．再作一参数变换使得 $\bar{F}=0$，$\bar{E}=\bar{G}=1$.

13. 在 $T_p(S)$中固定两个正交单位向量 $v(p)$和 $w(p)$，然后将它们平行移动到 V 的每一点．于是得到两个可微的正交单位向量场．将 V 用参数表示，使得这些向量的方向与坐标曲线相切，因此它们是测地线．应用习题 12.

16. 将 $p\in S$ 的一个邻域用参数表示，使得曲率线是坐标曲线而 $v=$常数是渐近曲线．由此得出 $e_v=0$，从 Mainardi-Codazzi 方程可断言 $E_v=0$．这蕴涵 $v=$常数的测地曲率是零．观察环面的上半部的平行环可以得到所需的例子.

18. 利用 Clairaut 关系(参见例 5).

19. 在方程(4)中，将 Christoffel 符号用它们作为 E，F 和 G 的函数的值代去，并微分第一基本形式的表达式：

$$1=E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2$$

20. 利用 Clairaut 关系.

4.5

4. b. 注意映照 $x=\bar{x}$，$y=(\bar{y})^2$，$z=(\bar{z})^3$ 给出了一个从球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 到曲面$(\bar{x})^2+(\bar{y})^4+(\bar{z})^6=1$ 上的同胚.

6. a. 限制 v 于曲线 $\alpha(t)=(\cos t, \sin t)$，$t\in[0, 2\pi]$．$v(t)$与 x 轴的夹角是 t．于是，$2\pi I=2\pi$；因此，$I=1$.

d. 将 v 限制于曲线 $\alpha(t)=(\cos t, \sin t)$，$t\in[0, 2\pi]$，我们得到 $v(t)=(\cos^2 t-\sin^2 t, -2\cos t\sin t)=(\cos 2t, -\sin 2t)$．于是，$I=-2$.

4.6

8. 设(ρ, θ)是测地极坐标系，使得它的极点是 Δ 的一个顶点，而 Δ 的一条边对应于 $\theta=0$．设其余的两边由 $\theta=\theta_0$ 和 $\rho=h(\theta)$给定．由于对应于极点的那个顶点不属于坐标邻域，因此取

一个环绕极点的半径为 ϵ 的小圆. 于是

$$\iint_{\Delta} K\sqrt{G}d\rho d\theta = \int_0^{\theta_0} d\theta \left(\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{h(\theta)} K\sqrt{G}d\rho\right)$$

注意 $K\sqrt{G} = -(\sqrt{G})_{\rho\rho}$ 及 $\lim_{\epsilon\to 0}(\sqrt{G})_{\rho} = 1$，括弧里的极限就由下式给出

$$1 - \frac{\partial(\sqrt{G})}{\partial\rho}(h(\theta),\theta)$$

利用习题 7，我们得到

$$\iint_{\Delta} K\sqrt{G}d\rho d\theta = \int_0^{\theta_0} d\theta - \int_0^{\theta_0} d\varphi = \alpha_3 - (\pi - \alpha_2 - \alpha_1) = \sum_1^3 \alpha_i - \pi$$

12. c. 对 $K\equiv 0$，问题是平凡的. 对 $K>0$，利用部分 b. 对 $K<0$，考虑伪球面的一个用极坐标$(\rho,\ \theta)$作参数表示的坐标邻域 V(参见 3.3 习题 6 部分 b)，亦即，$E=1$，$F=0$，$G=\sinh^2\rho$. 计算 V 的测地线，为方便计，作一坐标变换 $\tanh\rho = 1/w$，$\rho\neq 0$，$\theta=0$，结果有

$$E = \frac{1}{(w^2-1)^2},\quad G = \frac{1}{w^2-1},\quad F = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{2w}{w^2-1},\quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{w}{w^2-1},\quad \Gamma_{22}^1 = w$$

而其余的 Christoffel 符号等于零. 由此导出非径向测地线满足方程$(d^2w/d\theta^2)+w=0$，这里 $w=w(0)$. 于是，$w=A\cos\theta+B\sin\theta$；即

$$A\tanh\rho\cos\theta + B\tanh\rho\sin\theta = 1$$

因此，由

$$\xi = \tanh\rho\cos\theta,\eta = \tanh\rho\sin\theta,(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$$

给出的从 V 到$\mathbb{R}^2$ 的映照是一个测地映照.

13. b. 定义 $X=\varphi^{-1}$：$\varphi(U)\subset\mathbb{R}^2\to S$. 设 $v=v(u)$是 U 中的一条测地线. 由于 φ 是一个测地映照及$\mathbb{R}^2$ 的测地线是直线，因此 $d^2v/du^2\equiv 0$. 将此条件代到部分 a 里就可得到所要的结果.

c. 方程(a)可利用部分 b 从 4.3 的方程(5)中得到. 从 4.3 的方程(5a)及部分 b 我们有

$$KF = (\Gamma_{12}^1)_u - 2(\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1$$

在上面的表达式中交换 u 和 v 然后减去所得的式子，我们得到$(\Gamma_{12}^1)_u=(\Gamma_{12}^2)_v$，由此得到方程(b). 最后，方程(c)和(d)可分别从方程(a)和(b)利用交换 u 和 v 的方法得到.

d. 将方法(a)关于 v，方程(b)关于 u 求导，并将所得结果相减，我们得到

$$EK_v - FK_u = -K(E_v - F_u) + K(-F\Gamma_{12}^2 + E\Gamma_{12}^1)$$

利用 Γ_{ij}^K 的值，上面的表达式就给出

$$EK_v - FK_u = -K(E_v - F_u) + K(E_v - F_u) = 0$$

类似地，从方程(c)和(d)我们得到 $FK_v - GK_u = 0$，由此 $K_v=K_u=0$.

4.7

1. 在 $T_{\alpha(0)}(S)$取一标准正交基$\{e_1,\ e_2\}$并将 e_1 和 e_2 沿着 α 作平行移动，结果在每一 $T_{\alpha(t)}(S)$得到一个标准正交基$\{e_1(t),\ e_2(t)\}$. 置 $w(\alpha(t)) = w_1(t)e_1(t) + w_2(t)e_2(t)$. 则 $D_yW=$

$w_1'(0)e_1+w_2'(0)e_2$ 而等式右端是 $T_p(S)$ 中曲线 $w_1(t)e_1+w_2(t)e_2$ 在 $t=0$ 处的速度向量.

2. b. 证明如果 $(t_1, t_2)\subset I$ 是小区间且不包含"α 的角点"，则 $\alpha((t_1, t_2))$ 的切向量场能延拓成在 $\alpha((t_1, t_2))$ 的一个邻域内的向量场 y. 于是，将 v 和 w 限制于 α，性质 3 成为

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), w(t)\rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w\right\rangle + \left\langle v, \frac{Dw}{dt}\right\rangle$$

这蕴涵在 $\alpha\mid(t_1, t_2)\mid$ 上的平行移动是一个等距. 由紧致性，这能延拓到整个 I. 反之，假定平行移动是一个等距. 设 α 是 y 通过点 $p\in S$ 的轨道. 将 v 和 w 限制于 α. 像在习题 1 的解答中那样选取标准正交基 $\{e_1(t), e_2(t)\}$，并置 $v(t)=v_1e_1+v_2e_2$，$w(t)=w_1e_1+w_2e_2$. 则性质 3 成为"乘积求导法则"：

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i v_iw_i\right) = \sum_i \frac{dv_i}{dt}w_i + \sum_i v_i\frac{dw_i}{dt}, \quad i=1,2$$

c. 设 D 已给定，并选取一正交参数表示 $x(u, v)$. 设 $y=y_1x_u+y_2x_v$，$w=w_1x_u+w_2x_v$. 从性质 1，2 和 3 得出 D_yw 是由 $D_{x_u}x_u$，$D_{x_u}x_v$，$D_{x_v}x_v$ 决定的. 置 $D_{x_u}x_u=A_{11}^1x_u+A_{11}^2x_v$，$D_{x_u}x_v=A_{12}^1x_u+A_{12}^2x_v$，$D_{x_v}x_v=A_{22}^1x_u+A_{22}^2x_v$. 由性质 3 可以得到 A_{ij}^k 与 Γ_{ij}^k 满足同样的方程(参见 4.3 方程(2)). 于是，$A_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k$，这就证明了 D_yv 与"取普通导数然后投影到切平面上"的运算相同.

3. a. 注意

$$dx_{(0,t)}(1,0) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_{s=0} = \frac{d}{ds}\gamma(s,\alpha(t),v(t))\mid_{s=0} = v(t)$$

$$dx_{(0,t)}(0,1) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{s=0} = \alpha'(t)$$

b. 利用 x 是一个局部微分同胚因而可用一族 x 在其上都是一对一的开区间去覆盖紧致集 I. 再用 Heine-Borel 定理和此覆盖的 Lebegue 数(参见 2.7)将结果整体化.

c. 为了证明 $F=0$，我们计算(参见习题 2 的性质 4)

$$\frac{d}{ds}F = \frac{d}{ds}\left\langle\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}\right\rangle = \left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}\right\rangle$$

$$+\left\langle\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}\right\rangle = \left\langle\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}\right\rangle$$

这里已利用向量场 $\partial x/\partial s$ 沿着 $t=$ 常数是平行的. 由于

$$0 = \frac{d}{dt}\left\langle\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial s}\right\rangle = 2\left\langle\frac{D}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial s}\right\rangle$$

F 与 s 无关. 但 $F(0, t)=0$，因此我们有 $F=0$.

d. 这里 $F=0$ 这个事实的结果.

4. a. 应用 Schwarz 不等式，

$$\left(\int_a^b fg\,dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2\,dt\int_a^b g^2\,dt$$

其中 $f\equiv1$，$g=|d\alpha/dt|$.

5. a. 注意到 $E(t)=\int_0^l\{(\partial u/\partial v)^2+G(\gamma(v,t),v)\}dv$，我们得到(为方便计，记 $\gamma(v, t)=$

$u(v, t)$)

$$E'(t)=\int_0^l\left\{2\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial t}+\frac{\partial G}{\partial u}u'\right\}dv$$

由于对 $t=0$，$\partial u/\partial v=0$ 且 $\partial G/\partial u=0$，我们已经证明了第一部分．进一步，

$$E''(t)=\int_0^l\left\{2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial t}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial^3 u}{\partial v\partial^2 t}+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u')^2+\frac{\partial G}{\partial u}u''\right\}dv$$

因此，利用 $G_{uu}=-2K\sqrt{G}$ 并注意到对 $t=0$，$\sqrt{G}=1$．我们得到

$$E''(0)=2\int_0^l\left\{\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^2-K\eta^2\right\}dv$$

6. b. 选取 $\varepsilon>0$ 和 $\mathbb{R}^3\supset S$ 中的坐标使得 $\varphi(\rho,\varepsilon)=q$．考察点 $(\rho,\varepsilon)=r_0$，$(\rho,\varepsilon+2\pi\sin\beta)=r_1$，…，$(\rho,\varepsilon+2\pi k\sin\beta)=r_k$．取 ε 充分小，我们看到：如果 $2\pi k\sin\beta<\pi$(图 4-49)，则直线段 $\overline{r_0r_1}$，…，$\overline{r_0r_k}$ 属于 V．由于 φ 是局部等距，这些线段的象将是连结 q 与 q 的测地线，它们显然在 q 处有角点(图 4-49)．

c. 必须证明每一条测地线 γ：$[0,l]\to S$，$\gamma(0)=\gamma(l)=q$，是部分 b 中提及的直线段 $\overline{r_0r_1}$，…，$\overline{r_0r_k}$ 中的一条在 φ 下的象．对于 r_0 的某个邻域 $U\subset V$，限制 $\varphi\mid_U=\tilde{\varphi}$，是等距．于是 $^{-1}\circ\gamma$ 是从 r_0 出发的射线 L 上的一个线段．由于 $\varphi(L)$ 是与 $\gamma([0,l])$ 在一个开区间上重合的一条测地线，因此它在 γ 有定义的范围与 γ 重合．由于 $\gamma(l)=q$，因此 L 通过点集 r_i，$i=1$，…，k，中的一点，比方说 r_j，于是 γ 是 $\overline{r_0r_j}$ 的象．

5.2

3. a. 利用关系式 $\varphi''=-K\varphi$ 去得到 $(\varphi'^2+K\varphi^2)'=K'\varphi^2$．将后一式的两边积分并利用题中的边界条件．

5.3

5. 假定关于 d 的每一 Cauchy 序列都收敛．设 $\gamma(s)$ 是用弧长作参数的测地线．用反证法，假设 $\gamma(s)$ 对 $s<s_0$ 有定义但对 $s=s_0$ 无定义．取一序列 $\{s_n\}\to s_0$．于是，给定 $\varepsilon>0$，存在 n_0，使得若 n，$m>n_0$，则 $|s_n-s_m|<\varepsilon$．因而，

$$d(\gamma(s_m),\gamma(s_n))\leqslant|s_n-s_m|<\varepsilon$$

$\{\gamma(s_n)\}$ 是关于 d 的一个 Cauchy 序列．设 $\{\gamma(s_n)\}\to p_0\in S$，并设 W 是 p_0 的一个象在 4.7 中由命题 1 那样给出的邻域．若 m，n 充分大，则连结 $\gamma(s_m)$ 和 $\gamma(s_n)$ 的小测地线明显地与 γ 重合．于是，γ 能被延拓通过 p_0，矛盾．

反之，假设 s 是完备的，$\{p_n\}$ 是 S 上的点组成的关于 d 的一个 Cauchy 序列．由于 d 大于或等于欧氏距离 d，所以 $\{p_n\}$ 也是关于 d 的一个 Cauchy 序列．于是，$\{p_n\}$ 收敛于 $p_0\in\mathbb{R}^3$．用反证法，假定 $p_0\notin S$．由于 Cauchy 序列是有界的，因此给定 $\varepsilon>0$，存在指标 n_0 使得对所有的 $n>n_0$，距离 $d(p_{n_0},p_n)<\varepsilon$．由 Hopf-Rinow 定理，有一极小测地线 γ_n 连结 p_{n0} 和 p_n，而 γ_n 的长度 $<\varepsilon$．当 $n\to\infty$ 时，γ_n 趋向于一极小测地线 γ，γ 的长度 $\leqslant\varepsilon$．将 γ 用弧长 s 作参数．则因为 $p_0\notin S$，γ 对 $s=\varepsilon$ 无定义，这与 s 的完备性矛盾．

6. 设$\{p_n\}$是s上的点的序列，使得$d(p,\ p_n)\to\infty$. 由于S是完备的，S上有极小测地线$\gamma_n(s)$(用弧长作参数)连结p和p_n且$\gamma_n(0)=p$. 单位向量集$\gamma'_n(0)$在$T_p(S)$的(紧致的)单位球面上有一极限点v. 设$\gamma(s)=\exp_p sv$，$s\geqslant 0$. 于是，$\gamma(s)$是从p出发的一条射线. 为证明这一点，注意对固定的s_0和充分大的n，$\lim_{n\to\infty}\gamma_n(s_0)=\gamma(s_0)$，这里从测地线对初始条件的连续依赖性得出的. 进一步，由于d是连续的，因此，

$$\lim_{n\to\infty} d(p,\gamma_n(s_0)) = d(p,\gamma(s_0))$$

但是若n足够大，$d(p,\ \gamma_n(s_0))=s_0$. 于是，$d(p,\ \gamma(s_0))=s_0$，所以γ是一射线.

8. 首先证明：若d和d分别表示S和$\overline{S}$的内蕴距离，则$d(p,\ q)\geqslant cd(\varphi(p),\ \varphi(q_1))$，$p$，$q\in S$. 现在设$\{p_n\}$是$S$上的点关于$d$的Cauchy，序列. 由于刚才指明的事实，$\{\varphi(p_n)\}$也是关于$d$的Cauchy序列. 由于$\overline{S}$是完备的，$\{\varphi(p_n)\}\to\varphi(p_0)$. 由于$\varphi^{-1}$是连续的，$\{p_n\}\to p_0$. 于是，关于$d$的每一Cauchy序列收敛；因此$S$是完备的(参见习题5).

9. φ是1.1的：用反证法，假定$p_1\neq p_2\in S_1$使得$\varphi(p_1)=\varphi(p_2)=q$. 由于$S_1$是完备的，有极小测地线$\gamma$连结$p_1$和$p_2$. 由于$\varphi$是局部等距，$\varphi\circ\gamma$是一条连结$q$和$q$的长度与$\gamma$相等的测地线. 在$\varphi\circ\gamma$上任何不同于$q$的点能用两条测地线和$q$连结，这是一个矛盾.

φ是到上的：由于φ是局部微分同胚，$\varphi(S_1)\subset S_2$是S_2中的一个开集. 我们将证明$\varphi(S_1)$在S_2中也是闭的；由于S_2是连通的，这将蕴涵$\varphi(S_1)=S_2$. 如果$\varphi(S_1)$在S_2中不是闭的；则存在一序列$\{\varphi(p_n)\}$，$p_n\in S_1$，使得$\{\varphi(p_n)\}\to p_0\notin\varphi(S_1)$. 于是，$\{\varphi(p_n)\}$是$\varphi(S_1)$中一个不收敛的Cauchy序列. 由于$\varphi$是1.1的局部等距，$\{p_n\}$是$S_1$中不收敛的Cauchy序列，这与$S_1$的完备性相矛盾.

10. a. 由于

$$\frac{d}{dt}(h\circ\varphi(t) = \frac{d}{dt}\langle\varphi(t),v\rangle = \langle\varphi'(t),v\rangle = \langle \mathrm{grad}h,v\rangle$$

和
$$\frac{d}{dt}(h\circ\varphi(t)) = dh(\varphi'(t)) = dh(\mathrm{grad}h) = \langle\mathrm{grad}h,\mathrm{grad}h\rangle$$

我们令上面两个关系式中的最后一项相等，就得到结论$|\mathrm{grad}h|\leqslant 1$.

b. 假定$\varphi(t)$对$t<t_0$有定义而对$t=t_0$无定义. 则存在序列$\{t_n\}\to t_0$，使得序列$\{\varphi(t_n)\}$不收敛. 如果m和n充分大，利用部分a我们得到

$$d(\varphi(t_m),\varphi(t_m)) \leqslant \int_{t_n}^{t_m} |\mathrm{grad}h(\varphi(t))|\,dt \leqslant |t_m - t_n|$$

这里d是S的内蕴距离. 这蕴涵$\{\varphi(t_n)\}$是一个关于d不收敛的Cauchy序列，与S的完备性矛盾.

5.4

2. 假定

$$\lim_{r\to\infty}(\inf_{x^2+y^2\geqslant r} K(x,y)) = 2C > 0$$

则存在$R>0$，使得若$(x,\ y)\notin D$，这里

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\quad x^2 + y^2 < R^2\}$$

就有 $K(x, y) \geqslant C$. 于是，取圆盘 D 外的点，我们可得到任意大的圆盘，在这些圆盘上 $K(x, y) \geqslant C > 0$. 容易看出这是与 Bonnet 定理矛盾的.

5.5

3. b. 假定 $a > b$ 并在关系(＊)中置 $s = b$. 利用初始条件和在$[0, b]$中 $v'(b) < 0$, $u(b) > 0$, $uv \geqslant 0$ 的事实去推出矛盾.

b. 由$[uv' - vu']_0^s \geqslant 0$，可得到 $v'/v \geqslant u'/u$；即，$(\log v)' \geqslant (\log u)'$. 现在，设 $0 < s_0 \leqslant s \leqslant a$，并将最后一个不等式从 s_0 到 s 积分，得到

$$\log v(s) - \log v(s_0) \geqslant \log u(s) - \log u(s_0)$$

也就是说，$V(s)/u(s) \geqslant v(s_0)/u(s_0)$. 下一步，注意

$$\lim_{s_0 \to 0} \frac{v(s_0)}{u(s_0)} = \lim_{s_0 \to 0} \frac{v'(s_0)}{u'(s_0)} = 1$$

于是，对一切 $s \in [(0, a), v(s) \geqslant u(s)]$.

6. 用反证法. 假定对 $s \in (0, s_0]$都有 $u(s) \neq 0$. 利用习题 3 部分 b 中的方程(＊)(取 $\widetilde{K} = L$, $s = s_0$)，我们得到

$$\int_0^{s_0} (K - L) uv ds + u(s_0) v'(s_0) - u(0) v'(0) = 0$$

假定，比方说，在$(0, s_0]$上 $u(s) > 0$, $v(s) < 0$. 则 $v'(0) < 0$, $v'(s_0) > 0$. 于是，在上面的和式中的第一项$\geqslant 0$，而其余的两项> 0，产生矛盾. 其余的情况可类似地处理.

8. 设 $\mathscr{V}$是沿 γ 具性质 $J(l) = 0$ 的 Jacobi 场 J 的向量空间. $\mathscr{V}$是 2 维向量空间. 由于 $\gamma(l)$与 $\gamma(0)$不是共轭点，因此，由 $\theta(J) = J(0)$给出的线性映照 θ: $\mathscr{V} \to T_{\gamma(0)}(S)$是 1.1 的，从而由于维数的原因是一个同构. 于是，存在 $J \in \mathscr{V}$满足 $J(0) = w_0$. 用同样的方法，存在一沿 γ 的 Jacobi 场 $\bar{J}$ 满足 $\bar{J}(0) = 0$, $\bar{J}(l) = w_1$. 所要求的 Jacobi 场由 $J + \bar{J}$ 给出.

5.6

10. 设 γ: $[0, l] \to S$ 是 S 上的一条简单闭测地线，$v(0) \in T_{\gamma(0)}(S)$使得 $|v(0)| = 1$, $\langle v(0), \gamma(0) \rangle = 0$. 取$v(0)$沿 γ 的平行移动 $v(s)$. 由于 S 是可定向的，因此 $v(l) = v(0)$且 v 定义了一个沿 γ 的可微向量场. 注意，v 是正交于 γ 的且 $Dv/ds = 0$, $s \in [0, l]$. 定义一个(端点自由的)变分 h: $[0, 1]\chi(-e, e) \to S$ 为

$$h(s,t) = \exp_{\gamma(s)} tv(s)$$

验证：对较小的 t，变分曲线 $h_t(s) = h(s, t)$是闭曲线. 将弧长的第二变分公式拓广到现在的情况并证明

$$L_v''(0) = -\int_0^l K ds < 0$$

于是，$\gamma(s)$比所有的由较小的 t，比如 $|t| < \delta \leqslant \epsilon$，决定的曲线 $h_t(s)$都要长. 将参数 t 变换成 t/δ，我们就得到所要的同伦.

5.7

9. 利用曲面上一曲线的测地挠率 τ_g 的概念(参见 3.2 习题 19). 由于

$$\frac{d\theta}{ds} = \tau - \tau_g$$

这是 $\cos\theta = \langle N, n\rangle$，以及曲线是闭的和光滑的，我们得到

$$\int_0^l \tau ds - \int_0^l \tau_g ds = 2\pi n$$

这里 n 是一个整数. 但是在球面上所有的曲线都是曲率线. 由于曲率线的特征是测地挠率等于零(参见 3.2 习题 19)，我们有

$$\int_0^l \tau ds = 2\pi n$$

由于球面上的每一条闭曲线都同伦于零，因此整数 n 显然是零.

5.10

7. 我们仅需证明：趋近于$\mathbb{R}^2_+$边界的以弧长为参数的测地线 $\gamma(s)$，对参数 s 的一切值都有定义. 如果不是这样，就将有一条这样的测地线，它从一固定点 p_0 起只有有限长 l. 但是对于$\mathbb{R}^2_+$中作为测地线的圆，我们有

$$l = \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\theta_0>\pi/2}^{\epsilon} \frac{d\theta}{\sin\theta}\right| \geqslant \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\theta_0>\pi/2}^{\epsilon} \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta}\right| = \infty$$

同样的事实对于 R^2_+ 中垂直方向的直线也成立.

10. c. 为了证明这度量是完备的，首先注意它优于$\mathbb{R}^2$上的欧氏度量. 于是，如果一序列关于给定的度量是 Cauchy 序列，则它也是关于欧氏度量的 Cauchy 序列. 由于欧氏度量是完备的，因此这样的序列收敛. 由此导出给定的度量也是完备的(参见 5.3 习题 1).

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝曲线与曲面的微分几何
作者＝Ｍａｎｆｒｅｄｏ Ｐ．ｄｏ Ｃａｒｍｏ著　田畴　忻元龙　姜国英　彭家贵　潘养廉译　胡和生　姜国英校
页数＝３６２
ＳＳ号＝１１３９５２２８
出版日期＝２００５年０１月第１版

前言

目录

第 1 章　　曲线
1．1 引言
1．2 参数曲线
1．3 正则曲线；弧长
1 4 ？3 中的向量积
1．5 以弧长为参数的曲线的局部理论
1．6 局部规范形式
1．7 平面曲线的一些整体性质
第 2 章　　正则曲面

２．１引言
２．２正则曲面；正则值的原像
２．３参数变换；曲面上的可微函数
２．４切平面；映照的微分
２．５第一基本形式；面积
２．６曲面的定向
２．７紧致定向曲面的一个特征
２．８面积的几何定义
附录连续性和可

微性简述
第３章　Ｇａｕｓｓ映照的几何学
３．１引言
３．２Ｇａｕｓｓ映照的定义和基本性质
３．３局部坐标中的Ｇａｕｓｓ映照
３．４向量场
３．５直纹面和极小曲面
附录自伴随的线性映照和二次形式
第４章　曲面的内蕴几何学
４．１引言

4．2等距对应；共形映照
4．3Gauss定理和相容性方程
4．4平行移动；测地线
4．5GaussBonnet定理及其应用
4．6指数映照；测地极坐标
4．7测地线的一些进一步的性质，凸邻域
附录曲线和曲面局部理论基本定理的证明

第５章　　整体微分几何学

５．１引言
５．２球面的刚性
５．３完备曲面；Ｈｏｐｆ－Ｒｉｎｏｗ定理
５．４弧长的第一变分和第二变分；Ｂｏｎｎｅｔ定理
５．５Ｊａｃｏｂｉ场和共轭点
５．６覆盖空间；Ｈａｄａｍａｒｄ定理
５．７曲线的整

体性定理；ＦａｒｙＭｉｌｎｏｒ定理
５．８Ｇａｕｓｓ曲率为零的曲面
５．９Ｊａｃｏｂｉ定理
５．１０抽象曲面及其进一步推广
５．１１Ｈｉｌｂｅｒｔ定理
附录欧氏空间的点集拓扑
文献与评注
提示与答案